Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 4, 1982

УДК 531.36

О РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕНИЕМ

Карапетян А. В.

Получены условия существования и устойчивости регулярной прецессии тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости с трением. Проведено сравнение полученных результатов с соответствующими результатами исследования задачи о регулярных прецессиях тела вращения на гладкой и шероховатой плоскостях.

1. Рассмотрим динамически симметричное тяжелое твердое тело, ограниченное выпуклой поверхностью вращения и находящееся на горизонтальной плоскости. Предположим, что со стороны последней на тело в точке его касания с плоскостью помимо нормальной реакции действует сила, пропорциональная скорости этой точки тела и противоположная ей по направлению (сила вязкого трения).

Положение тела будем задавать координатами x и y его центра масс в неподвижной системе координат $Oxyz$ (плоскость Oxy совпадает с опорной плоскостью, ось Oz направлена вертикально вверх) и углами Эйлера θ, φ и ψ, которые составляют главные центральные оси $G\xi$, $G\eta$ и $G\zeta$ инерции тела с осями неподвижной системы координат. Предполагая, что центр масс тела находится на оси его динамической симметрии, совпадающей с осью симметрии поверхности тела, и направляя по последней ось $G\zeta$, получим, что функция Лагранжа и диссипативная функция Релея примут вид

$$L=\frac{1}{2}(A+m\varkappa^2)\theta^{\cdot 2}+\frac{1}{2}C\varphi^{\cdot 2}+\frac{1}{2}(A\sin^2\theta+C\cos^2\theta)\psi^{\cdot 2}+$$
$$+C\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}\cos\theta+\frac{1}{2}m(x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2})-mgh$$
$$F=\frac{1}{2}mk[(x^{\cdot}-\alpha_1\theta^{\cdot}-\alpha_2\varphi^{\cdot}-\alpha_3\psi^{\cdot})^2+(y^{\cdot}-\beta_1\theta^{\cdot}-\beta_2\varphi^{\cdot}-\beta_3\psi^{\cdot})^2]$$
$$\alpha_1=h\sin\psi,\quad \alpha_2=\chi\cos\psi,\quad \alpha_3=\varkappa\cos\psi$$
$$\beta_i=-\partial\alpha_i/\partial\psi\ (i=1,\,2,\,3)$$
$$h=-(\chi\sin\theta+\zeta\cos\theta),\quad \varkappa=\chi\cos\theta-\zeta\sin\theta,$$
$$\chi=\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi$$

Здесь m — масса тела, A — центральный экваториальный и C — осевой моменты инерции, $k>0$ — коэффициент трения, ξ, η, ζ — координаты точки касания тела с плоскостью в системе $G\xi\eta\zeta$, h — высота центра масс тела над опорной плоскостью. Можно показать, что χ и ζ — функции только одной переменной θ, определяемые по виду уравнения, задающего ограничивающую тело поверхность, и удовлетворяющие соотношению

$$\frac{d\chi}{d\theta}\sin\theta+\frac{d\zeta}{d\theta}\cos\theta\equiv 0 \tag{1.1}$$

В исходных переменных функция F явно зависит от ψ, поэтому для удобства вместо координат x и y введем квазикоординаты ρ и σ по формулам

$$\rho^{\cdot}=x^{\cdot}\sin\psi-y^{\cdot}\cos\psi,\quad \sigma^{\cdot}=x^{\cdot}\cos\psi+y^{\cdot}\sin\psi \tag{1.2}$$

(Величина $\sigma^\cdot$ представляет собой проекцию скорости центра масс тела на линию узлов, а величина $\rho^\cdot$ — на ортогональ к последней, лежащую в горизонтальной плоскости.)

Функции L и F после исключения из них $x^\cdot$ и $y^\cdot$ при помощи соотношений (1.2) обозначим L^* и F^*; последние будут зависеть только от θ, $\theta^\cdot$, $\varphi^\cdot$, $\psi^\cdot$, $\rho^\cdot$, $\sigma^\cdot$. В частности

$$F^* = {}^1\!/_2 mk\,[(\rho^\cdot - h\theta^\cdot)^2 + (\sigma^\cdot - \chi\varphi^\cdot - \varkappa\psi^\cdot)^2]$$

Уравнения движения в новых переменных

$$(1.3)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial\theta^\cdot} = \frac{\partial L^*}{\partial\theta} - \frac{\partial F^*}{\partial\theta^\cdot},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial\varphi^\cdot} = -\frac{\partial F^*}{\partial\varphi^\cdot},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial\psi^\cdot} = -\frac{\partial F^*}{\partial\psi^\cdot}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial\rho^\cdot} = -\frac{\partial F^*}{\partial\rho^\cdot} + \frac{\partial L^*}{\partial\sigma^\cdot}\psi^\cdot,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial\sigma^\cdot} = -\frac{\partial F^*}{\partial\sigma^\cdot} - \frac{\partial L^*}{\partial\rho^\cdot}\psi^\cdot$$

не зависят явно от φ, ψ, ρ и σ, а содержат только их скорости и ускорения (такие переменные называют квазициклическими [1] или псевдоциклическими [2], а иногда и просто циклическими [3]). Поэтому естественно поставить задачу отыскания установившихся движений системы (1.3) вида

$$(1.4)\qquad \theta = \theta_0,\quad \theta^\cdot = 0,\quad \varphi^\cdot = \varphi_0^\cdot,\quad \psi^\cdot = \psi_0^\cdot,\quad \rho^\cdot = \rho_0^\cdot,\quad \sigma^\cdot = \sigma_0^\cdot$$

Подставляя (1.4) в уравнения движения (1.3), с учетом соотношений (1.1) получим, что решение (1.4) имеет место, если постоянные θ_0, $\varphi_0^\cdot$, $\psi_0^\cdot$, $\rho_0^\cdot$, $\sigma_0^\cdot$ удовлетворяют системе уравнений

$$(1.5)\qquad (A - C)\,\chi\sin\theta\cos\theta\,\psi^{\cdot 2} - C\sin\theta\varphi^\cdot\psi^\cdot + mg\varkappa + mh\sigma^\cdot\psi^\cdot = 0$$

$$\chi\rho^\cdot\psi^\cdot = 0,\quad \varkappa\rho^\cdot\psi^\cdot = 0,\quad -k\rho^\cdot + \sigma^\cdot\psi^\cdot = 0$$

$$k(\sigma^\cdot - \chi\varphi^\cdot - \varkappa\psi^\cdot) + \rho^\cdot\psi^\cdot = 0$$

2. Предположим, что величина θ_0 в (1.4) такова, что

$$(2.1)\qquad \chi(\theta_0) \neq 0,\ \varkappa(\theta_0) \neq 0$$

иначе, как легко показать (см. также формулы (2.4), (2.5) ниже), регулярная прецессия тела невозможна. Тогда из системы (1.5) следует, что $\rho_0^\cdot = \sigma_0^\cdot = 0$, а три постоянные θ_0, $\varphi_0^\cdot = \Omega$, $\psi_0^\cdot = \omega$ удовлетворяют системе двух уравнений

$$(2.2)\qquad (A - C)\sin\theta_0\cos\theta_0\omega^2 - C\sin\theta_0\Omega\omega + mg\varkappa_0 = 0$$

$$\chi_0\Omega + \varkappa_0\omega = 0$$

здесь и всюду далее нижний нулевой индекс указывает, что соответствующая функция переменной θ вычисляется для $\theta = \theta_0$). При этом соответствующее однопараметрическое семейство решений вида

$$((2.3)\qquad \theta = \theta_0,\ \theta^\cdot = 0,\quad \varphi^\cdot = \Omega,\ \psi^\cdot = \omega,\ \rho^\cdot = \sigma^\cdot = 0$$

определяет регулярную прецессию тела.

Действительно, при условиях (2.3) центр масс тела неподвижен, тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через его центр масс, и с постоянной угловой скоростью Ω — вокруг собственной оси симметрии, отклоненной от вертикали на угол θ_0. При этом точка касания тела с плоскостью описывает две окружности: одну — с угловой скоростью ω — на опорной плоскости с центром в проекции центра масс на последнюю и радиусом $|\varkappa_0|$, другую — с угловой скоростью Ω — на поверхности тела в плоскости, ортогональной его оси симметрии, с центром на последней в точке с координатой ζ_0 и радиусом $|\chi_0|$; вследствие второго уравнения системы (2.2) регулярная прецессия тела на плоскости с трением совершается без скольжения тела по плоскости.

Выражая Ω через ω из второго уравнения системы (2.2) и подставляя найденное значение Ω в первое уравнение, получим

$$\Omega = -\left(\frac{\varkappa}{\chi}\right)_0 \omega, \quad \omega^2 = -\left[\frac{mg\chi\varkappa}{(A\chi\cos\theta - C\zeta\sin\theta)\sin\theta}\right]_0 \tag{2.4}$$

Соотношения (2.4) по заданному отклонению оси симметрии тела от вертикали однозначно определяют абсолютные величины угловых скоростей прецессии и собственного вращения. Кроме того, второе из них дает (так как $\omega^2 > 0$) условие существования регулярной прецессии тела на плоскости с трением, ось симметрии которого составляет с вертикалью угол θ_0

$$(Al_0\cos\theta_0 + C\zeta_0)(l_0\cos\theta_0 + \zeta_0) > 0; \quad l = -\chi/\sin\theta \tag{2.5}$$

Заметим, что при выполнении этого условия соотношения (2.1) заведомо выполнены. Вместо функции $\chi(\theta)$ здесь введена функция $l(\theta)$ — расстояние от точки касания тела с плоскостью до точки пересечения его оси симметрии с вертикалью, проходящей через первую точку.

В случаях абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости регулярные прецессии тела образуют [4, 5] двухпараметрические семейства. При этом в первом случае три постоянные θ_0, Ω и ω удовлетворяют одному уравнению, совпадающему с первым уравнением системы (2.2), а на регулярной прецессии, как и в данном случае, центр масс неподвижен, но тело может скользить по опорной плоскости [4]; во втором случае постоянные θ_0, Ω и ω также удовлетворяют одному уравнению, которое получается из первого уравнения системы (2.2), если нуль, стоящий в правой части последнего, заменить на

$$-mh_0(\varkappa_0\omega + \chi_0\Omega)\omega \tag{2.6}$$

Скольжение тела не допускается, а на регулярной прецессии неподвижна точка оси симметрии тела, находящаяся на расстоянии

$$|(\varkappa_0\omega + \chi_0\Omega)/(\omega\sin\theta_0)| \tag{2.7}$$

от его центра масс [5].

Сравнивая второе уравнение системы (2.2) с соотношениями (2.6) и (2.7), заключаем, что одномерное многообразие регулярных прецессий тяжелого тела вращения на плоскости с трением лежит на пересечении (не пустом при условии (2.5)) соответствующих двумерных многообразий для случаев гладкой и шероховатой плоскостей.

Замечания. 1°. Если величина θ_0 в (1.4) такова, что $\chi_0 \neq 0$, $\varkappa_0 = 0$, то при $\theta = \theta_0$ центр масс тела лежит на вертикали, проходящей через точку его касания с опорной плоскостью (как в положении равновесия). При этом из системы (2.2) следует, что $\psi_0^{\cdot} = \rho_0^{\cdot} = 0$, $\sigma_0^{\cdot} = \chi_0\varphi_0^{\cdot}$, а соответствующее однопараметрическое семейство ($\varphi_0^{\cdot} \equiv \Omega$ — произвольно) решений вида

$$\theta = \theta_0, \quad \theta^{\cdot} = 0, \quad \varphi^{\cdot} = \Omega, \quad \psi^{\cdot} = \rho^{\cdot} = 0, \quad \sigma^{\cdot} = \chi_0\Omega$$

определяет качение тела вдоль неподвижной прямой с постоянной скоростью (при $\Omega = 0$ — равновесие). Аналогичные условия определяют качение тела на гладкой и шероховатой плоскостях [4, 5].

2°. Если величина θ_0 в (1.4) такова, что $\chi_0 = 0$, то при $\psi_0^{\cdot} \neq 0$ имеет место перманентное вращение тела вокруг своей вертикально расположенной оси симметрии (при $\psi_0^{\cdot} = 0$ — равновесие) и соответствующие результаты частным образом следуют из результатов работы [6], в которой получены условия существования и устойчивости перманентных вращений произвольного тела на плоскости с трением.

3. Исследуем устойчивость регулярной прецессии тела (решения (2.3)) по отношению к возмущениям переменных θ, $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, $\rho^{\cdot}$ и $\sigma^{\cdot}$. Полагая

$$\theta - \theta_0 = u,\ \varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta_0 - (\Omega + \omega\cos\theta_0) = v$$
$$\psi^{\cdot} - \omega = w,\quad \rho^{\cdot} = \rho',\ \sigma^{\cdot} = \sigma'$$

приведем уравнения возмущенного движения к виду

$$(3.1)\qquad (A + m\mu_0^2 \sin^2\theta_0)\, u^{\cdot\cdot} = [-(A - C)\omega^2 \sin^2\theta_0 + mg\,(l_0 - r_0)]\, u - C\omega\sin\theta_0 v + [(2A - C)\omega\cos\theta_0 - C\Omega]\sin\theta_0 w - m\lambda_0(\rho'^{\cdot} - \omega\sigma') + U$$
$$Cv^{\cdot} = C\omega\sin\theta_0 u^{\cdot} + ml_0\sin\theta_0(\omega\rho' + \sigma'^{\cdot}) + V$$
$$A\sin^2\theta_0 w^{\cdot} = -[(2A - C)\omega\cos\theta_0 - C\Omega]\sin\theta_0 u^{\cdot} + m\zeta_0\sin\theta_0(\omega\rho' + \sigma'^{\cdot}) + W$$
$$\rho'^{\cdot} = k\lambda_0 u^{\cdot} - k\rho' + \omega\sigma' + R$$
$$\sigma'^{\cdot} = k\,[(\lambda_0 - r_0)\omega - r_0\Omega\cos\theta_0]\, u - kl_0\sin\theta_0 v - k\zeta_0 \times \sin\theta_0 w - \omega\rho' - k\sigma' + S$$
$$(\lambda_0 = l_0\sin^2\theta_0 - \zeta_0\cos\theta_0,\ \mu_0 = l_0\cos\theta_0 - \zeta_0)$$

Здесь $r_0 = r(\theta_0)$, где $r(\theta)$ — радиус кривизны меридиального сечения поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью; U, V, W, R и S — функции переменных u, $u^{\cdot}$, v, w, ρ' и σ', разложения которых по степеням указанных переменных начинаются с членов не ниже второго порядка малости. Полагая эти функции равными нулю, получим линеаризованную систему уравнений возмущенного движения, которая допускает линейный интеграл

$$(3.2)\qquad 2\,(Al_0\cos\theta_0 + C\zeta_0)\omega\sin\theta_0 u - C\zeta_0 v + Al_0\sin^2\theta_0 w = \pi = \mathrm{const}$$

и характеристическое уравнение которой всегда имеет один нулевой корень.

Если вместо переменной w ввести по формуле (3.2) переменную π, характеризующую отклонение возмущенного движения от решения (2.3) вдоль многообразия (2.2), а вместо переменных u и v соответствующим образом [7] ввести переменные u' и v', характеризующие это отклонение от многообразия (2.2), и переписать систему (3.1) в новых переменных u', $u^{\cdot}$, v', π, ρ' и σ', то все нелинейности полученных уравнений тождественно обратятся в нуль при $u' = u^{\cdot} = v' = \rho' = \sigma' = 0$.

Таким образом, если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений возмущенного движения, кроме одного нулевого, лежат в левой полуплоскости, то имеет место особенный случай одного нулевого корня и справедлива теорема Ляпунова [7]. При этом регулярная прецессия тела вращения на плоскости с трением устойчива, причем (в отличие от случаев гладкой и шероховатой плоскости) асимптотически по части переменных, характеризующих отклонение возмущенного движения от многообразия регулярных прецессий.

Не приводя, ввиду громоздкости, явного вида коэффициентов указанного характеристического уравнения

$$\lambda\,(a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5) = 0 \quad (a_0 > 0,\ a_1 > 0)$$

и условий [8]

$$a_3 > 0,\quad a_5 > 0,\quad a_1a_2 - a_0a_3 > 0$$
$$(a_1a_2 - a_0a_3)(a_3a_4 - a_2a_5) - (a_0a_5 - a_1a_4)^2 > 0$$

при которых пять его ненулевых корней лежат в левой полуплоскости, заметим, что при $k = 0$ это уравнение принимает вид

$$\lambda^2 (\lambda^2 + \omega^2)(a_* \lambda^2 + b_*) \quad (a_* > 0)$$

а при $k = \infty$

$$\lambda^2 (a_{**} \lambda^2 + b_{**}) \quad (a_{**} > 0)$$

причем условия $b_* > 0$ и $b_{**} > 0$ совпадают с условиями устойчивости регулярной прецессии тела вращения соответственно на гладкой и шероховатой плоскостях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961, 824 с.
2. *Самсонов В. А.* О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, ст. 512—520.
3. *Емельянова И. С.*, *Фуфаев Н. А.* Об устойчивости стационарных движений.— В кн.: Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика. Горький: Изд-е Горьковск. ун-та, 1974, с. 3—9.
4. *Карапетян А. В.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 504—511.
5. *Карапетян А. В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений.— В кн.: Задачи устойчивости и стабилизации движения. Вып. 2, М.: ВЦ АН СССР, 1982, с. 87—102.
6. *Карапетян А. В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 42—51.
7. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. Т. 2. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1956, 473 с.
8. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979, 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.X.1981