

УДК 531.384

## О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ОДНОРОДНОГО ЭЛЛИПСОИДА НА НЕПОДВИЖНОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Маркеев А. П.

Рассматриваются периодические движения без скольжения по горизонтальной плоскости тяжелого однородного эллипсоида, близкого к шару. Показано существование периодических движений эллипсоида относительно его центра тяжести, рождающихся из стационарных движений однородного шара. Осуществлено построение периодических движений, исследована их устойчивость, найдена реакция плоскости, определены следы точки касания на поверхности эллипсоида и на плоскости, а также ориентация эллипсоида в абсолютном пространстве.

Изучается движение тяжелого, близкого к шару, однородного эллипсоида на абсолютно гладкой плоскости. Показано, что движение эллипсоида вечно (при всех значениях времени) близко к его регулярной прецессии вокруг вектора кинетического момента, который имеет постоянную длину и прецессирует с постоянной угловой скоростью вокруг вертикали, оставаясь на неизменном угловом расстоянии от нее.

Задача о движении твердого тела на неподвижной горизонтальной плоскости получила к настоящему времени глубокое развитие [1—10]. Подробно изучен вопрос о существовании и устойчивости стационарных движений твердого тела; наиболее общие результаты в этой задаче получены в статьях [11—14].

1. Движение эллипсоида будем рассматривать по отношению к неподвижной системе координат  $OXYZ$  с началом  $O$  в некоторой точке горизонтальной плоскости и осью  $OZ$ , направленной вертикально вверх. Единичный вектор оси  $OZ$  обозначим через  $-\mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности эллипсоида, построенный в точке  $Q$  касания эллипсоида и плоскости.

Оси системы координат  $Gxyz$  с началом в центре тяжести  $G$  эллипсоида направлены по его главным осям. В этой системе координат поверхность эллипсоида задается уравнением

$$(1.1) \quad f \equiv x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, \quad \mathbf{n} = \text{grad } f / |\text{grad } f|$$

а радиус-вектор  $GQ$  имеет компоненты  $x, y, z$ .

Ориентация эллипсоида относительно неподвижной системы координат задается при помощи углов Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$ . Взаимная ориентация систем координат  $OXYZ$  и  $Gxyz$  будет определяться также при помощи матрицы направляющих косинусов  $\|a_{ik}\|$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ), которые известным образом выражаются через углы Эйлера, причем

$$(1.2) \quad a_{31} = -b^2c^2x/\Delta, \quad a_{32} = -c^2a^2y/\Delta, \quad a_{33} = -a^2b^2z/\Delta$$

$$\Delta = (b^4c^4x^2 + c^4a^4y^2 + a^4b^4z^2)^{1/2}$$

Если  $V_G$  — вектор скорости центра тяжести эллипсоида, а  $\omega$  — вектор его мгновенной угловой скорости, то условие отсутствия скольжения записывается в виде

$$(1.3) \quad V_G + \omega \times GQ = 0$$

Уравнения движения эллипсоида относительно его центра тяжести запишем в форме уравнений Гиббса = Аппеля [15]

$$(1.4) \quad (A + y^2 + z^2) p' - xyq' - xzr' = (B - C) qr + \\ + (\omega, GQ)(x' - yr + zq) - (GQ, GQ') p + ga^2 (c^2 - b^2)yz/\Delta \\ \{pqr, xyz, abc, ABC\} \\ A = (b^2 + c^2)/5, \quad B = (c^2 + a^2)/5, \quad C = (a^2 + b^2)/5$$

Здесь  $p, q, r$  — проекции вектора  $\dot{\omega}$  на оси  $Gx, Gy, Gz$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $A, B, C$  — главные центральные моменты инерции эллипсоида, масса эллипсоида равна единице. Два невыписанных уравнения получаются одновременной круговой перестановкой символов, указанных в фигурных скобках. Система уравнений (1.4) замыкается уравнениями Пуассона

$$a_{31}' = a_{32}r - a_{33}q, \quad a_{32}' = a_{33}p - a_{31}r, \quad a_{33}' = a_{31}q - a_{32}p$$

выражающими постоянство направления оси  $OZ$  в абсолютном пространстве. Используя (1.1) и (1.2), уравнения Пуассона можно записать в виде следующих уравнений относительно  $x, y, z$ :

$$(1.5) \quad x' = yr - zq + \frac{a^2 - c^2}{a^2c^2} (x^2 - a^2)zq + \frac{b^2 - a^2}{b^2a^2} (x^2 - a^2)yr + \\ + \frac{c^2 - b^2}{c^2b^2} xyzp \quad \{xyz, pqr, abc\}$$

Эти уравнения зависимы в силу тождества (1.1). Система уравнений (1.4) и (1.5) допускает интеграл энергии

$$(1.6) \quad \frac{1}{2}V_G^2 + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + gZ_G = h = \text{const}$$

где  $Z_G$  — расстояние от центра эллипсоида до горизонтальной плоскости

$$(1.7) \quad Z_G = (a^2a_{31}^2 + b^2a_{32}^2 + c^2a_{33}^2)^{1/2}$$

2. Если в (1.1), (1.4), (1.5) положить  $a = b = c = R$ , то придем к задаче о движении без скольжения однородного шара по плоскости.

Решение этой задачи хорошо известно: в общем случае движения, отличном от чистого вращения вокруг вертикали, вектор мгновенной угловой скорости шара  $\omega$  постоянен по величине и направлению, а центр тяжести шара движется равномерно и прямолинейно в направлении, перпендикулярном  $\omega$ , след точки касания на плоскости — прямая линия, а на поверхности сферы, ограничивающей шар — окружность неизменного радиуса  $\rho$ , расположенная в плоскости, перпендикулярной  $\omega$  и отстоящей от центра шара на неизменном расстоянии  $d$  (фиг. 1), нормальная реакция плоскости равна весу шара, сила трения — нулю.■

Пусть эллипсоид будет трехосный, но близкий к шару радиуса  $R$ . За малый параметр примем величину  $\varepsilon = \max \{|a - b|/R, |b - c|/R, |c - a|/R\}$ . При  $\varepsilon \neq 0$  будем исследовать периодические движения эллипсоида относительно его центра тяжести, которые при  $\varepsilon = 0$  переходят в описанные стационарные движения шара.

Можно проверить, что при каждой из следующих трех подстановок:

$$(2.1) \quad t, p, q, r, x, y, z \rightarrow -t, -p, q, r, -x, y, z \\ t, p, q, r, x, y, z \rightarrow -t, p, -q, r, x, -y, z. \\ t, p, q, r, x, y, z \rightarrow -t, p, q, -r, x, y, -z$$

уравнения (1.4), (1.5) остаются неизменными. Эти свойства симметрии будут далее использованы при исследовании вопроса о существовании периодических движений и для построения их методом, разработанным Чезари [16] и Хейлом [17].

Для дальнейшего целесообразно в уравнениях (1.4) и (1.5) вместо переменных  $x, y, z$  ввести новые переменные  $\zeta, \rho, \gamma$ . Для этого сделаем сначала следующие две замены:

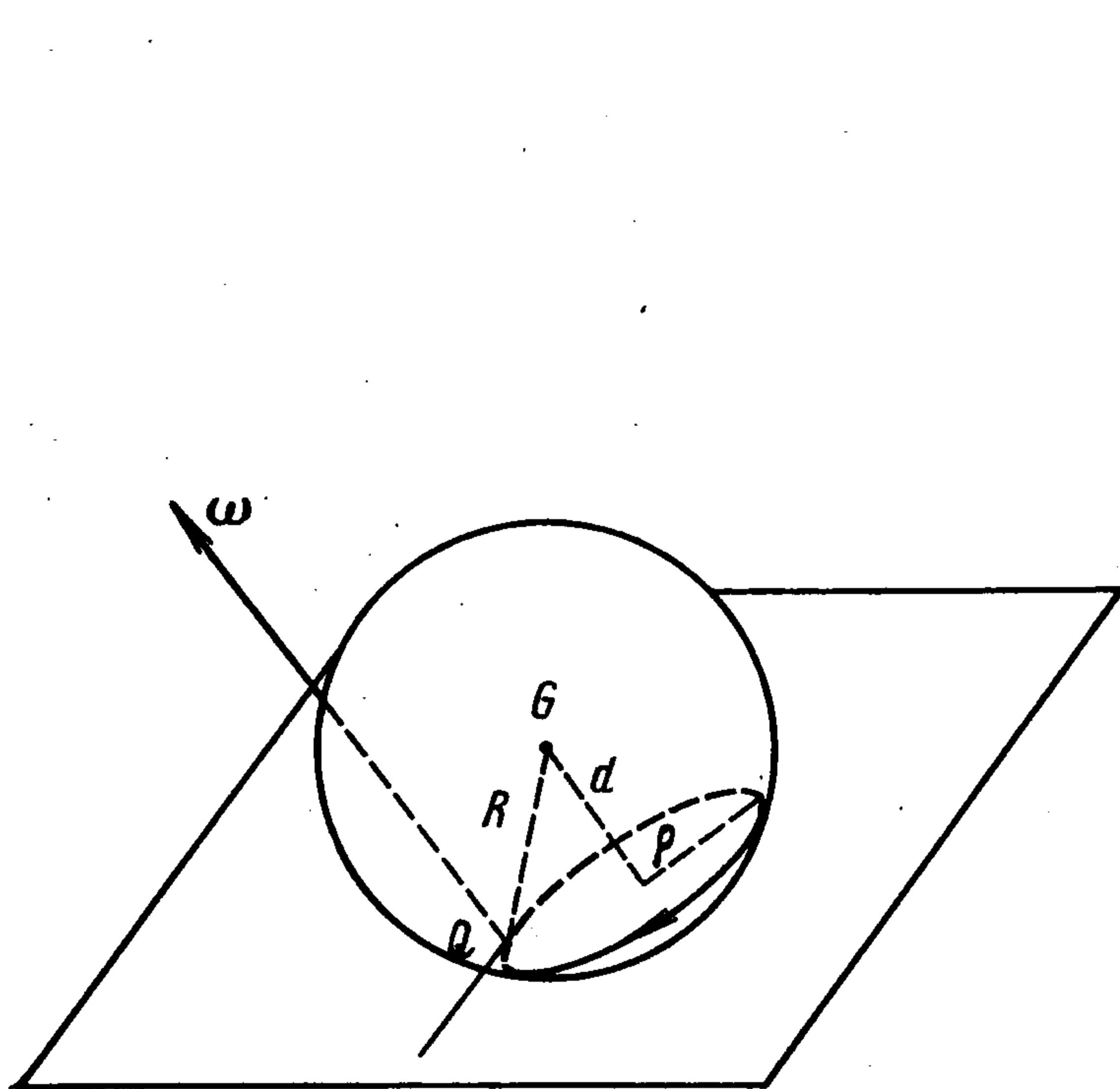
$$(2.2) \quad x = ax', \quad y = by', \quad z = cz'$$

$$(2.3) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

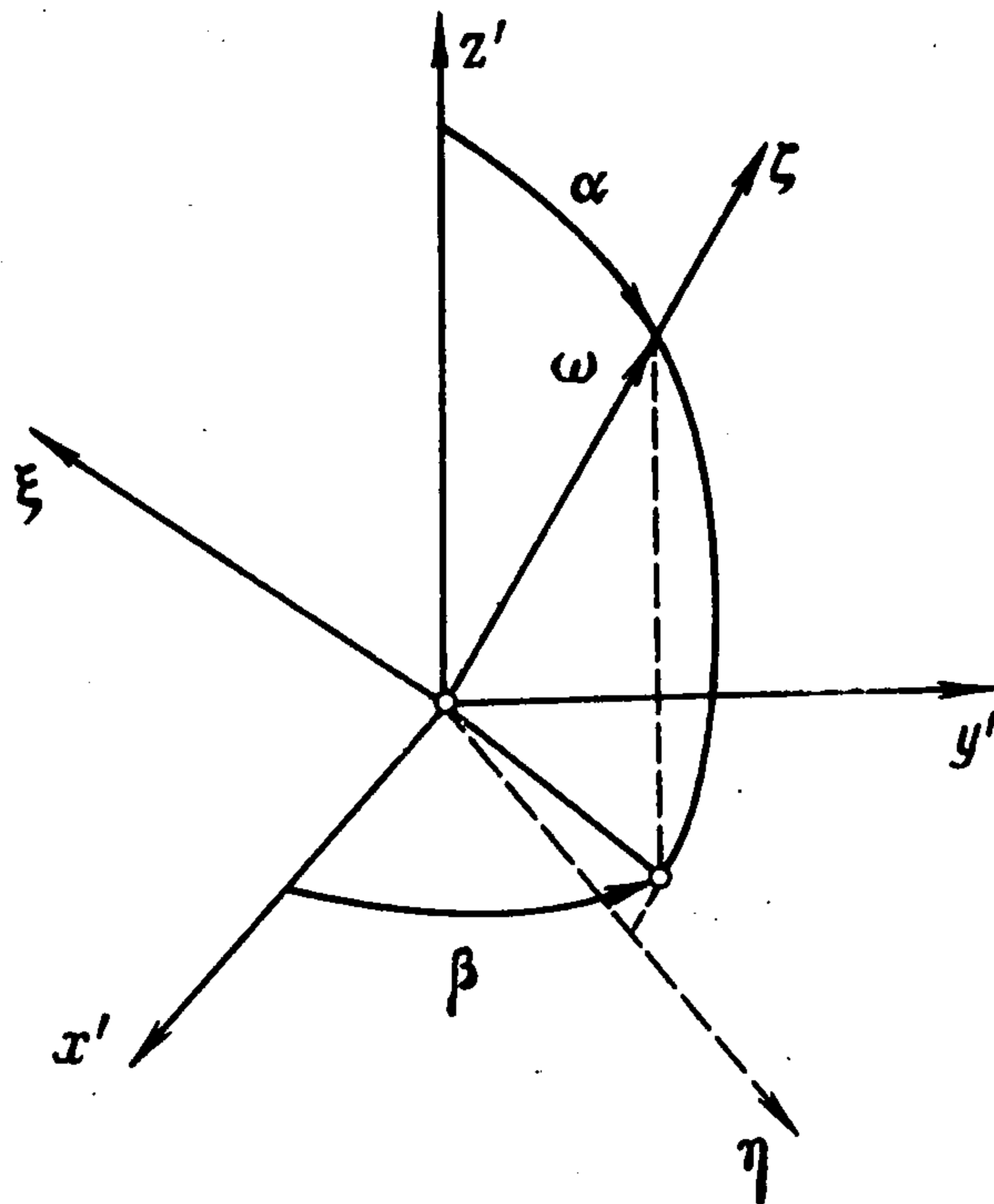
$$\sin \alpha = \sqrt{p^2 + q^2}/\omega, \quad \cos \alpha = r/\omega, \quad \sin \beta = q/\sqrt{q^2 + p^2}$$

$$\cos \beta = p/\sqrt{q^2 + p^2} \quad (\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2})$$

Замена переменных (2.3) осуществляет переход от системы координат  $Gx'y'z'$  к системе  $G\xi\eta\zeta$ , у которой ось  $G\zeta$  параллельна вектору  $\omega$ , ось  $G\xi$  перпендикулярна плоскости  $Gz'\zeta$ , а ось  $G\eta$  составляет тупой угол с осью



Фиг. 1



Фиг. 2

$Gz'$ . Угол  $\alpha$  — это угол между вектором  $\omega$  и осью  $Gz'$ , а  $\beta$  — угол между проекцией  $\omega$  на плоскость  $Gx'y'$  и осью  $Gx'$  (см. фиг. 2, где вектор  $\omega$  изображен проходящим через центр тяжести  $G$ ; на самом деле он проходит через точку  $Q$  касания эллипсоида и плоскости).

Если сделать еще одну замену переменных по формулам

$$(2.4) \quad \xi = \rho \sin \gamma, \quad \eta = \rho \cos \gamma$$

то уравнение (1.1) и уравнения для  $\zeta$  и  $\gamma$  примут вид

$$(2.5) \quad \zeta^2 + \rho^2 = 1$$

$$(2.6) \quad \zeta = [(c - b) r q x' + (a - c) p r y' + (b - a) q p z'] h_1 + [(c - b) p y' z' + (a - c) q z' x' + (b - a) r x' y'] h_2 + \dots$$

$$(2.7) \quad \gamma = \omega - (F_1 \cos \gamma + F_2 \sin \gamma)/(\omega \rho) + \dots$$

$$(2.8) \quad h_1 = (14 - 15\zeta^2)/(7\omega R), \quad h_2 = 2\zeta(2 - 5\zeta^2 - 5g/(\omega^2 R))/(7R)$$

$$F_1 = p \cdot (\text{ctg } \alpha \eta + \zeta) \sin \beta - q \cdot (\text{ctg } \alpha \eta + \zeta) \cos \beta - \omega \sin \beta g_1 + \omega \cos \beta g_2$$

$$F_2 = p \cdot (\text{ctg } \alpha \sin \beta \xi - \cos \alpha \cos \beta \zeta) - q \cdot (\text{ctg } \alpha \cos \beta \xi + \cos \alpha \sin \beta \zeta) + r \cdot \sin \alpha \zeta + \omega \cos \alpha \cos \beta g_1 + \omega \cos \alpha \sin \beta g_2 - \omega \sin \alpha g_3$$

$$g_1 = 2(c - b)x'y'z'p/R + (a - c)(2x'^2 - 1)z'q/R + (b - a) \times \times (2x'^2 - 1)y'r/R \{g_1 g_2 g_3, x'y'z', pqr\}$$

Величины  $x', y', z', \xi, \eta, \alpha, \beta$  должны быть выражены через  $p, q, r, \zeta, \rho, \gamma$  в соответствии с формулами (2.3), (2.4). Многоточием обозначены члены порядка  $\varepsilon^2$  и выше.

Для описания движения эллипсоида в новых переменных надо в системе уравнений (1.4), (1.5) уравнения (1.5) заменить на уравнения (2.6), (2.7), а равенство (1.1) — на (2.5).

При  $\varepsilon = 0$  для всех решений преобразованной системы уравнений величины  $p, q, r, \zeta, \rho, \gamma$  постоянны, и теперь полностью выясняется механический и геометрический смысл новых переменных  $\zeta, \rho, \gamma$ . Если за единицу длины принять радиус шара, то  $\rho$  — это радиус окружности — следа точки касания на сфере, а  $|\zeta|$  — расстояние  $d$  плоскости этой окружности от центра шара (фиг. 1);  $\gamma$  — угол между проекцией GQ на плоскость окружности — следа и некоторым фиксированным в этой плоскости направлением, причем  $\dot{\gamma}$  равняется угловой скорости  $\omega$  движения точки касания по ее следу на сфере.

3. Опираясь на соотношения (2.2) — (2.4), можно из интеграла энергии (1.6) и геометрического интеграла (2.5) найти  $\zeta$  и  $\rho$  в виде функций переменных  $p, q, r, \gamma$  и параметра  $h$ . Подставив тогда  $x, y, z$  выраженные через  $\zeta, \rho, \gamma$  в уравнения (1.4) и разрешив их относительно  $p, q, r$ , получим систему трех уравнений, у которой правые части будут функциями  $p, q, r, \gamma$  и параметра  $h$ ; по угловой переменной  $\gamma$  правые части будут  $2\pi$ -периодическими.

Для получения геометрической картины движения перейдем еще, используя (2.7), к новой независимой переменной  $\gamma$ . Тогда, как показывают вычисления, система уравнений для  $p, q, r$  будет такой:

$$(3.1) \quad \frac{dp}{d\gamma} = \frac{5}{7\omega R} \left\{ (c-b)(qrx'^2 + 2p^2z'y' + 2p\omega\zeta x'y'z' + \right. \\ \left. + \frac{2g}{R} y'z' + \frac{2}{5} qr) + (a-c)(rpx'y' + 2qpx'z' + 2q\omega\zeta(x'^2 - 1)z') + \right. \\ \left. + (b-a)(pqx'z' + 2rpx'y' + 2r\omega\zeta(x'^2 - 1)y') \right\} + \dots \\ \{pqr, x'y', z', abc\}$$

Для нахождения  $2\pi$ -периодических по  $\gamma$  решений системы (3.1) используем свойства симметрии (2.1). Рассмотрим только второе свойство симметрии, так как два других сводятся к нему путем кругового переобозначения осей системы  $Gxyz$ .

Уравнения (3.1) обладают свойством  $E$  (см. [17]) по отношению к  $Q = \text{diag}(1, -1, 1)$ . Это означает, что система (3.1) не изменяется при подстановке  $\gamma, p, q, r \rightarrow -\gamma, p, -q, r$ . Периодические решения системы (3.1) получим согласно следующему алгоритму [17].

Рассмотрим систему уравнений

$$(3.2) \quad \dot{z} = \varepsilon Z(t, z, \varepsilon)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, функция  $Z$  аналитична по  $z$  и  $\varepsilon$ , а по  $t$  она  $2\pi$ -периодична и непрерывна. При  $\varepsilon = 0$  решения системы (3.2) постоянны. Все периодические решения системы (3.2), рождающиеся при  $\varepsilon \neq 0$  из ее постоянных решений, могут быть получены следующим образом. Положим

$$(3.3) \quad z^{(0)} = a^*, \quad z^{(k+1)} = a^* + \varepsilon \int [Z(t, z^{(k)}(t), \varepsilon) - \langle Z(t, z^{(k)}(t), \varepsilon) \rangle] dt$$

где угловые скобки означают усреднение по переменной  $t$ . Последовательные приближения (3.3) определяют приближенное значение периодической функции  $z(t, a^*, \varepsilon)$

с точностью до членов порядка  $\varepsilon^{k+1}$  включительно. Это значение будет функцией произвольного постоянного вектора  $a^*$ .

Составим систему бифуркационных уравнений

$$(3.4) \quad \langle Z(t, z^{(k)}(t, a^*, \varepsilon), \varepsilon) \rangle = 0$$

которая служит для определения порождающего решения — постоянного вектора  $a^*$  как функции  $\varepsilon$ . Если система (3.4) допускает решение, для которого якобиан отличен от нуля, то, подставив это решение в  $z^{(k+1)}$ , получим  $2\pi$ -периодическое решение системы (3.2) с точностью до  $\varepsilon^{k+1}$  включительно.]

При  $k = 0$  имеем

$$(3.5) \quad z^{(1)} = a^* + \varepsilon \int [Z(t, a^*, 0) - \langle Z(t, a^*, 0) \rangle] dt$$

где  $a^*$  удовлетворяет системе уравнений

$$(3.6) \quad \langle Z(t, a^*, 0) \rangle = 0$$

Часто (и это наиболее интересный случай для приложений) якобиан для решений системы (3.4) обращается в нуль. Тогда наличие свойства  $E$  у системы (3.2) дает возможность получать достаточные условия существования периодических решений, соответствующих некоторому частному выбору вектора  $a^*$ . Именно [17], если  $j$ -й элемент диагональной матрицы  $Q$  равен  $+1$ , то  $j$ -му уравнению бифуркационной системы (3.4) удовлетворяет (во всех приближениях по  $\varepsilon$ ) всякий вектор  $a^*$ , для которого  $Qa^* = a^*$ . Поэтому ряд уравнений в (3.4) исчезает, что позволяет получать условия существования периодических решений, когда якобиан для некоторых решений системы (3.4) равен нулю.

Вычисления показывают, что для уравнений (3.1) упомянутый якобиан бифуркационной системы (3.6) тождественно равен нулю. Но система (3.1) обладает свойством  $E$  по отношению к матрице  $Q$ , поэтому положим

$$(3.7) \quad a^{*T} = (p^*, 0, r^*)$$

Первое и третье уравнения бифуркационной системы (3.4) при таком выборе  $a^*$  удовлетворяются тождественно, и поэтому требует изучения только второе уравнение при произвольных  $p^*, r^*$ .

Ограничиваясь построением решений в первом приближении по  $\gamma$  рассмотрим второе уравнение из (3.6), которое получается в результате усреднения по  $\gamma$  правой части второго уравнения системы (3.1) при  $p = p^*, q = 0, r = r^*$ . При построении  $p, q, r$  в первом приближении величины  $\zeta$  и  $\rho$  входящие в выражения для  $x', y', z'$  можно считать постоянными  $\zeta^*$  и  $\rho^*$ . Эти постоянные удовлетворяют соотношениям  $\zeta^{*2} + \rho^{*2} = 1, \rho^* > 0$ , а в остальном они произвольны. Произведя усреднение, получим бифуркационное уравнение

$$(3.8) \quad p^* r^* F(\rho^*, \omega^*) = 0$$

$$F(\rho^*, \omega^*) = 10\rho^{*4} - 5(6\sigma^* + 5)\rho^{*2} + 4(5\sigma^* + 6)$$

$$\sigma^* = \frac{g}{\omega^{*2}R}, \quad \omega^* = \sqrt{p^{*2} + r^{*2}}$$

Для анализа уравнения (3.8) рассмотрим предварительно уравнение  $F(\rho^*, \omega^*) = 0$ . Из него следует, что

$$(3.9) \quad \omega^{*2} = \frac{10(3\rho^{*2} - 2)g}{(10\rho^{*4} - 25\rho^{*2} + 24)R}$$

где  $\rho^*$  изменяется в промежутке от нуля до единицы. Функция  $F(\rho^*, \omega^*)$  может обратиться в нуль только при одновременном выполнении неравенств  $\rho^* > \sqrt{2/3}$  и  $\omega^* < \frac{1}{3}\sqrt{10g/R}$ , производная  $\partial F/\partial \omega^* \neq 0$  при  $F(\rho^*, \omega^*) = 0$ . Следовательно, если корни уравнения  $F(\rho^*, \omega^*) = 0$  существуют, то они будут простыми.

Бифуркационное уравнение (3.8) имеет три типа решений, для которых якобиан отличен от нуля. Для решений первого типа  $r^* = 0$ ,  $p^*$  — произвольная величина, но такая, что  $F(\rho^*, \omega^*) \neq 0$ ; для решений второго типа  $p^* = 0$ ,  $r^*$  произвольно, но  $F(\rho^*, \omega^*) \neq 0$ ; для решений третьего типа  $F(\rho^*, \omega^*) = 0$ ,  $p^* \neq 0$ ,  $r^* \neq 0$ . Из этих решений при  $\varepsilon \neq 0$  рождаются  $2\pi$ -периодические по  $\gamma$  решения системы уравнений (3.1).

Совершенно аналогично для доказательства существования периодических решений уравнений (3.1) можно использовать свойство  $E$  по отношению к матрицам  $\text{diag}(-1, 1, 1)$  и  $\text{diag}(1, 1, -1)$ . В последнем случае переменную  $\gamma$  следует предварительно заменить на  $\pi/2 - \gamma$ .

Итак, существуют два различных семейства периодических движений эллипсоида. Периодические движения первого семейства переходят при  $\varepsilon = 0$  в такие движения, для которых вектор  $\omega$  параллелен одной из осей эллипсоида. Для них при  $\varepsilon = 0$  катящийся и вертящийся эллипсоид (шар) касается горизонтальной плоскости сечением, параллельным его главному сечению. Периодические движения первого семейства существуют, если  $\omega^* > \frac{1}{3}\sqrt{10g/R}$ , а  $\rho^*$  — любое из промежутка от нуля до единицы, или если  $\omega^* < \frac{1}{3}\sqrt{10g/R}$ , а  $\rho^*$  и  $\omega^*$  не связаны соотношением (3.9). Для периодических движений второго семейства при  $\varepsilon = 0$  проекция  $\omega$  на одну из осей эллипсоида равна нулю, а на две другие отличны от нуля. Для этих периодических движений при  $\varepsilon = 0$  эллипсоид (шар) касается плоскости сечением, параллельным одной из его осей и пересекающим две другие его оси. Периодические движения второго семейства существуют, если  $\omega^* < \frac{1}{3}\sqrt{10g/R}$ ,  $\rho^* > \sqrt{2/3}$  и если при этом выполняется еще соотношение типа равенства — условие (3.9), связывающее порождающие значения величин  $\omega$  и  $\rho$ . Периодические движения второго семейства в дальнейшем не рассматриваются, так как они могут реализоваться в исключительных случаях.

4. Построим периодические решения первого семейства, переходящие при  $\varepsilon = 0$  в порождающее решение

$$(4.1) \quad p = p^*, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad \rho = \rho^*, \quad \zeta = \zeta^*$$

Величину  $p^*$  для определенности считаем положительной. Для получения решения в первом приближении надо в правые части системы (3.1) вместо величин  $p, q, r, x', y', z'$  подставить их значения, соответствующие порождающему решению (4.1), отбросить члены выше первого порядка по  $\varepsilon$  и произвести интегрирование. В результате получим

$$(4.2) \quad p = p^* - \frac{5\omega^*\rho^{*2}}{14R}(c-b)(2-\rho^{*2}+\sigma^*)\cos 2\gamma$$

$$q = -\frac{5\omega^*\rho^*\zeta^*}{42R}\{12(a-c)\sigma^*\sin\gamma + (c-b)[3(\rho^{*2}-4)\sin\gamma - \rho^{*2}\sin 3\gamma]\}$$

$$r = \frac{5\omega^*\rho^*\zeta^*}{42R}\{12(b-a)\sigma^*\cos\gamma + (c-b)[3(\rho^{*2}-4)\cos\gamma + \rho^{*2}\cos 3\gamma]\}$$

Если эллипсоид будет эллипсоидом вращения ( $b = c$ ), то в первом приближении проекция  $p$  вектора мгновенной угловой скорости  $\omega$  на ось симметрии постоянна, конец вектора  $\omega$  лежит в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, и движется вокруг нее по окружности радиуса  $10|a-c|\omega^*\rho^*\zeta^*\sigma^*/(7R)$  с угловой скоростью  $\gamma'$ .

Найдем координаты  $x, y, z$  точки  $Q$  касания эллипсоида и плоскости в зависимости от  $\gamma$ . Для этого сначала из (2.7) определим функцию  $\zeta$  в первом приближении по  $\varepsilon$

$$(4.3) \quad \zeta = \zeta^* - \frac{c-b}{14R} \zeta^* \rho^{*2} (5\rho^{*2} - 5\sigma^* - 3) \cos 2\gamma$$

Функция  $\rho$  вычисляется затем из (2.5).

Из (4.3) и (2.5) следует, что величины  $\zeta$  и  $\rho$  в первом приближении постоянны, когда эллипсоид будет эллипсоидом вращения ( $c = b$ ), либо когда его качение происходит так, что он касается плоскости своим главным сечением  $Gyz$  ( $\zeta^* = 0$ ) либо, наконец, когда между  $\rho^*$  и  $\omega^*$  существует зависимость  $5\rho^{*2} - 5\sigma^* - 3 = 0$ , которая возможна только при одновременном выполнении неравенств  $\omega^* > \sqrt{5g/(2R)}$  и  $\rho^* > \sqrt{3/5}$ .

Теперь из (2.3), (2.4), (2.5), (4.2) и (4.3) находим величины  $x', y', z'$  с точностью до членов первого порядка по  $\varepsilon$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} x' &= \zeta^* + \frac{\zeta^* \rho^{*2}}{42R} [30(b+c-2a)\sigma^* + (c-b)(5\rho^{*2} - \\ &\quad - 15\sigma^* - 51) \cos 2\gamma] \\ y' &= -\rho^* \sin \gamma - \frac{\zeta^{*2} \rho^*}{84R} \{120(a-c)\sigma^* \sin \gamma + \\ &\quad + (c-b)[3(5\rho^{*2} + 5\sigma^* - 37) \sin \gamma + (5\rho^{*2} - 15\sigma^* - 9) \sin 3\gamma]\} \\ z' &= -\rho^* \cos \gamma + \frac{\zeta^{*2} \rho^*}{84R} \{120(b-a)\sigma^* \cos \gamma + \\ &\quad + (c-b)[3(5\rho^{*2} + 5\sigma^* - 37) \cos \gamma - (5\rho^{*2} - 15\sigma^* - 9) \cos 3\gamma]\} \end{aligned}$$

Для получения  $x, y, z$  осталось только воспользоваться формулами (2.2).

На фиг. 3 схематически показан вид следа точки  $Q$  на поверхности эллипсоида. Он заключен между двумя плоскостями, параллельными плоскости  $Gyz$ , расстояние между которыми

$$\Delta x = \rho^{*2} | (c-b) \zeta^* (5\rho^{*2} - 15\sigma^* - 51) | / 21$$

След касается указанных плоскостей при  $\sin 2\gamma = 0$ . Направление движения точки касания  $Q$  по ее следу на эллипсоиде показано на фиг. 3 стрелкой.

5. Период  $T$  по времени построенных периодических движений эллипсоида находится из (2.7). Он будет таким:

$$T = \frac{2\pi}{\omega^*} \left[ 1 - \frac{5\zeta^{*2}\sigma^*}{7R} (b+c-2a) + \dots \right]$$

Из (2.7) находим также угол  $\gamma$  как функцию времени

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma^* + \frac{2\pi}{T} t + \frac{c-b}{28R} [5\rho^{*4} - 15(\sigma^* + 2)\rho^{*2} + \\ &\quad + 2(5\sigma^* + 3)] \cos \frac{4\pi t}{T} + \dots \end{aligned}$$

где  $\gamma^*$  — произвольная постоянная.

6. Найдем след точки касания  $Q$  на плоскости. Пусть  $X, Y$  координаты точки  $Q$  на плоскости, а  $\delta$  — угол между касательной к ее следу на плоскости и осью  $OX$  неподвижной системы координат (или, что то же в силу отсутствия скольжения,  $\delta$  — угол между касательной к следу на эллипсоиде в точке  $Q$  и осью  $OX$ ). Тогда

$$(6.1) \quad dX/ds = \cos \delta, \quad dY/ds = \sin \delta$$

где  $ds$  — элемент длины дуги следа на плоскости (или на эллипсоиде).

Пусть  $v$  и  $w$  — векторы скорости и ускорения точки  $Q$  при ее перемещении вдоль следа на эллипсоиде,  $QP$  — вектор, проведенный из точки  $Q$  в центр кривизны следа,  $k$  — кривизна следа в точке  $Q$ . Тогда

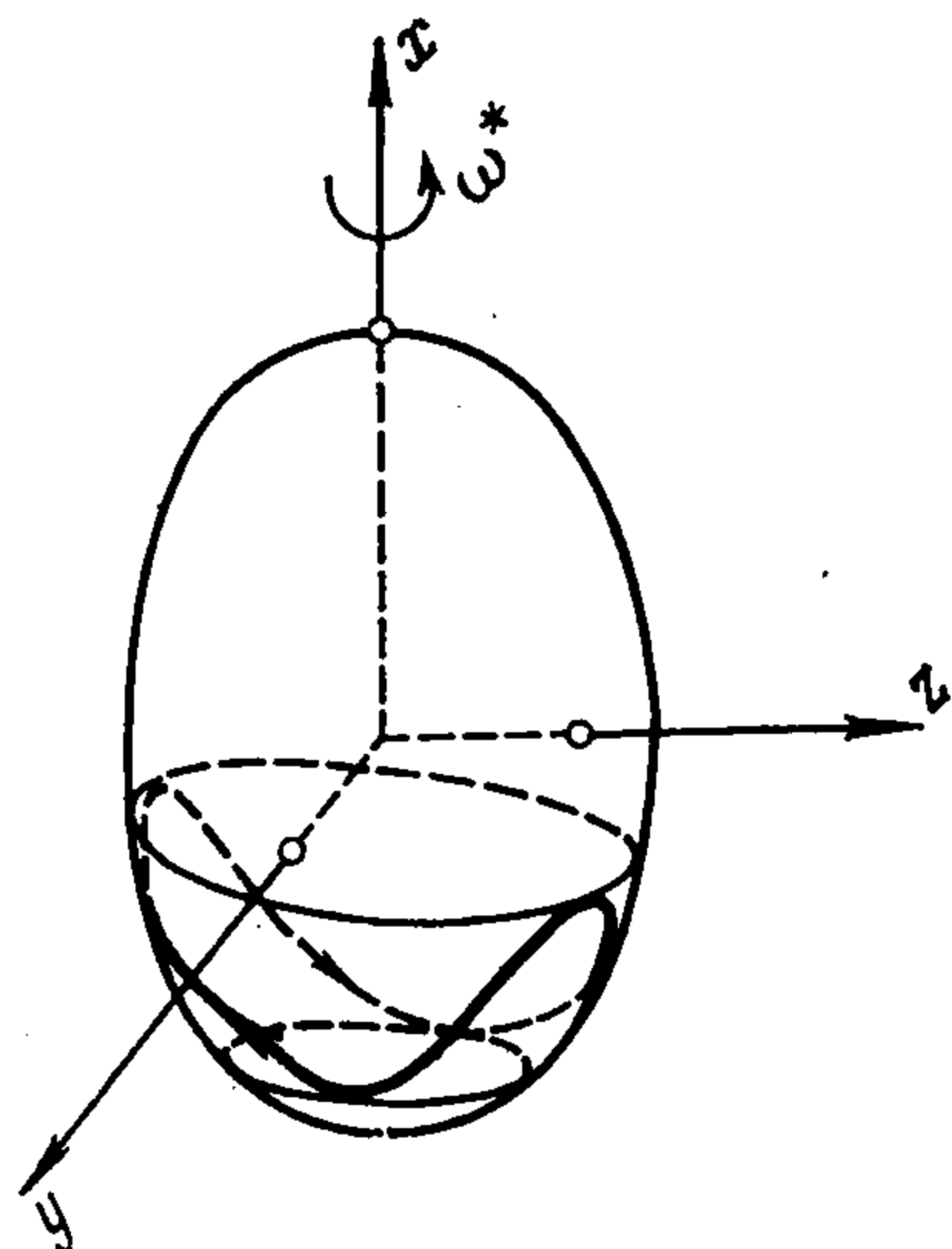
$$(6.2) \quad v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad w = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

$$QP = \frac{v^2}{(v \times w)^2} (v \times w) \times v, \quad k = \frac{w}{v^2} \sin(v, w)$$

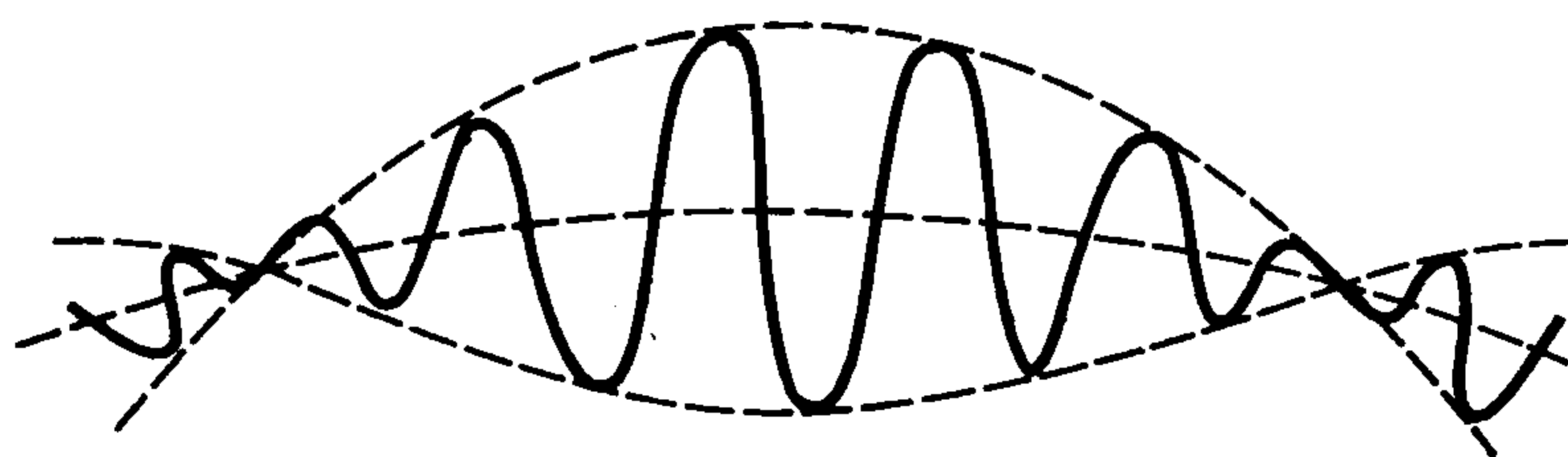
Для нахождения угла  $\delta$  заметим [3], что

$$(6.3) \quad \delta' = \omega_B - k_g v; \quad \omega_B = -(\omega, n), \quad k_g = k \sin(QP, n)$$

где  $\omega_B$  — угловая скорость вращения эллипсоида, а  $k_g$  — геодезическая кривизна следа в точке  $Q$  [18].



Фиг. 3



Фиг. 4

Если перейти к новой независимой переменной  $\gamma$ , то для построенных периодических движений дифференциальное уравнение для  $\delta$  может быть записано в виде

$$(6.4) \quad \frac{d\delta}{d\gamma} = \mu_1 \rho^* R + 2\mu_2 \cos 2\gamma + \dots, \quad \mu_1 = 5 \frac{b+c-2a}{7\rho^* R^2} \zeta^* \sigma^*$$

$$\mu_2 = \frac{c-b}{14R} \zeta^* (5\sigma^* + 24)$$

Замечая, что  $ds/d\gamma$  отличается от  $\rho^* R$  на величины первого порядка малости, и полагая начальное значение  $\delta$  равным нулю, найдем из (6.4)

$$(6.5) \quad \delta = \mu_1 s + \mu_2 \sin(2s/(\rho^* R)) + \dots$$

Оставляя в правых частях уравнений (6.1) члены не выше первого порядка малости, получаем уравнения, решение которых с точностью до членов первого порядка малости включительно будет таким:

$$(6.6) \quad X - X^* = \mu_1^{-1} \sin \mu_1 s + \frac{1}{2} \mu_2 \rho^* R \sin \mu_1 s \cos(2s/(\rho^* R))$$

$$Y - Y^* = -\mu_1^{-1} \cos \mu_1 s - \frac{1}{2} \mu_2 \rho^* R \cos \mu_1 s \cos(2s/(\rho^* R))$$

где  $X^*, Y^*$  — произвольные постоянные. Равенства (6.6) задают в параметрической форме уравнение следа точки касания  $Q$  на плоскости.

Рассмотрим простейшие частные случаи.

Если  $\mu_2 = 0$  (эллипсоид вращения,  $c = b$ ), то следом будет дуга окружности радиуса  $|\mu_1|^{-1}$  с центром в точке  $X^*, Y^*$  (при  $\zeta^* = 0$ , т. е. эллипсоид катится, касаясь плоскости своим главным сечением, следом точки касания на плоскости будет прямая). В случае шара ( $b = c = a$ ), как и следовало ожидать, окружность вырождается в прямую. Направление движения точки  $Q$  по окружности определяется знаком величины  $\zeta^* (b - a)$ . Например, если  $\zeta^* < 0$  (как на фиг. 3), то при  $a > b$  (вытянутый эллипсоид) движение точки касания по окружности ее следа на плоскости происходит против часовой стрелки и по часовой стрелке при  $a < b$  (сплюснутый эллипсоид).

Пусть  $\mu_1 = 0$ . Это возможно, либо когда полуоси эллипсоида связаны соотношением  $b + c = 2a$ , либо когда  $\sigma^* = 0$ , т. е. когда эллипсоид невесом. Последний случай не является математической абстракцией, так как к нему, например, приводится

в рассматриваемом приближении случай, когда  $\sigma^*$  будет величиной не ниже первого порядка малости. Последнее означает, что потенциальная энергия эллипсоида много меньше кинетической энергии его вращения относительно центра масс. При  $\mu_1 = 0$  получим

$$Y = Y^* - 1/2 \mu_2 \rho^* R \cos [2 (X - X^*) / (\rho^* R)]$$

т. е. следом точки касания на плоскости будет синусоида. Для невесомого эллипсоида вращения, близкого к шару, этот результат получен в [3].

В общем случае, когда  $\mu_1 \neq 0$ ,  $\mu_2 \neq 0$ , следом на плоскости будет дуга «испорченной» окружности радиуса  $|\mu_1|^{-1}$ . На окружность наложены колебания с малой, медленно меняющейся амплитудой  $1/2 \mu_2 \rho^* R \sin \mu_1 s$ . В искаженном масштабе след точки касания на плоскости показан на фиг. 4.

7. Определим для найденных периодических движений ориентацию эллипсоида относительно неподвижной системы координат  $OXYZ$ . Углы нутации  $\theta$  и собственного вращения  $\varphi$  вычисляются из (1.2), (2.2), (4.4) с использованием известных выражений направляющих косинусов через углы Эйлера.

$$(7.1) \quad a_{31} = \sin \theta \sin \varphi, \quad a_{32} = \sin \theta \cos \varphi, \quad a_{33} = \cos \theta$$

Проведя необходимые вычисления, получим

$$(7.2) \quad a_{31} = -\zeta^* - \frac{b+c-2a}{14R} \zeta^* \rho^{*2} (10\sigma^* + 7) - \\ - 5 \frac{c-b}{42R} \zeta^* \rho^{*2} (\rho^{*2} - 3\sigma^* - 6) \cos 2\gamma + \dots$$

$$(7.3) \quad a_{32} = \rho^* \sin \gamma + \frac{\rho^*}{28R} \{ -5(c-b)\rho^{*4} - [40(a-c)\sigma^* + \\ + (c-b)(5\sigma^* - 49) - 28(b-a)]\rho^{*2} + 40(a-c)\sigma^* - 28(b-a) + \\ + (c-b)(5\sigma^* - 37) \} \sin \gamma - \frac{c-b}{84R} \rho^* [5\rho^{*4} - 5(3\sigma^* + 7)\rho^{*2} + \\ + 3(5\sigma^* + 3)] \sin 3\gamma + \dots$$

$$(7.4) \quad a_{33} = \rho^* \cos \gamma + \frac{\rho^*}{28R} \{ 5(c-b)\rho^{*4} + [40(b-a)\sigma^* + \\ + (c-b)(5\sigma^* - 49) - 28(a-c)]\rho^{*2} - 40(b-a)\sigma^* + \\ + 28(a-c) - (c-b)(5\sigma^* - 37) \} \cos \gamma - \\ - \frac{c-b}{84R} \rho^* [5\rho^{*4} - 5(3\sigma^* + 7)\rho^{*2} + 3(5\sigma^* + 3)] \cos 3\gamma + \dots$$

Соотношения (7.2) — (7.4) определяют в зависимости от  $\gamma$  ориентацию неизменного направления вертикали относительно эллипсоида. В частности, из (7.2) видно, что угол между вертикалью и осью  $Gx$  изменяется в окрестности своего постоянного значения с частотой, близкой к удвоенной угловой скорости невозмущенного (при  $\varepsilon = 0$ ) движения. Амплитуда колебаний косинуса этого угла равна  $5\rho^{*2} |(c-b)\zeta^* (\rho^{*2} - 3\sigma^* - 6)| / 42R$ . Для эллипсоида вращения ( $c = b$ ) колебания отсутствуют. Отсутствуют они также и в том очевидном случае, когда эллипсоид катится, касаясь плоскости своим главным сечением ( $\zeta^* = 0$ ).

Угол прецессии  $\psi$  можно найти интегрированием кинематических уравнений Эйлера. Но, следуя [3], можно избежать интегрирования. Пусть  $e$  и  $\tau$  — единичные векторы, направленные соответственно вдоль линии узлов и по касательной к следу точки  $Q$  на эллипсоиде. В системе координат  $Gxyz$  имеем

$$(7.5) \quad e^T = (\cos \varphi, -\sin \varphi, 0), \quad \tau^T = (x^*/v, y^*/v, 0)$$

Угол между  $e$  и  $\tau$  равен  $\psi - \delta$ . Поэтому из (7.5) следует, что

$$(7.6) \quad \cos(\psi - \delta) = (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) / v$$

При вычислении угла  $\psi$  с погрешностью порядка  $\varepsilon$  следует положить  $\delta = \mu_1 \rho^* R \gamma$ , а правую часть в (7.6) вычислить при  $\varepsilon = 0$ . Получим

$$(7.7) \quad \cos(\psi - \mu_1 \rho^* R \gamma) = -\zeta^* \cos \gamma / \sqrt{1 - \rho^{*2} \cos^2 \gamma}$$

Отсюда угол  $\psi$  определяется с ошибкой порядка  $\varepsilon$  на интервале изменения  $\gamma$  порядка  $\varepsilon^{-1}$ . Углы  $\theta$  и  $\varphi$  определяются из (7.2) — (7.4) с ошибкой порядка  $\varepsilon^2$  для любых  $\gamma$ .

8. Рассмотрим нормальную реакцию  $N$  и силу трения  $F$ , возникающие в точке касания эллипсоида и плоскости.

Нахождение этих величин — необходимая составная часть решения задачи о движении твердого тела по неподвижной или подвижной поверхности. Условие того, что в каждый момент времени движущееся тело и поверхность имеют одну общую точку, является неудерживающей связью и в моменты времени, когда значение нормальной реакции поверхности проходит через нуль, тело может освободиться от этой связи. В изучаемой задаче эллипсоид может подскочить над плоскостью, и полученные в предположении касания эллипсоида и плоскости движения теряют смысл.

Далее, силу трения необходимо вычислять, так как полученная в предположении отсутствия скольжения она может оказаться настолько большой, что не может быть развита в точке касания тела и поверхности при заданном коэффициенте трения. Это означает, что будет проскальзывание, и результаты, полученные в предположении его отсутствия, теряют реальное механическое содержание.

Реакцию плоскости найдем при помощи теоремы об изменении количества движения

$$(8.1) \quad W_G = -gn + N + F$$

где  $W_G$  — ускорение центра тяжести эллипсоида. При помощи (1.3) (4.2), (7.2) — (7.4) из (8.1) найдем

$$(8.2) \quad N = g + \frac{1}{7}(c - b) \omega^{*2} \rho^{*2} [5(\sigma^* - 1) \rho^{*2} - (5\sigma^* + 9)] \times \\ \times \cos 2\gamma + \dots$$

Затем из (8.1) уже можно вычислить силу трения. Она будет величиной первого порядка малости относительно  $\varepsilon$ .

Из (8.2) видно, что для заданного  $\omega^*$  при достаточно малой величине  $|c - b|$  нормальная реакция  $N$  мало отличается от веса эллипсоида, так что подсакивания эллипсоида над плоскостью не будет. Необходимая же для удержания эллипсоида от проскальзывания сила трения может быть достигнута и при малых коэффициентах трения.

При заданных полуосях эллипсоида величина  $\omega^*$  угловой скорости эллипсоида не должна быть большой, так как, согласно (8.2), при значительных величинах  $\omega^*$  (порядка  $\sqrt{g/\varepsilon R}$ ) нормальная реакция  $N$  может обратиться в нуль.

Для найденных периодических движений эллипсоида величина скорости его центра тяжести

$$(8.3) \quad V_G = \sqrt{(b^2 + c^2)/2} \rho^* \omega^* \left[ 1 - \frac{c - b}{14R} (2\rho^{*2} + 5\sigma^* - 4) \cos 2\gamma + \dots \right]$$

Проекция  $p$  угловой скорости  $\omega$  на ось  $Gx$ , угол между этой осью и вертикалью, скорость центра тяжести, нормальная реакция  $N$  плоскости достигают своих экстремальных значений одновременно (при  $\sin 2\gamma = 0$ ). В эти же моменты времени траектория точки касания  $Q$  на эллипсоиде и плоскости проходит через экстремальные значения.

9. Исследуем устойчивость найденных периодических движений эллипсоида по отношению к возмущениям переменных  $p, q, r$  и  $\zeta$ . Наличие устойчивости означает, что при малых начальных отклонениях величин  $p, q, r$  и  $\zeta$  от их значений в невозмущенном движении, задаваемом формулами (4.2) и (4.3), мало изменяется след точки касания на поверхности эллипсоида, величина вектора мгновенной угловой скорости и его ориентация относительно эллипсоида (следовательно, относительно абсолютного пространства).

Устойчивость исследуем в первом приближении. Величина  $\gamma$  в силу ее монотонного возрастания с ростом  $t$  может быть принята за независимую переменную. Обозначая через  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  возмущения величин  $p, q, r$  и  $\zeta$  соответственно и линеаризуя уравнения (2.7) и (3.1), получаем

$$(9.1) \quad dx/d\gamma = A_1(\gamma) x + \dots \quad (x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4))$$

где элементы матрицы  $A_1$  имеют первый порядок малости по  $\varepsilon$ , являются  $2\pi$ -периодическими по  $\gamma$  и содержат величины  $\rho^*, \omega^*$  как параметры.

Представим фундаментальную матрицу  $X(\gamma)$ , нормированную условием  $X(0) = E$ , где  $E$  — единичная матрица, в виде ряда

$$(9.2) \quad X(\gamma) = E + X_1(\gamma) + \dots$$

где  $X_i(0) = 0$ . Из (9.1) и (9.2) получаем

$$X_1(\gamma) = \int_0^\gamma A_1(t) dt, \quad X(2\pi) = E + 2\pi \langle A_1 \rangle + \dots$$

При  $\varepsilon = 0$  характеристические показатели, очевидно, равны нулю. Поэтому для системы (9.1) характеристические показатели могут быть вычислены как собственные значения матрицы

$$(2\pi)^{-1} \ln X(2\pi) = (2\pi)^{-1} \ln (E + 2\pi \langle A_1 \rangle + \dots) = \langle A_1 \rangle + \dots$$

Следовательно, задача об устойчивости в первом приближении приведена к исследованию устойчивости системы (9.1) с усредненной по  $\gamma$  матрицей  $A_1(\gamma)$ . Вычисления показывают, что усредненная система (9.1) будет

$$(9.3) \quad \begin{aligned} dx_1/d\gamma &= 0, & dx_2/d\gamma &= (a - c) F(\rho^*, \omega^*) x_3 / (14R) \\ dx_3/d\gamma &= (b - a) F(\rho^*, \omega^*) x_2 / (14R), & dx_4/d\gamma &= 0 \end{aligned}$$

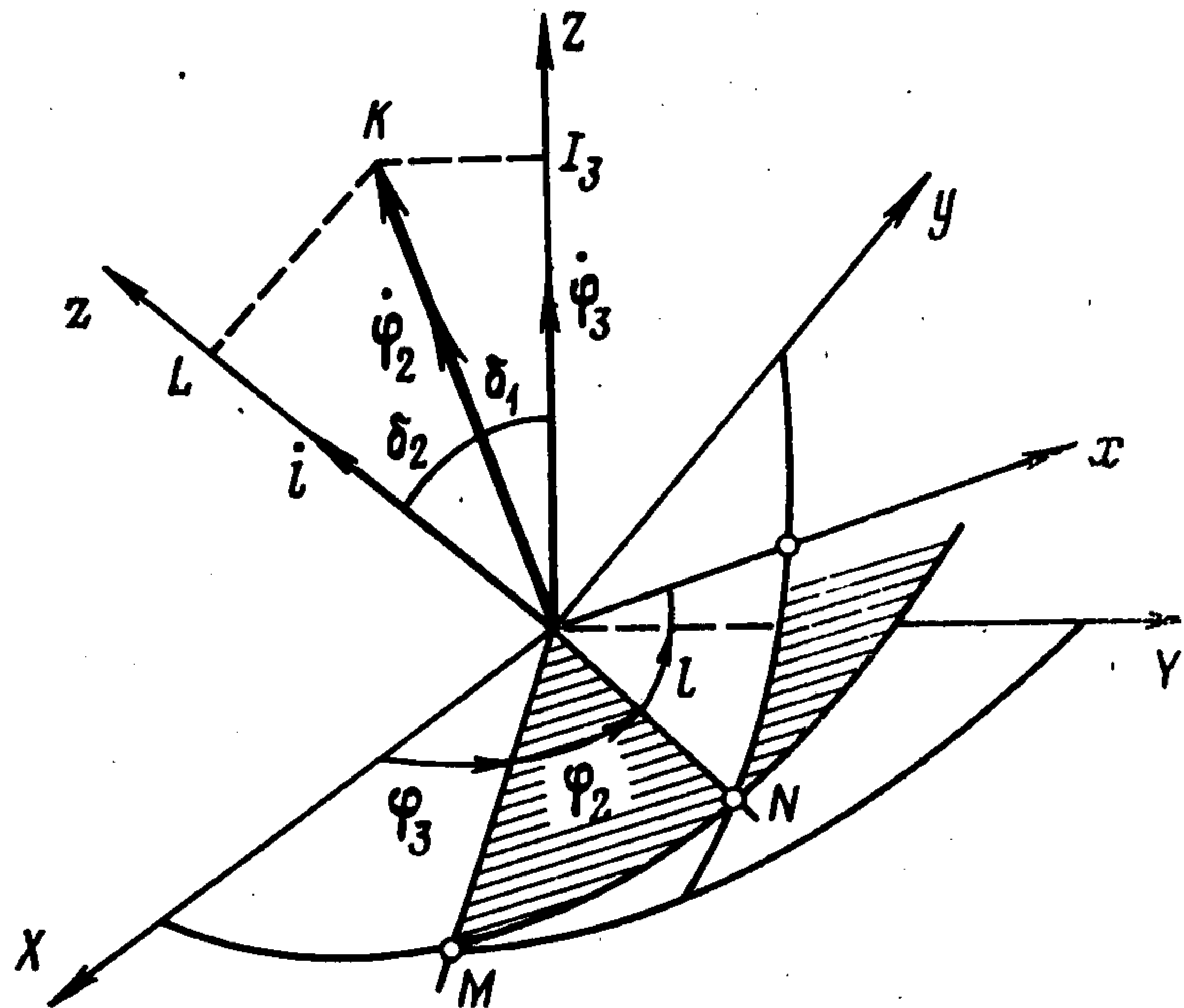
где отброшены члены выше первого порядка относительно  $\varepsilon$ . Функция  $F(\rho^*, \omega^*)$  не обращается в нуль согласно условию существования исследуемого семейства периодических движений. Уравнение (9.3) таково:

$$(9.4) \quad \lambda^2 \left[ \lambda^2 - \frac{(a - c)(b - a)}{196R^2} F^2(\rho^*, \omega^*) \right] = 0$$

При  $(a - c)(b - a) > 0$  уравнение (9.4) имеет корень с положительной вещественной частью, и при  $(a - c)(b - a) < 0$  оно имеет пару чисто мнимых и пару нулевых корней, которым, очевидно, соответствуют простые элементарные делители.

Следовательно, при достаточно малом отличии эллипсоида от шара справедливо следующее утверждение: если в порождающем движении вращение эллипсоида происходит вокруг оси, параллельной его средней по величине полуоси, то исследуемое периодическое движение неустойчиво, если же вращение происходит вокруг оси, параллельной наибольшей или наименьшей полуоси эллипсоида, то имеет место устойчивость в первом приближении (и при пренебрежении в (9.1) членами второго и более высокого порядков относительно  $\varepsilon$ ).

10. Пусть плоскость, по которой движется эллипсоид, будет абсолютно гладкой. Тогда рассматриваемая механическая система будет голономной и иметь пять степеней свободы. Для исследования движения за независимые обобщенные координаты можно принять три угла Эйлера и две координаты  $X_G, Y_G$  центра тяжести эллипсоида относительно неподвижной системы координат  $OXYZ$ . Координата  $Z_G$  выражается через углы Эйлера по формулам (1.7) и (7.1). Среди  $X_G, Y_G, \psi, \theta, \varphi$  первые три будут циклическими. Отсюда следует, что  $X_G, Y_G$  постоянны, т. е. проекция центра эллипсоида на горизонтальную плоскость движется равномерно и прямолинейно; кроме того, импульс  $I_3$ , соответствующий обобщенной координате  $\psi$  также постоянен, что означает неизменность проекции на вертикаль вектора кинетического момента эллипсоида относительно его центра тяжести, т. е.  $I_3 = A a_{31} + B a_{32} + C a_{33} = \text{const.}$



Фиг. 5

Наличие трех циклических координат позволяет при помощи известного алгоритма Рауса привести задачу о движении эллипсоида к рассмотрению системы с двумя степенями свободы. Для исследования движения гамильтониан приведенной системы удобно записать в канонических переменных Андуайе [19, 20]. На фиг. 5  $GXYZ$  — система координат с началом в центре тяжести эллипсоида и осями, параллельными соответствующим осям неподвижной системы координат  $OXYZ$ ,  $K$  — вектор кинетического момента эллипсоида относительно его центра тяжести,  $GMN$  — плоскость, перпендикулярная  $K$ ; она пересекает плоскость  $GXY$  по прямой  $GM$ , а плоскость  $Gxy$  — по прямой  $GN$ . Каноническими переменными будут величины  $L, I_2, I_3, l, \varphi_2, \varphi_3$ . Смысл угловых переменных  $l, \varphi_2, \varphi_3$  ясен из фиг. 5, а соответствующие им импульсы, как нетрудно видеть, таковы:  $L = K \cos \delta_2, I_2 = K, I_3 = K \cos \delta_1$ .

Импульс  $I_2$  — это длина вектора кинетического момента, а  $L$  и  $I_3$  — его проекции на ось  $Gz$  эллипсоида и на вертикаль соответственно.

В предположении, что эллипсоид мало отличается от шара, функция Гамильтона приведенной системы в переменных Андуайе будет такой

$$(10.1) \quad H(L, L_2, l, \varphi_2) = \frac{I_2^2}{2A} + \frac{1}{2A} \left[ \frac{c-a}{R} L^2 + \frac{b-a}{R} (I_2^2 - L^2) \cos^2 l \right] + \\ + g [(b-a) a_{32}^2 + (c-a) a_{33}^2] + \dots \\ a_{32} = \cos \delta_1 \sin \delta_2 \cos l + \sin \delta_1 \cos \delta_2 \cos l \cos \varphi_2 - \\ - \sin \delta_1 \sin l \sin \varphi_2 \\ a_{33} = \cos \delta_1 \cos \delta_2 - \sin \delta_1 \sin \delta_2 \cos \varphi_2 \\ \cos \delta_1 = I_3/I_2, \quad \cos \delta_2 = L/I_2$$

При  $\varepsilon = 0$  движение эллипсоида относительно центра тяжести описывается функцией Гамильтона  $H_0 = I_2^2/2A$  и представляет собой равномер-

ное вращение вокруг неизменного по величине и направлению вектора кинетического момента с угловой скоростью  $\varphi_2^* = I_2/A$ . Принимая это движение за невозмущенное, исследуем возмущенное (при  $\varepsilon \neq 0$ ) движение эллипсоида методом усреднения [21].

В системе канонических дифференциальных уравнений с гамильтонианом (10.1) переменные  $L, I_2, l$  — медленные, а  $\varphi_2$  — быстрая. Для получения решения в первом приближении надо усреднить функцию Гамильтона (10.1) по переменной  $\varphi_2$  и отбросить члены второго и более высоких порядков малости относительно  $\varepsilon$ . Получим, что в первом приближении движение описывается системой уравнений с функцией Гамильтона

$$(10.2) \quad \Gamma = \frac{I_2^2}{2A} + \frac{b+c-2a}{2} g \sin^2 \delta_1 + \\ + \frac{\kappa}{2a} \left[ \frac{c-a}{R} L^2 + \frac{b-a}{R} (I_2^2 - L^2) \cos^2 l \right], \\ \kappa = 1 + \frac{5gA^2}{2I_2^2 R} (2 - 3 \sin^2 \delta_1).$$

Переменные  $L, I_2, l$  в первом приближении изменяются со временем так же, как в движении Эйлера — Пуансо, если в последнем роль времени играет величина  $\tau = \kappa t$ . Вектор кинетического момента в первом приближении постоянен по величине и медленно процессирует вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью  $\partial\Gamma/\partial I_3$ , оставаясь от нее на постоянном угловом расстоянии  $\delta_1 = \arccos(I_3/I_2)$ . Проекция вектора кинетического момента на ось  $Gz$  эллипсоида медленно, со скоростью  $L^* = -\partial\Gamma/\partial l$ , изменяется со временем, что приводит к медленному изменению угла  $\delta_2$  между осью  $Gz$  эллипсоида и вектором кинетического момента; эллипсоид быстро вращается вокруг вектора кинетического момента с медленно меняющейся угловой скоростью  $\varphi_2^* = \partial\Gamma/\partial I_2$ , а вокруг своей оси  $Gz$  — с малой, тоже изменяющейся со временем угловой скоростью  $l^* = \partial\Gamma/\partial L$ . На интервале времени порядка  $\varepsilon^{-1}$  медленные переменные  $L, I_2, l$  определяются первым приближением с ошибкой порядка  $\varepsilon$ , а быстрая переменная  $\varphi_2$  — с ошибкой порядка единицы. При частном выборе начальных данных, для которых величина  $\kappa$  обращается в нуль, помимо  $I_2$  постоянны в первом приближении также и величины  $L$  и  $l$ . В этом случае вектор мгновенной угловой скорости постоянен относительно движущегося эллипсоида (и относительно абсолютного пространства).

Более содержательные результаты можно получить, если в качестве невозмущенного движения принять не движение однородного шара, а более сложное движение, описываемое функцией Гамильтона (10.1), усредненной по быстрой и медленной переменным  $\varphi_2$  и  $l$ .

Функцию Гамильтона (10.1) представим в виде

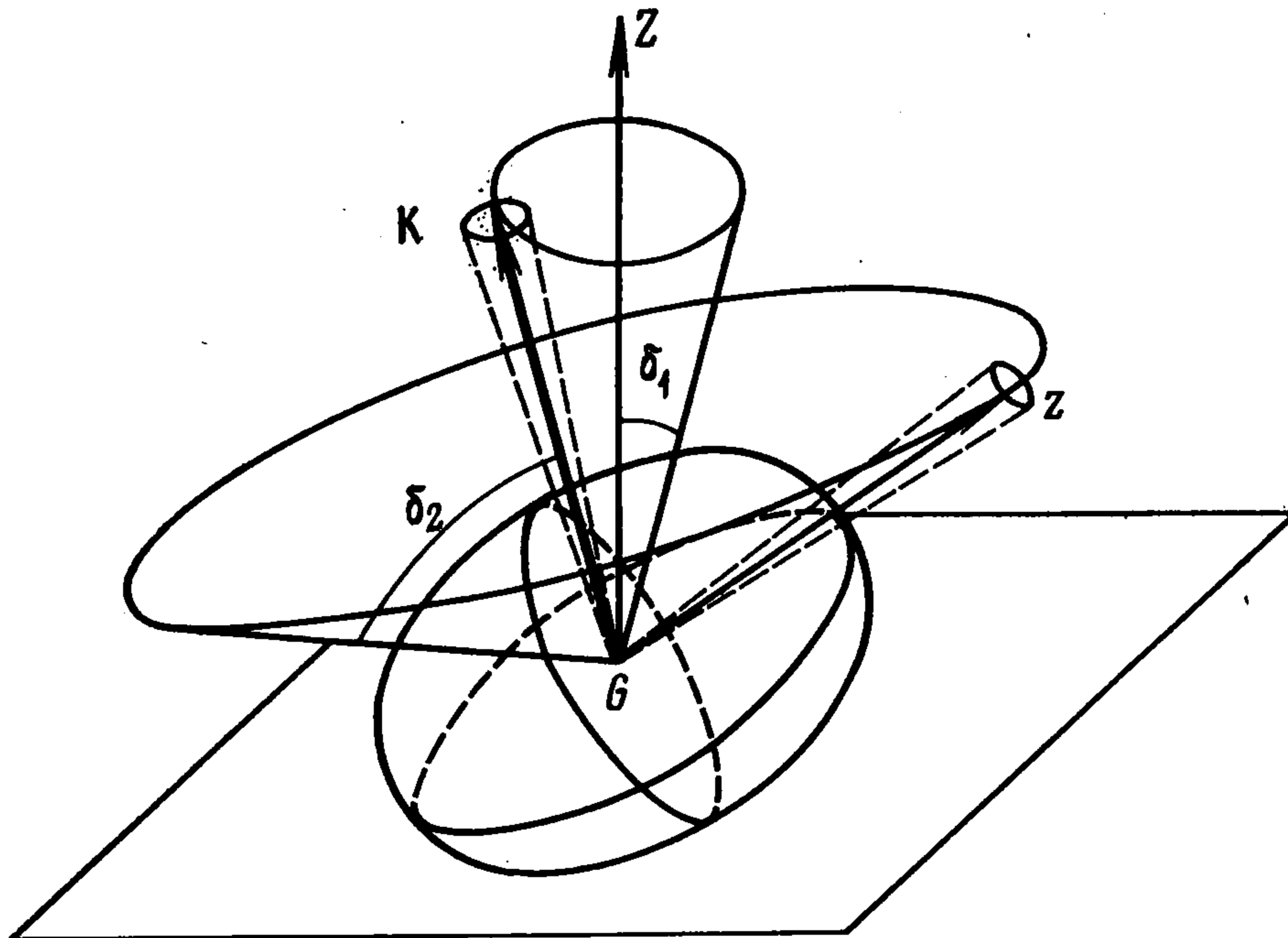
$$(10.3) \quad H = H_0(I_2) + H_1(L, I_2) + H_2(L, I_2, l, \varphi_2) + \dots$$

$$(10.4) \quad H_0 + H_1 = \frac{I_2^2}{2A} + \frac{b+c-2a}{2} g \sin^2 \delta_1 + \\ + \frac{\kappa}{4A} \left[ 2 \frac{c-a}{R} L^2 + \frac{b-a}{R} (I_2^2 - L^2) \right]$$

Функция  $H_2$  в (10.3) имеет первый порядок малости по  $\varepsilon$ , а ее среднее значение по  $\varphi_2$  и  $l$  равно нулю; многоточием обозначены члены выше первого порядка малости.

За невозмущенное движение эллипсоида примем его движение, описываемое функцией Гамильтона  $H_0 + H_1$ . В невозмущенном движении

$$(10.5) \quad L^* = 0, I_2^* = 0 \\ l^* = \partial H_1 / \partial L = \omega_1, \varphi_2^* = I_2/A + \partial H_1 / \partial I_2 = \omega_2$$



Фиг. 6

Величины  $L$  и  $I_2$  в невозмущенном движении постоянны. Учитывая еще неизменность величины  $I_3$  получаем, что в невозмущенном движении углы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  также постоянны. Таким образом, в невозмущенном движении постоянный по длине вектор кинетического момента  $\mathbf{K}$  эллипсоида медленно прецессирует с постоянной угловой скоростью  $\omega_3 = \partial H_1 / \partial I_3$  вокруг вертикали, находясь от нее на постоянном угловом расстоянии  $\delta_1 = \arccos(I_3/I_2)$ . Сам же эллипсоид совершает (при  $\kappa \neq 0$ ) регулярную прецессию вокруг вектора  $\mathbf{K}$ : он вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг своей оси  $Gz$ , которая находится на постоянном угловом расстоянии  $\delta_2 = \arccos(L/I_2)$  от вектора кинетического момента и вращается вокруг него с постоянной угловой скоростью  $\omega_2$ .

Следуя работе [22], покажем устойчивость описанного невозмущенного движения эллипсоида по отношению к переменным  $L$ ,  $I_2$  при малых возмущениях функции Гамильтона (10.4). Для этого, [22], надо убедиться в невырожденности гессиана функции (10.4). Имеем

$$(10.6) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 (H_0 + H_1)}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 (H_0 + H_1)}{\partial L \partial I_2} \\ \frac{\partial^2 (H_0 + H_1)}{\partial I_2 \partial L} & \frac{\partial^2 (H_0 + H_1)}{\partial I_2^2} \end{vmatrix} = \frac{\kappa}{2A^2R} (2c - a - b) + \dots$$

Так как для невозмущенного движения величина  $\kappa$  принята не равной нулю, то определитель (10.6) при достаточно малых  $\varepsilon$  будет отличен от нуля, если полуоси эллипсоида удовлетворяют неравенству

$$(10.7) \quad a + b \neq 2c$$

Тем самым, согласно [22], для достаточно малого отличия эллипсоида от шара при выполнении условия (10.7) доказано, что величины  $L$  и  $I_2$  сколь угодно мало изменяются на бесконечном интервале времени.

Более точно последнее утверждение означает следующее. Если выполнено неравенство (10.7), то для любого  $\mu > 0$  найдется  $\varepsilon^* > 0$ , такое, что при всех  $\varepsilon$  из интервала  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$  для возмущенного движения  $|L(t) - L(0)| < \mu$ ,  $|I_2(t) - I_2(0)| < \mu$  при любых  $t$ .

Это значит, что длина  $K$  вектора кинетического момента и его угол  $\delta_1$  с вертикалью при всех  $t$  остаются вблизи их начальных значений. Вечно остается вблизи своего начального значения и угол  $\delta_2$  между вектором кинетического момента и осью  $Gz$  эллипсоида (фиг. 6).

Частоты  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) тоже будут вечно близки к их начальным значениям. Соответствующие же им углы  $l(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ ,  $\varphi_3(t)$  не будут, вообще говоря, близки их значениям в невозмущенном движении, вычисленным для одних и тех же моментов времени.

Следует подчеркнуть, что исследование в п. 10 проведено в предположении, что эллипсоид все время находится в соприкосновении с плоскостью, по которой он движется. Для заданной начальной угловой скорости при достаточно малом отличии эллипсоида от шара это предположение выполняется, так как из теоремы о движении центра инерции и того, что величина  $z_G''$  сколь угодно мала при достаточно малых  $\varepsilon$ , следует, что нормальная реакция плоскости всегда положительна (и близка к весу эллипсоида). Последнее означает, что эллипсоид во все время движения не подскакивает над плоскостью, а движется касаясь ее.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Routh E. J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London: Macmillan, 1884, 343 p.
2. *Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 112 с.
3. *Воронец П. В.* Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости. Киев: Тип. ун-та св. Владимира, 1903. 152 с.
4. *Appel P.* Traité de Mécanique rationnelle. T. 2. Paris: Gauthier—Villars, 1953. 575 p.— Рус. перев.: М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
5. *Gray A.* A treatise on gyrostatics and rotatio motion. London: Macmillan, 1918. 530 p.
6. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di meccanica razionale. V. 2, pt 2. Bologna: Zanichelli, 1927. 671 p.— Рус. перев.: М.:Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
7. *Муштары Х. М.* О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости.— Матем. сб., 1932, т. 39, № 1—2, с. 105—126.
8. *Неймарк Ю. М., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
9. *Румянцев В. В., Карапетян А. В.* Устойчивость движений неголономных систем.— В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1976, с. 5—42.
10. *Карапетян А. В.* О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на горизонтальной плоскости и их устойчивости.— В кн.: Аннотации докл. 5-го Всес. съезда по теор. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 182.
11. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого гиостата на горизонтальной плоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 11—21.
12. *Карапетян А. В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 418—426.
13. *Карапетян А. В.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 504—511.
14. *Карапетян А. В.* О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 808—814.
15. *Pars L. A.* A treatise on analitical dynamics. London: Heineman, 1965. 641 p.— Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей. М.: Наука, 1971. 635 с.
16. *Cesari L.* Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1959. 271 p.— Рус. перев. М.: Мир, 1964. 477 с.
17. *Hale J. K.* Oscillations in nonlinear systems. New York: McGraw-Hill, 1964. 183 p.— Рус. перев.: М.: Мир, 1966. 230 с.
18. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. 420 с.
19. *Andoyer M. H.* Cours de mecanique c'eleste. Paris: Gauthier-Villars, 1923, v. 1, 440 p.; 1926, v. 2, 454 p.
20. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
21. *Волосов В. М.* Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.— Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 6, с. 3—126.
22. *Barrar R.* A proof of convergence of the Poincaré — von Zeipel procedure in celestial mechanics.— Amer. J. Math., 1966, v. 88, No. 1, p. 206—220.