Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 4, 1982

УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УПРУГОЙ ОБОЛОЧКОЙ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ [1]

Рубановский В. Н.

Рассматривается задача об устойчивости стационарных движений в консервативном поле сил твердого тела с полостью в виде замкнутой тонкой упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. Предполагается, что на тело наложены стационарные голономные связи, допускающие его вращение вокруг некоторой неподвижной в пространстве прямой, а силы, действующие на систему, не дают момента относительно этой прямой. Условия устойчивости получены из решения задачи минимума измененной потенциальной энергии системы W на основе исследования ее второй вариации. Достаточные условия определенной положительности $\delta^2 W$ получены как условия Сильвестра положительной определенности некоторой квадратичной формы от конечного числа переменных. Указан способ построения этой квадратичной формы.

1. Рассмотрим в потенциальном поле сил движение твердого тела с полостью в виде замкнутой тонкой упругой оболочки, частично заполненной жидкостью, силами поверхностного натяжения которой можно пренебречь. Предположим, что на тело наложены стационарные связи, допускающие его вращение вокруг оси ξ_3 инерциальной прямоугольной системы осей координат $O'\xi_1\xi_2\xi_3$, а силы, действующие на систему, не дают момента относительно этой оси. Введем также подвижную прямоугольную систему осей координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой с ортами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ направим по главным центральным осям инерции твердого тела и оболочки в ее недеформированном состоянии. Положение твердого тела относительно системы координат $O'\xi_1\xi_2\xi_3$ будем определять лагранжевыми координатами $q_1, \ldots, q_n$ $(n \leqslant 6)$, при этом q_n — угол поворота тела вокруг оси ξ_3.

Срединную поверхность S оболочки в недеформированном состоянии зададим уравнением [1]

$$\mathbf{M}(\alpha + 2\pi, \beta) = \mathbf{M}(\alpha, \beta) = \sum_{\nu=1}^{3} x_\nu(\alpha, \beta)\,\mathbf{i}_\nu \qquad (0 \leqslant \alpha < 2\pi, \quad \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2) \tag{1.1}$$

где α, β — координаты точки на поверхности. В качестве координатных линий $\alpha = \mathrm{const}$ (β-линии) и $\beta = \mathrm{const}$ (α-линии) возьмем линии кривизны срединной поверхности, при этом предполагаем, что α-линии замкнуты и краям оболочки соответствуют значения $\beta = \beta_1$, $\beta = \beta_2$.

Введем тройку векторов $\mathbf{M}_\alpha$, $\mathbf{M}_\beta$, $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{M}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{M}_\beta = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{AB}(\mathbf{M}_\alpha \times \mathbf{M}_\beta) \tag{1.2}$$

$$\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} \times \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{M}_\beta}{B}, \quad \frac{\mathbf{M}_\beta}{B} \times \mathbf{n} = \frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}, \quad A^2 = \mathbf{M}_\alpha^2, \quad B^2 = \mathbf{M}_\beta^2$$

Относительно трехмерной среды, занятой оболочкой, примем гипотезу Кирхгофа — Лява [1] о сохранении нормального элемента. Тогда области, занимаемые оболочкой в недеформированном и деформированном состоя-

[1] Первая часть доклада на 5 Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата, 27 мая, 1981 г.

ниях, можно задать соответственно уравнениями [1]

$$(1.3)\quad \mathbf{M}^* = \mathbf{M}(\alpha, \beta) + z\mathbf{n}(\alpha, \beta), \quad \mathbf{M}^{*\prime} = \mathbf{M}^*(\alpha, \beta) + \mathbf{U} + z(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega})$$

$$-h \leqslant z \leqslant h$$

$$\mathbf{U}(t, \alpha + 2\pi, \beta) = \mathbf{U}(t, \alpha, \beta) = u(t, \alpha, \beta)\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} + v(t, \alpha, \beta)\frac{\mathbf{M}_\beta}{B} - w(t, \alpha, \beta)\mathbf{n}$$

$$\boldsymbol{\Omega}(t, \alpha, \beta) = \gamma\frac{\mathbf{M}_\beta}{B} - \gamma'\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} + \gamma''\mathbf{n}$$

$$\gamma = -\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1}\right), \quad \gamma' = -\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2}\right)$$

$$\gamma'' = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \beta}(Au) - \frac{\partial}{\partial \alpha}(Bv)\right]$$

Здесь $2h$ — толщина оболочки, U — вектор упругого смещения срединной поверхности, Ω — вектор упругого вращения.

Обозначим через x_ν^*, $x_\nu^{*\prime}$ ($\nu = 1, 2, 3$) координаты точек среды, занимаемой оболочкой в недеформированном и деформированном состояниях; тогда из (1.1) — (1.3) получаем

$$(1.4)\quad x_1^* = x_1(\alpha, \beta) + \frac{z}{AB}(x_{2\alpha}x_{3\beta} - x_{3\alpha}x_{2\beta}), \quad x_1^{*\prime} = x_1^* + w_1$$

$$w_1 = w_1^{(0)} - zw_1^{(1)}, \quad w_1^{(0)} = \frac{x_{1\alpha}}{A}u + \frac{x_{1\beta}}{B}v - n_1 w \quad (1\,2\,3)$$

$$w_1^{(1)} = \frac{x_{1\alpha}}{A}\gamma + \frac{x_{1\beta}}{B}\gamma', \quad n_1 = \frac{1}{AB}(x_{2\alpha}x_{3\beta} - x_{3\alpha}x_{2\beta})$$

где n_1, n_2, n_3 — проекции вектора $\mathbf{n}$ на оси x_1, x_2, x_3.

Предполагаем, что по краям оболочка жестко прикреплена к твердым крышкам с неизменным расстоянием между ними так, что

$$(1.5)\quad u = v = w = 0, \quad \partial w/\partial\beta = 0 \text{ при } \beta = \beta_1,\ \beta = \beta_2,\ 0 \leqslant \alpha < 2\pi$$

Для потенциальной энергии деформации оболочки примем выражение [1]

$$(1.6)\quad \Pi_d = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}\int_S \Pi_*(\varepsilon, \varkappa)\,AB\,d\alpha\,d\beta$$

$$2\Pi_* = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\sigma)\left(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{1}{4}\varepsilon_3^2\right) + \frac{h^2}{3}[(\varkappa_1 + \varkappa_3)^2 - 2(1-\sigma)(\varkappa_1\varkappa_2 - \varkappa_3^2)]$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}v - \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}u - \frac{w}{R_2}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{B}\right)$$

$$\varkappa_1 = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} + \frac{\gamma'}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right), \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{B}\left(\frac{\partial \gamma'}{\partial \beta} + \frac{\gamma}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)$$

$$\varkappa_3 = -\frac{1}{A}\frac{\partial \gamma'}{\partial \alpha} + \frac{\gamma}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}v\right)$$

$$R_1^{-1} = -(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}_{\alpha\alpha})A^{-2}, \quad R_2^{-1} = -(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}_{\beta\beta})B^{-2}$$

Здесь E — модуль упругости, σ ($\sigma < 1$) — коэффициент Пуассона, ε_1, ε_2, ε_3 и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ — компоненты тангенциальной и изгибной деформации, R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности S.

Обозначим через $\Pi_r(q_1, \ldots, q_{n-1})$ потенциальную энергию сил, действующих на твердое тело, а через $U(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — силовую функцию массовых сил, приложенных к частицам оболочки и жидкости. Силовую функцию, преобразованную к переменным x_1, x_2, x_3, обозначим $U(x_1, x_2, x_3, q_1, \ldots, q_{n-1})$. Тогда для потенциальной энергии внешних сил имеем выражение

$$\Pi_e = \Pi_\tau - \rho_1 \int_S U_* (\alpha, \beta; u, v, w, \gamma, \gamma', q_1, \ldots, q_{n-1}) AB\, d\alpha\, d\beta - \tag{1.7}$$

$$- \rho_2 \int_\tau U\, d\tau$$

$$U_* = \int_{-h}^{h} U(x_1{}^* + w_1, x_2{}^* + w_2, x_3{}^* + w_3; q_1, \ldots, q_{n-1}) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)\left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz$$

где ρ_1, ρ_2 — плотности оболочки и жидкости, τ — область, занимаемая жидкостью в текущий момент времени.

Рассматриваемая механическая система допускает интегралы энергии $T + \Pi = \mathrm{const}$ $(\Pi = \Pi_e + \Pi_d)$ и площадей $G_{O'} \cdot \xi_3{}^\circ = k = \mathrm{const}$, где T и $G_{O'}$ — кинетическая энергия и кинетический момент системы относительно точки O', а $\xi_3{}^\circ$ — орт оси ξ_3, проекции которого на оси x_i обозначим $\nu_i = \nu_i\,(q_1, \ldots, q_{n-1})(i = 1, 2, 3)$.

Введем прямоугольную систему осей координат $O'\xi_1'\xi_2'\xi_3$, вращающуюся вокруг оси ξ_3 с угловой скоростью Ω. Обозначим T^* и $G_{O'}{}^*$ кинетическую энергию и кинетический момент системы относительно точки O' в ее движении относительно осей $O'\xi_1'\xi_2'\xi_3$. Тогда интегралы энергии и площадей примут вид

$$T^* + \Omega G_{O'}{}^* \cdot \xi_3{}^\circ + {}^1/_2 J\Omega^2 + \Pi = \mathrm{const}, \quad G_{O'}{}^* \cdot \xi_3{}^\circ + J\Omega = k$$

где J — момент инерции системы относительно оси ξ_3. Величину Ω выберем так, чтобы в любой момент времени выполнялось равенство $G_{O'}{}^* \xi_3{}^\circ = 0$. Тогда $J\Omega = k$ и интеграл энергии запишется в форме $T^* + W = \mathrm{const}$, где

$$W = \frac{k^2}{2J} + \Pi \tag{1.8}$$

— измененная потенциальная энергия системы.

Для J с учетом (1.4) имеем выражение

$$J = \sum_{(123)} \{J_1 \nu_1{}^2 + M[(\nu_2 X_3 - \nu_3 X_2)^2 + 2R^{(1)} x_{1C}]\} + \tag{1.9}$$

$$+ 4\rho_1 h \int_S J_* (\alpha, \beta; u, v, w, \gamma, \gamma'; q_1, \ldots, q_{n-1}) AB\, d\alpha\, d\beta +$$

$$+ \rho_2 \int_\tau (\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2)\, d\tau$$

$$Mx_{iC} = 2\rho_1 h \int_S \left[\left(1 + \frac{h^2}{3R_1R_2}\right) w_i^{(0)} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) h^2 w_i^{(1)}\right] AB\, d\alpha\, d\beta$$

$$2J_* = \left(1 + \frac{h^2}{3R_1R_2}\right) \sum_{(123)} [\nu_1{}^2 (2x_2 w_2^{(0)} + 2x_3 w_3^{(0)} + w_2^{(0)^2} + w_3^{(0)^2}) -$$

$$- 2\nu_2\nu_3 (x_2 w_3^{(0)} + x_3 w_2^{(0)} + w_2^{(0)} w_3^{(0)})] + \frac{1}{3} h^2 \sum_{(123)} [\nu_1{}^2 (w_2^{(1)^2} +$$

$$+ w_3^{(1)^2} - 2n_2 w_2^{(1)} - 2n_3 w_3^{(1)}) + 2\nu_2\nu_3 (x_2 w_3^{(1)} + n_3 w_2^{(1)} - w_2^{(1)} w_3^{(1)})] -$$

$$- \frac{2}{3} h^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \sum_{(123)} [\nu_1{}^2 (x_2 w_2^{(1)} + x_3 w_3^{(1)} -$$

$$- n_2 w_2^{(0)} - n_3 w_3^{(0)} + w_2^{(0)} w_2^{(1)} + w_3^{(0)} w_3^{(1)}) + \nu_2\nu_3 (n_2 w_3^{(0)} +$$

$$+ n_3 w_2^{(0)} - x_2 w_3^{(1)} - x_3 w_2^{(1)} - w_2^{(0)} w_3^{(1)} - w_3^{(0)} w_2^{(1)})]$$

Здесь M, J_1, J_2, J_3 — масса и главные центральные моменты инерции твердого тела и оболочки в ее недеформированном состоянии, $X_i(q_1, \ldots, q_{n-1})$ $(i = 1, 2, 3)$ — проекции на оси x_i радиус-вектора, проведенного из точки O' в точку O, $R^{(i)}$ — проекции на те же оси вектора $\mathbf{R} = \mathbf{X} - \mathbf{v}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{v})$ кратчайшего расстояния от оси ξ_3 до точки O, x_{iC} — координаты центра масс твердого тела и оболочки.

2. Уравнения стационарных движений получим из принципа возможных перемещений, вычислив первую вариацию δW и приравняв ее элементарной работе δA_p на возможных перемещениях сил внешнего $p^{(+)}$ и внутреннего $p^{(-)}$ давлений газа, действующих на оболочку. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial q_j} \equiv \frac{\partial \Pi_e}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\Omega^2\frac{\partial J}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n-1) \tag{2.1}$$

$$\operatorname{grad}\left[U + \frac{1}{2}\Omega^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \frac{p}{\rho_2}\right] = 0 \text{ в } \tau \tag{2.2}$$

$$p = p^{(-)} \text{ на } \Sigma \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Pi_*}{\partial u} - D_\alpha(u) - D_\beta(u) - \frac{(1-\sigma^2)\rho_1}{2Eh}\left(\frac{\partial U_*}{\partial u} - \frac{1}{R_1}\frac{\partial U_*}{\partial \gamma}\right) - \\ - \frac{(1-\sigma^2)\rho_1\Omega^2}{E}\left\{\frac{\partial J_*}{\partial u} - \frac{1}{R_1}\frac{\partial J_*}{\partial\gamma} + \right. \\ \left. + \frac{1}{A}\left[1 + \frac{h^2}{3R_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2}\right)\right]\sum_{(123)} x_{1\alpha}R^{(1)}\right\} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_*}{\partial w} - D_\alpha(w) - D_\beta(w) + D_{\alpha\alpha}(w) + D_{\alpha\beta}(w) + D_{\beta\beta}(w) - \\ - \frac{1}{2}D(U_*) - h\Omega^2\left\{D(J_*) - \sum_{(123)}\left\{\left(1 + \frac{h^2}{3R_1R_2}\right)n_1 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{h^2}{3AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}x_{1\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}x_{1\beta}\right)\right]R^{(1)}\right\}\right\} = \\ = \begin{cases} F(p) & \text{на } S_1 \\ F(p^{(-)}) & \text{на } S_2 \end{cases} \\ D_\lambda(f) = \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(AB\frac{\partial \Pi_*}{\partial f_\lambda}\right), \quad D_{\mu\nu}(f) = \frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\mu\,\partial\nu}\left(AB\frac{\partial\Pi_*}{\partial f_{\mu\nu}}\right) \\ D(V) = \frac{(1-\sigma^2)\rho_1}{Eh}\left\{\frac{\partial V}{\partial w} + \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B\frac{\partial U_*}{\partial\gamma}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(A\frac{\partial U_*}{\partial\gamma'}\right)\right]\right\} \\ F(p) = \frac{1-\sigma^2}{2Eh}\left[p^{(+)}\left(1 + \frac{h}{R_1}\right)\left(1 + \frac{h}{R_2}\right) - p\left(1 - \frac{h}{R_1}\right)\left(1 - \frac{h}{R_2}\right)\right]\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь Σ — свободная поверхность жидкости, S_1, S_2 — части поверхности S, соответствующие смоченной и несмоченной жидкостью частям стенок полости, при этом $S_1 + S_2 = S$, p — гидродинамическое давление.

К уравнениям (2.1) — (2.4) необходимо добавить уравнение, которое получается из первого уравнения в (2.4) в результате замены u, α, A, B, R_1, R_2, γ соответственно на v, β, B, A, R_2, R_1, γ', а также следует присоединить условия (1.5).

Стационарные движения представляют собой равномерные вращения системы как твердого тела вокруг оси ξ_3 с угловой скоростью $\Omega = kJ_0^{-1}$, где J_0 — значение J для стационарного движения.

Интегрируя уравнение (2.2) и используя условие (2.3), находим давление в жидкости и уравнение ее свободной поверхности в стационарном движении

$$p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \rho_2 U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + {}^1/_2\rho_2\Omega^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \rho_2 c' \tag{2.5}$$

$$U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + {}^1/_2\Omega^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) = c' + p^{(-)}/\rho_2 \tag{2.6}$$

Значение постоянной c' определяется количеством жидкости в полости тела. Уравнения (2.4) с учетом (2.5) и (1.5) служат для определения деформации оболочки в стационарном движении. Определив форму свободной поверхности жидкости и деформацию оболочки, из уравнений (2.1) найдем значения $q_1, \ldots, q_{n-1}$ для стационарного движения системы.

3. Рассмотрим некоторое стационарное движение. Для простоты вычислений предполагаем, что в этом движении $q_j = 0$ ($j = 1, \ldots, n-1$) и вся деформируемая часть поверхности полости смачивается жидкостью.

Пусть

$$q_j = 0 \ (j = 1, \ldots, n-1), \quad u = u_0(\alpha, \beta), \ v = v_0(\alpha, \beta), \ w = w_0(\alpha, \beta) \tag{3.1}$$

— частное решение уравнений стационарных движений, для которого жидкость занимает область τ_0, ограниченную свободной поверхностью Σ_0, определяемой уравнением

$$\Phi_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + {}^1/_2\Omega^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) = c_0 \ (c_0 = c_0' + p^{(-)}/\rho_2) \tag{3.2}$$

внутренней поверхностью $S_0^{(-)}$ оболочки и частью Σ_0' смоченной жидкостью поверхности недеформируемых стенок полости. По отношению к поверхности (3.2) жидкость находится с той стороны, для которой $\Phi_0 \geqslant c_0$.

Исследуем устойчивость движения (3.1) (определение устойчивости дано в [2]). Условия устойчивости получим из теоремы В. В. Румянцева [3] как достаточные условия минимума измененной потенциальной энергии W для движения (3.1).

В возмущенном движении положим

$$u = u_0 + u_*, \ v = v_0 + v_*, \ w = w_0 + w_* \tag{3.3}$$

а для q_j сохраним прежние обозначения. Величины $\gamma, \gamma', \varepsilon_i, \varkappa_i, x_{iC}$, соответствующие значениям (3.3), обозначим

$$\begin{gathered} \gamma = \gamma_0 + \gamma_*, \ \gamma' = \gamma_0' + \gamma_*', \ \varepsilon_1 = \varepsilon_{i0} + \varepsilon_{i*} \\ \varkappa_i = \varkappa_{i0} + \varkappa_{i*}, \ x_{iC} = x_{iC}^c + x_{iC}^* \end{gathered} \tag{3.4}$$

где величины с нулевым индексом отвечают движению (3.1).

Из (1.8) получаем выражение для второй вариации

$$\delta^2 W = -{}^1/_2\, \Omega^2 \delta^2 J + \delta^2 \Pi + \Omega^2 J_0^{-1} (\delta J)^2 \tag{3.5}$$

Наряду с поверхностью (3.2) введем двухпараметрическое семейство поверхностей

$$\Phi_1 = U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \frac{k^2}{2(J_0 + \delta J)^2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) = c_0 + \Delta c \tag{3.6}$$

Рассмотрим при некоторых достаточно малых значениях q_j ($j = 1, \ldots, n-1$), u_*, v_*, w_* область τ_1, занимаемую жидкостью, когда ее свободная поверхность принадлежит семейству (3.6), при этом значение Δc определяется из условия равенства объемов областей τ_0 и τ_1.

Вычислим изменение $\Delta W = {}^1/_2\, (\delta^2 W)_{\tau=\tau_1}$ функционала W при переходе системы из невозмущенного положения (3.1) в некоторое достаточно близкое возмущенное положение, когда жидкость занимает область τ_1. Этот переход осуществим в два этапа [4]: 1) смещением в возмущенное положение всей системы как твердого тела; 2) последующей деформацией оболочки путем сообщения ей дополнительных малых упругих перемещений u_*, v_*, w_*, а также деформированием формы жидкости путем наложения на ее граничную поверхность слоя $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_0$, объем которого равен нулю, в форму со свободной поверхностью (3.6), в результате чего жидкость будет занимать область τ_1.

Выражение $(\delta^2 W)_{\tau=\tau_1}$ представим в виде

$$(\delta^2 W)_{\tau=\tau_1} = \delta_1^2 W + \delta_2^2 W, \quad \delta_2^2 W = \delta^2_{2(1)} W + \delta^2_{2(2)} W \tag{3.7}$$

Здесь $\delta_1^2 W$ и $\delta_2^2 W$ — приращения W при переходе в возмущенное положение системы соответственно как твердого тела и при деформации оболочки и наложении на поверхность, ограничивающую жидкость, слоя $\Delta\tau$; $\delta^2_{2(1)} W$ и $\delta^2_{2(2)} W$ — части приращения $\delta_2^2 W$, соответственно не зависящая и зависящая от наличия жидкости.

Аналогично

$$\begin{gathered} \delta J = \delta_1 J + \delta_2 J, \ \delta_2 J = \delta_{2(1)} J + \delta_{2(2)} J \\ \delta^2 J = \delta_1^2 J + \delta_2^2 J, \ \delta_2^2 J = \delta^2_{2(1)} J + \delta^2_{2(2)} J \end{gathered} \tag{3.8}$$

Приращения $\delta^2_{2(1)}W$ и $\delta^2_{2(2)}W$ представим с учетом (3.5), (3.7), (3.8) в виде

$$\delta^2_{2(1)}W = \delta^2_{2(1)}\Pi_d + \delta^2_{2(1)}\Pi_e - \frac{1}{2}\Omega^2\delta^2_{2(1)}J + \Omega^2 J_0^{-1}\left[2\delta_1 J\delta_{2(1)}J + (\delta_{2(1)}J)^2\right] \tag{3.9}$$

$$\delta_{2(2)}W = \delta_{2(2)}\Pi_e - \frac{1}{2}\Omega^2\delta_{2(2)}J + \Omega^2 J_0^{-1}\left[2(\delta_1 J + \delta_{2(1)}J)\,\delta_{2(2)}J + (\delta_{2(2)}J)^2\right] \tag{3.10}$$

Из (1.8) и (1.9) находим

$$\delta_1{}^2 W = \sum_{i,\,j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j, \qquad \delta_1 J = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial J}{\partial q_j}\right)_0 q_j \tag{3.11}$$

Из (1.9) получаем после интегрирования по частям с учетом (1.3) и (1.5)

$$\begin{aligned}\delta_{2(1)}J = 4\rho_1 h\int_S \Bigg\{&\sum{}^{*}\left\{\frac{\partial J_*}{\partial u} - \frac{1}{R_1}\frac{\partial J_*}{\partial \gamma} + \frac{1}{A}\left[1 + \frac{h^2}{3R_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2}\right)\right]\times\right.\\ &\left.\times\sum_{(123)} x_{1\alpha}R^{(1)}\right\}_0 u_* + \left\{\frac{\partial J_*}{\partial w} + \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B\frac{\partial J_*}{\partial\gamma}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(A\frac{\partial J_*}{\partial\gamma'}\right)\right] - \right.\\ &-\sum_{(123)}\left[\left(1 + \frac{h^2}{3R_1R_2}\right)n_1 + \frac{h^2}{3AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\times\right.\\ &\left.\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}x_{1\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}x_{1\beta}\right)\right]R^{(1)}\right\}_0 w_*\Bigg\}AB\,d\alpha\,d\beta\end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь и далее Σ^* — сумма двух однотипных выражений, из которых второе получается из приведенного при замене u, γ, α, A, R_1, R_2 соответственно на v, γ', β, B, R_2, R_1.

Далее, из (1.7), (1.8), (1.4), (3.3) получаем после интегрирования по частям ($\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \gamma'$)

$$\begin{aligned}\delta^2_{2(1)}\Pi_e = -\rho_1\int_S\Bigg\{&2\sum_{j=1}^{n-1}\left[\sum{}^{*}\left(\frac{\partial^2 U_*}{\partial u\,\partial q_j} - \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 U_*}{\partial\gamma\,\partial q_j}\right)_0 u_* + \right.\\ &\left.+\left(\frac{\partial^2 U_*}{\partial w\partial q_j} + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B\frac{\partial^2 U_*}{\partial\gamma\partial q_j}\right) + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A\frac{\partial^2 U_*}{\partial\gamma'\partial q_j}\right)\right)_0 w_*\right]q_j + \\ &+\sum_{(uvw)}\left(\frac{\partial^2 U_*}{\partial u\partial v}\right)_0 u_* v_* + 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{(uvw)}\left(\frac{\partial^2 U_*}{\partial u\partial\gamma_i}\right)_0\gamma_{i*}u_* + \\ &+\sum_{i,\,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 U_*}{\partial\gamma_i\partial\gamma_j}\right)_0\gamma_{i*}\gamma_{j*}\Bigg\}AB\,d\alpha\,d\beta\end{aligned} \tag{3.13}$$

Аналогично из (1.9) находим

$$\begin{aligned}\delta^2_{2(1)}J = 4M\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{(123)}&\left(\frac{\partial R^{(1)}}{\partial q_j}\right)_0 q_j x^*_{1C} + 4\rho_1 h\int_S\Bigg\{2\sum_{j=1}^{n-1}\left[\sum{}^{*}\times\right.\\ &\times\left(\frac{\partial^2 J_*}{\partial u\partial q_j} - \frac{\partial^2 J_*}{\partial\gamma\partial q_j}\right)_0 u_* + \left(\frac{\partial^2 J_*}{\partial w\partial q_j} + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}B\frac{\partial^2 J_*}{\partial\gamma\partial q_j} + \right.\\ &\left.\left.+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial^2 J_*}{\partial\gamma'\partial q_j}\right)_0 w_*\right]q_j + \sum_{(uvw)}\left(\frac{\partial^2 J_*}{\partial u\partial v}\right)_0 u_* v_* + \\ &+2\sum_{i=1}^{2}\sum_{(uvw)}\left(\frac{\partial^2 J_*}{\partial u\partial\gamma_i}\right)_0 u_*\gamma_{i*} + \sum_{i,\,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 J_*}{\partial\gamma_i\partial\gamma_j}\right)_0\gamma_{i*}\gamma_{j*}\Bigg\}AB\,d\alpha\,d\beta\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}Mx^*_{iC} = 2\rho_1 h\int_S\Bigg\{&\sum{}^{*}\left[1 + \frac{h^2}{3R_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2}\right)\right]\frac{x_{i\alpha}}{A}u_* - \\ &-\left[\left(1 + \frac{h^2}{3R_1R_2}\right)n_1 + \frac{h^2}{3AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)x_{i\alpha} + \right.\right.\\ &\left.\left.+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)x_{i\beta}\right)\right]w_*\Bigg\}AB\,d\alpha\,d\beta\end{aligned} \tag{3.15}$$

Из (1.8) и (3.4) получаем

$$\delta^2_{2(1)}\Pi_d = \frac{4Eh}{1-\sigma^2}\int\limits_S \Pi_*(\varepsilon_*, \varkappa_*)\, AB\, d\alpha\, d\beta \tag{3.16}$$

Итак, из (3.11) — (3.16) получаем выражение (3.9) для $\delta^2_{2(1)}W$.

Переходим к вычислению $\delta^2_{2(2)}W$. Выражение (3.10) с учетом (1.7) и (1.9) приводим к виду

$$\delta^2_{2(2)}W = -2\rho_2\int\limits_{\Delta\tau}\left[U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \frac{1}{2}\Omega^2(\xi_1{}^2+\xi_2{}^2)\right]d\tau + \tag{3.17}$$

$$+\Omega^2 J_0^{-1}[2(\delta_1 J + \delta_{2(1)}J)\,\delta_{2(2)}J + (\delta_{2(2)}J)^2]$$

При этом интеграл от функции по области $\Delta\tau$ следует понимать как разность интегралов от этой функции по областям τ_1 и τ_0.

Обозначим через $\Phi(x_1, x_2, x_3, q_j)$ подынтегральную функцию в (3.17), преобразованную к переменным x_1, x_2, x_3. Уравнения (3.2) и (3.6) в тех же переменных примут вид

$$\Phi_0 \equiv \Phi(x_1, x_2, x_3, 0) = c_0, \quad \Phi_1(x_1, x_2, x_3, q_j, \delta J) = c_0 + \Delta c \tag{3.18}$$

Уравнение для Φ_1 с точностью до членов первого порядка малости представим в форме

$$\Phi_1 = \Phi(x_1, x_2, x_3, q_j) - \Omega^2 J_0{}^{-1}(\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2)\,\delta J = c_0 + \Delta c \tag{3.19}$$

Жидкость в областях τ_0 и τ_1 расположена по отношению к поверхностям (3.18) с той стороны, для которой соответственно $\Phi_0 \geqslant c_0$, $\Phi_1 \geqslant c_0 + \Delta c$.

Пусть N_0 — некоторая точка поверхности $\Phi_0 = c_0$, а N — точка пространства (x_1, x_2, x_3), лежащая на перпендикуляре к этой поверхности, проведенном через точку N_0, и достаточно близкая к точке N_0. Обозначим $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}$ радиусы-векторы точек N_0 и N относительно точки O. Тогда

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = -\lambda\,\mathrm{grad}\,\Phi_0 \tag{3.20}$$

где λ — множитель пропорциональности, положительный, если для точки $N: \Phi_0 < c_0$, и отрицательный, если $\Phi_0 > c_0$. Обозначим λ_1 значение λ для поверхности (3.19). С точностью до членов первого порядка малости имеем

$$\lambda_1|\mathrm{grad}\,\Phi_0|_*{}^2 = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_j}\right)_* q_j - \Omega^2 J_0^{-1}(\xi_1{}^2+\xi_2{}^2)_*\,\delta J - \Delta c \tag{3.21}$$

где звездочка означает, что соответствующая величина вычисляется на поверхности $\Phi_0 = c_0$ при $q_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n-1)$.

Рассмотрим теперь точки пространства (x_1, x_2, x_3), лежащие в окрестности внутренней поверхности $S_0{}^{(-)}$ оболочки для невозмущенного положения системы. Обозначим $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}$ радиусы-векторы относительно точки O внутренней поверхности оболочки для невозмущенного и возмущенного положений системы и точки, лежащей вблизи поверхности $S_0{}^{(-)}$. Из (1.3) получаем для них выражения

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{M} + \mathbf{U}_0 - h(\mathbf{n} + \mathbf{n}\times\mathbf{\Omega}_0), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{U}_* - h(\mathbf{n}\times\mathbf{\Omega}_*), \tag{3.22}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + z(\mathbf{n} + \mathbf{n}\times\mathbf{\Omega}_0)$$

Отсюда с учетом (1.4) находим для координат x_1, x_2, x_3 вектора $\mathbf{r}$ выражения

$$x_i = x_i(\alpha, \beta) + w_{i0}{}^{(0)} - (h - z)(n_i - w_{i0}{}^{(1)}) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.23}$$

где $w_{i0}{}^{(0)}$, $w_{i0}{}^{(1)}$ — значения $w_i{}^{(0)}$, $w_i{}^{(1)}$ для невозмущенного движения.

Обозначим z_1 значение z для внутренней поверхности $S^{(-)}$ оболочки в возмущенном положении системы. Из (3.22) и (1.3) находим с точностью до членов первого порядка малости

$$z_1 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{n} + \mathbf{n}\times\mathbf{\Omega}_0) = \mathbf{U}_*\cdot\mathbf{n} = -w_* \tag{3.24}$$

Из условия равенства объемов областей τ_0, τ_1 с точностью до членов первого порядка малости получаем с учетом (3.21) и (3.24) линейное уравнение

$$\int\limits_{\Sigma_0}\left\{\Delta c + \Omega^2 J_0^{-1}(\xi_1{}^2+\xi_2{}^2)_*\,\delta J - \sum_{1=j}^{n-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_j}\right)_* q_j\right\}\frac{dS}{|\mathrm{grad}\,\Phi_0|} - \tag{3.25}$$

$$-\int\limits_S w_*\left(1 - \frac{h}{R_1}\right)\left(1 - \frac{h}{R_2}\right)AB\,d\alpha\,d\beta = 0$$

связывающее Δc и $\delta_{2(2)}J$. Второе подобное уравнение получим вычислением в первом приближении величины

$$\delta_{2(2)}J = \rho_2 \int\limits_{\Delta\tau} (\xi_1^2 + \xi_2^2)\, d\tau = \rho_2 \int\limits_{\Sigma_0} \Big\{\Delta c + \Omega^2 J_0^{-1} (\xi_1^2 + \xi_2^2)\, \delta J - \tag{3.26}$$

$$- \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_j}\right)_* q_j\Big\} \frac{|\xi_1^2 + \xi_2^2|_*}{|\operatorname{grad} \Phi_0|}\, dS - \rho_2 \int\limits_S w_* (\xi_1^2 + \xi_2^2)_0 \times$$

$$\times \left(1 - \frac{h}{R_1}\right)\left(1 - \frac{h}{R_2}\right) AB\, d\alpha\, d\beta$$

Из (3.25), (3.26), учитывая (3.8), (3.11) и (3.12), получаем для Δc и $\delta_{2(2)}J$ выражения вида

$$\Delta c = Q^{(1)}, \quad \delta_{2(2)}J = Q^{(2)} \tag{3.27}$$

$$Q^{(i)} = \sum_{j=1}^{n-1} e_j^{(i)} q_j + \int\limits_S [f^{(i)}(\alpha, \beta)\, u_* + g^{(i)}(\alpha, \beta) v_* + h^{(i)}(\alpha, \beta)\, w_*]\, AB\, d\alpha\, d\beta$$

$$(i = 1, 2)$$

где $e_j^{(i)}$ — определенные постоянные, а $f^{(i)}$, $g^{(i)}$, $h^{(i)}$ — известные функции от α, β.

Вычислим теперь интеграл в (3.17)

$$\int\limits_{\Delta\tau} \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, d\tau = \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma_0} \Big\{[\Delta c + \Omega^2 J_0^{-1} (\xi_1^2 + \xi_2^2)_*\, \delta J]^2 - \tag{3.28}$$

$$- \Big[\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_j}\right)_* q_j\Big]^2 \frac{dS}{|\operatorname{grad} \Phi_0|} + \frac{1}{2} \int\limits_S \Big\{w_*^2 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)_0 (n_i - w_{i0}^{(1)}) -$$

$$- 2w_* \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_j}\right)_0 q_j\Big\} \left(1 - \frac{h}{R_1}\right)\left(1 - \frac{h}{R_2}\right) AB\, d\alpha\, d\beta$$

Из (3.17), (3.28), (3.11), (3.12) и (3.27) следует выражение для $\delta^2_{2(2)}W$. Из полученных результатов имеем для $\delta^2_{2(1)}W$ и $\delta W^2_{2(2)}$ выражения

$$\delta^2_{2(1)}W = \delta^2_{2(1)}\Pi_d + \int\limits_S [2 \sum_{j=1}^{n-1} q_j L_{1j} (\alpha, \beta; u_*, v_*, w_*) +$$

$$+ V_2 (\alpha, \beta; u_*, v_*, \gamma_*, \gamma_*')]\, AB\, d\alpha\, d\beta + \Omega^2 J_0^{-1} I_1^2$$

$$\delta^2_{2(2)}W = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} q_i q_j + \Big[2 \sum_{j=1}^{n-1} q_j L_{2j} (\alpha, \beta; u_*, v_*, w_*) +$$

$$+ D(\alpha, \beta)\, w_*^2\Big]\, AB\, d\alpha\, d\beta - a_1 I_2^2 - 2a_2 I_2 I_3 - a_3 I_3^2 + \Omega^2 J_0^{-1} (2I_1 I_4 + I_4^2)$$

$$I_k = \int\limits_S L_k (\alpha, \beta; u_*, v_*, w_*)\, AB\, d\alpha\, d\beta, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Здесь $L_1, \ldots, L_4, L_{1j}, L_{2j}$ — известные линейные формы от u_*, v_*, w_*, V_2 — известная квадратичная форма от u_*, v_*, w_*, γ_*, γ_*', D — известная функция от α, β; a_{ij} и a_1, a_2, a_3 — определенные постоянные, при этом $a_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$).

Отсюда с учетом (3.7), (3.11) окончательно получаем для $(\delta^2 W)_{\tau=\tau_1}$ выражение

$$(\delta^2 W)_{\tau=\tau_1} = \sum_{j=1}^{n=1} g_{ij} q_i q_j + 2 \sum_{j=1}^{n-1} q_j I_j^{(1)} + \delta^2_{2(1)}\Pi_d + \tag{3.29}$$

$$+ \int\limits_S V^{(2)} AB\, d\alpha\, d\beta + \Omega^2 J_0^{-1} I^2_{(1)} - a_1 I_2^2 - 2a_2 I_2 I_3 - a_3 I_3^2$$

$$g_{ij} = a_{ij} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0, \qquad L_j^{(1)} = L_{1j} + L_{2j}, \quad L_{(1)} = L_1 + L_4,$$

$$V^{(2)} = V_2 + D w_*^2$$

$$I_j^{(1)} = \int\limits_S L_j^{(1)} AB\, d\alpha\, d\beta, \qquad I_{(1)} = \int\limits_S L_{(1)} AB\, d\alpha\, d\beta$$

Для $\delta^2 W$ при переходе системы из невозмущенного положения в возмущенное, достаточно близкое к невозмущенному, когда жидкость занимает произвольную область τ для заданной полости, имеет место при фиксированных q_j ($j = 1, \ldots, n-1$) соотношение [2]

$$\min_{\tau} \delta^2 W = (\delta^2 W)_{\tau=\tau_1} \tag{3.30}$$

4. Пусть в (3.29) квадратичная форма от $q_1, \ldots, q_{n-1}$ положительно-определенная; в случае знакопеременности этой формы невозмущенное движение будет неустойчиво в вековом смысле для недеформируемой оболочки, когда $u = v = w \equiv 0$. Для простоты вычислений будем считать, что $g_{ij} = 0$ ($i \neq j$), и обозначим $g_{ii} = g_i > 0$. Выражение (3.29) представим в форме

$$(\delta^2 W)_{\tau=\tau_1} = (\delta^2 W)_* + \delta^2_{2(1)}\Pi_d + \int_S V^{(2)} AB\, d\alpha\, d\beta - \tag{4.1}$$

$$- \sum_{j=1}^{n-1} g_j^{-1} I_j^{(1)^2} - a_1 I_2^2 - 2a_2 I_2 I_3 - a_3 I_3^2$$

$$(\delta^2 W)_* = \Omega^2 J_0^{-1} I^2_{(1)} + \sum_{j=1}^{n-1} g_j (q_j + g_j^{-1} I_j^{(1)})^2 \geqslant 0$$

Рассмотрим вспомогательную вариационную задачу.

Найти минимум μ функционала

$$F(u, v, w) = \frac{1-\sigma^2}{Eh}\Pi_d \left\{\iint_S [u^2 + v^2 + w^2 + h^2(\gamma^2 + \gamma'^2)]\, AB\, d\alpha\, d\beta\right\}^{-1} \tag{4.2}$$

где Π_d и γ, γ' определены формулами (1.8), (1.9), (1.5) в классе функций $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, $\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$, имеющих непрерывные производные до четвертого порядка по α и β, удовлетворяющие граничным условиям (1.7) и условиям периодичности по α с периодом 2π.

Решение этой задачи приводит к неравенству

$$\delta^2_{2(1)}\Pi_d \geqslant \frac{2\mu Eh}{1-\sigma^2}\int_S [u_*^2 + v_*^2 + w_*^2 + h^2(\gamma_*^2 + \gamma_*'^2)]\, AB\, d\alpha\, d\beta \tag{4.3}$$

Из (3.30), (4.1), (4.3) с использованием неравенства Коши — Буняковского получаем оценку

$$\delta^2 W \geqslant (\delta^2 W)_* + \int_S V_*^{(2)}(\alpha, \beta; u_* v_*, \quad, w_*, \gamma_*, \gamma_*')\, AB\, d\alpha\, d\beta \tag{4.4}$$

$$V_*^{(2)} = V^{(2)} + \frac{2\mu Eh}{1-\sigma^2}[u_*^2 + v_*^2 + w_*^2 + h^2(\gamma_*^2 + \gamma_*'^2)] -$$

$$- S\left[(a_1 + a_2) L_2^2 + (a_2 + a_3) L_3^2 + \sum_{j=1}^{-1} g_j^{-1} L_j^{(1)^2}\right]$$

где S — площадь срединной поверхности оболочки.

Из (4.4) заключаем, что неравенства $g_j > 0$ ($j = 1, \ldots, n-1$) вместе с условиями положительной определенности квадратичной формы $V_*^{(2)}$ относительно величин u_*, v_*, w_*, γ_*, γ_*' — достаточные условия определенной положительности функционала $\delta^2 W$ и по теореме В. В. Румянцева [3] будут достаточными условиями устойчивости стационарного движения (3.1).

Применение развитой методики исследования устойчивости стационарных движений механических систем, содержащих абсолютно твердые, упругие и жидкие звенья, к конкретным задачам дано в [2, 5—7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Гостехиздат, 1953. 544 с.
2. *Рубановский В. Н.* Устойчивость стационарных вращений свободного твердого тела с упругой цилиндрической оболочкой, содержащей жидкость, при движении системы по инерции.— В кн.: Устойчивость движения. Аналитическая механика. Управление движением. М.: Наука, 1981, с. 251—265.
3. *Румянцев В. В.* О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 6, с. 946—957.

4. *Пожарицкий Г. К., Румянцев В. В.* Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 1, с. 16—26.
5. *Рубановский В. Н.* Об устойчивости некоторых движений твердого тела с упругими стержнями и жидкостью.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 1, с. 43—59.
6. *Рубановский В. Н.* Устойчивость относительного равновесия на круговой орбите твердого тела с упругими стержнями, совершающими изгибно-крутильные колебания.— Теоретична и приложна механика, София, 1972, год 3, № 2, с. 18—29.
7. *Рубановский В. Н.* Устойчивость стационарных вращений тяжелого твердого тела с двумя упругими стержнями.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 1, с. 55—64.

Москва

Поступила в редакцию
24.VI.1981