Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 6, 1981

УДК 65—50

ПОСТРОЕНИЕ ЦЕНЫ ИГРЫ В НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ

Ухоботов В. И.

Дается процедура построения максимального u-стабильного моста [1] нестационарной игры с фиксированным временем. Предлагается процедура построения цены игры для двух классов игр с фиксированным временем. Приводятся примеры.

1. Рассмотрим управляемый процесс, уравнения движения которого имеют вид

$$z^{\cdot} = -u + v, \quad z \in R^n, \quad v \in V(t), \quad u \in U(t) \tag{1.1}$$

Задан отрезок $I = [0, p]$ числовой оси. Множества $U(t)$ и $V(t)$ при каждом $t \in I$ являются компактами в R^n, измеримо в смысле Лебега зависят от t на отрезке I [2]. Существует суммируемая на отрезке I функция $A(t) \geqslant 0$, такая, что множества $U(t)$ и $V(t)$ при каждом $t \in I$ содержатся в шаре радиуса $A(t)$ с центром в начале координат.

Заданы замкнутое множество $X \subset R^n$ и непрерывная функция $g: X \to R$, значения которой на множестве X ограничены снизу числом ε_0.

Цель первого игрока, выбирающего управление u,— осуществить включение $z(p) \in X$ и сделать значение $g(z(p))$ как можно меньше. Цель второго игрока противоположна. Игра происходит с дискриминацией второго игрока [3,4]. Для нахождения цены игры будет использован метод, предложенный в работе [3] для стационарных игр.

Пусть заданы множество $Z \subset R^n$ и числа $0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant p$. Обозначим

$$T_t^\tau(Z) = \Big(Z + \int_t^\tau U(r)\,dr\Big) \overset{*}{-} \int_t^\tau V(r)\,dr \tag{1.2}$$

Здесь посредством $\overset{*}{-}$ обозначена геометрическая разность двух множеств [4]. При каждом $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$ рассмотрим множество

$$X(\varepsilon) = \{z \in X : g(z) \leqslant \varepsilon\} \tag{1.3}$$

Строим максимальный u-стабильный мост [1] $W(t, \varepsilon)$, ведущий в момент времени p на множество (1.3). Это значит, что: 1) $W(p, \varepsilon) = X(\varepsilon)$; 2) $T_t^\tau(W(\tau, \varepsilon)) \supset W(t, \varepsilon)$ при всех $0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant p$; 3) если точка $z(0) \in W(0, \varepsilon)$, то существует конечный набор чисел $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = p$, такой, что

$$z(0) \in T_0^{\tau_1}(T_{\tau_1}^{\tau_2}(\ldots T_{\tau_m}^p(X(\varepsilon))\ldots))$$

При каждом $0 \leqslant t \leqslant p$ положим

$$W^1(t, \varepsilon) = T_t^p(X(\varepsilon)), \ldots, W^{k+1}(t, \varepsilon) = \bigcap_{t \leqslant \tau \leqslant p} T_t^\tau(W^k(\tau, \varepsilon)) \tag{1.4}$$

Так же, как это сделано для стационарных игр [5], можно показать, что

(1.5) $$W(t,\varepsilon)=\bigcap_{k\geqslant 1} W^k(t,\varepsilon)$$

Лемма 1.1. Пусть существуют числа $0\leqslant t(\varepsilon)<p$ и $k\geqslant 1$, такие, что $W^k(t,\varepsilon)=W^{k+1}(t,\varepsilon)$ при $t(\varepsilon)\leqslant t\leqslant p$. Тогда $W(t,\varepsilon)=W^k(t,\varepsilon)$ при $t(\varepsilon)\leqslant t\leqslant p$.

Лемма 1.2. Пусть выполнены условия предыдущей леммы с $t(\varepsilon)>0$ и пусть существует последовательность $t_i\to t(\varepsilon)$, $t_i<t(\varepsilon)$, такая, что множества $W^k(t_i,\varepsilon)$ пустые. Тогда $W(t,\varepsilon)=W^k(t,\varepsilon)$ при $t(\varepsilon)\leqslant t\leqslant p$ и множества $W_i(t,\varepsilon)$ пустые при $0\leqslant t\leqslant t(\varepsilon)$.

Доказательство этих лемм проводится с использованием равенств (1.4) и (1.5) [5].

Пусть задано начальное $z(0)=z$. Тогда [3] значение цены $G(z)$ рассматриваемой игры равно

(1.6) $$G(z)=\inf\{\varepsilon\geqslant\varepsilon_0 : z\in W(0,\varepsilon)\}$$

Приведенные общие соображения будут использованы ниже при нахождении цены игры в конкретных классах игр. Отметим, что другой метод, основанный на последовательных процедурах построения цены игры, рассматривался, например, в работах [6–8].

2. Рассмотрим случай, когда ограничения, наложенные на выбор управления u, и плата $g : R^n\to R$ имеют специальный вид, а терминальное множество $X=R^n$.

Заданы векторы $x_1,\ldots x_n$, x_{n+1} из R^n, причем первые из них линейно независимы, а коэффициенты f_i в разложении $x_{n+1}=f_1x_1+\ldots+f_nx_n$ отрицательны. На отрезке $[0,p]$ заданы неотрицательные и непрерывные скалярные функции $a_i(t)$ $(i=1,\ldots,n+1)$. Тогда, обозначая через (x,u) скалярное произведение в R^n, возьмем

(2.1) $$U(t)=\{u\in R^n : (x_i,u)\leqslant a_i(t),\ i=1,\ldots,n+1\}$$

(2.2) $$g(z)=\max_{1\leqslant i\leqslant n+1}(x_i,u)$$

Из ограничений, которые наложены на векторы x_i, следует, что $g(z)\geqslant 0$ для любого $z\in R^n$ и ($|\cdot|$ — длина вектора)

(2.3) $$g(z)>0 \text{ при } |z|>0$$

Отметим некоторые свойства многогранников вида (2.1). Пусть заданы числа $b_1{}^k,\ldots,b_{n+1}{}^k$ $(k=1,2,3)$. Положим

(2.4) $$B^k=\{z\in R^n : (x_i,z)\leqslant b_i{}^k,\ i=1,\ldots,n+1\}\ (k=1,2,3)$$

Лемма 2.1. Многогранник (2.4) не пуст тогда и только тогда, когда

(2.5) $$b^k_{n+1}-\sum_{i=1}^n f_ib_i{}^k\geqslant 0$$

Доказательство. Многогранник (2.4) не пуст тогда и только тогда ([9], стр. 140), когда не существует таких $\lambda_i \geqslant 0$, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i b_i^k = -1$$

Подставляя в первое равенство $x_{n+1} = f_1 x_1 + \ldots + f_n x_n$ и учитывая, что коэффициенты $f_i < 0$, а векторы x_i ($i = 1, \ldots, n$) линейно независимы, получим утверждение леммы.

Лемма 2.2. Пусть выполнено неравенство (2.5.), тогда многогранник (2.4) ограничен.

Доказательство. Из неравенства (2.3) следует, что $\min g(z) = m > 0$, где минимум берется по всем $z \in R^n$, $|z| = 1$. Для произвольного вектора $z \in B^k$ будем иметь $|z| m \leqslant g(z) \leqslant \max(b_i^k)$.

Лемма 2.3. Пусть заданы три непустых многогранника (2.4), причем $b_i^3 = b_i^1 + b_i^2$ для $i = 1, \ldots, n + 1$. Тогда $B^3 = B^1 + B^2$.

Доказательство. Включение $B^1 + B^2 \subset B^3$ следует из определения суммы множеств. Пусть точка $z \in B^3$. Для доказательства включения $z \in B^1 + B^2$ достаточно найти точку $x \in B^1$, такую, чтобы $z - x \in B^2$. Такая точка $x \in B^1$ существует, если совместна следующая система неравенств:

$$(x_i, x) \leqslant b_i^1, \; (-x_i, x) \leqslant b_i^2 - (x_i, z), \; i = 1, \ldots, n + 1 \tag{2.6}$$

Для совместности системы (2.6) необходимо и достаточно ([9], стр. 140), чтобы не существовало таких $\lambda_i \geqslant 0$, $\mu_i \geqslant 0$, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_i b_i^1 + \mu_i b_i^2 - \mu_i (x_i, z)) = -1 \tag{2.7}$$

Возьмем $\lambda_i \geqslant 0$, $\mu_i \geqslant 0$, удовлетворяющие первому равенству в (2.7), и покажем что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i (x_i, z) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_i b_i^1 + \mu_i b_i^2) \tag{2.8}$$

Этим будет доказано, что второе равенство в (2.7) не выполнено. По условию точка z удовлетворяет системе неравенств $(x_i, z) \leqslant b_i^1 + b_i^2$, $i = 1, \ldots, n + 1$. Умножая эти неравенства на λ_i, μ_i, суммируя и учитывая первое равенство в (2.7) получим, что неравенство (2.8) выполнено, если правая часть в (2.8) не меньше хотя бы одного из следующих двух чисел:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i (b_i^1 + b_i^2), \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (b_i^1 + b_i^2)$$

Осталось показать справедливость хотя бы одного из следующих неравенств:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_i - \mu_i) b_i^1 \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} (\mu_i - \lambda_i) b_i^2 \geqslant 0 \tag{2.9}$$

Из первого равенства в (2.7), учитывая разложение вектора x_{n+1}, получим $\lambda_i - \mu_i = (\mu_{n+1} - \lambda_{n+1}) f_i$. Перепишем неравенства (2.9) в эквивалентной форме

$$(\mu_{n+1} - \lambda_{n+1}) \left(\sum_{i=1}^{n} f_i b_i^1 - b_{n+1}^1 \right) \geqslant 0, \quad (\lambda_{n+1} - \mu_{n+1}) \left(\sum_{i=1}^{n} f_i b_i^2 - b_{n+1}^2 \right) \geqslant 0$$

Отсюда и из условия непустоты (2.5) следует, что одно из неравенств (2.9) справедливо.

Из доказанных лемм следует, что при каждом $t \in [0, p]$ множество (2.1) является не пустым выпуклым компактом в R^n. Используя лемму 2.3, можно показать, что при любых $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant p$:

$$\int_{t_1}^{t_2} U(t)\,dt = \left\{z \in R^n : (x_i, z) \leqslant \int_{t_1}^{t_2} a_i(t)\,dt,\ i = 1, \ldots, n+1\right\} \tag{2.10}$$

Лемма 2.4. Пусть B — компакт в R^n, а $b_i = \max(x_i, z)$, где max берется по $z \in B$. Тогда $B^1 \overset{*}{-} B = B^2$ с числами $b_i^2 = b_i^1 - b_i$.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством леммы 2.1 из работы [5].

Перейдем к построению множеств (1.2) и (1.5) в рассматриваемой игре. Из формулы (2.2) следует, что при каждом $\varepsilon \geqslant 0$ множество (1.3) имеет вид

$$X(\varepsilon) = \{z \in R^n:\ (x_i, z) \leqslant \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n+1\} \tag{2.11}$$

Обозначим

$$b_i(t) = \max_v (x_i, v)\,(v \in V(t)), \quad \nu_i(t) = \int_t^p (a_i(\tau) - b_i(\tau))\,d\tau \tag{2.12}$$

Тогда из формулы (1.2), (1.4), используя две предыдущие леммы и равенства (2.10), (2.11), получим

$$W^1(t, \varepsilon) = \{z \in R^n : (x_i, z) \leqslant \varepsilon + \nu_i(t),\ i = 1, \ldots, n+1\} \tag{2.13}$$

Обозначим

$$t(\varepsilon) = \inf\left\{t \geqslant 0 : \varepsilon + \nu_{n+1}(\tau) \geqslant \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon + \nu_i(\tau)) f_i \text{ при } t \leqslant \tau \leqslant p\right\} \tag{2.14}$$

Тогда, как следует из леммы 2.1, при всех $t(\varepsilon) \leqslant t \leqslant p$ множество (2.13) не пусто. Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве равенства (2.13), можно показать, что $T_t^p(X(\varepsilon)) = T_t^\tau(T_\tau^p(X(\varepsilon))$ при $t(\varepsilon) \leqslant t \leqslant \tau \leqslant p$. Отсюда и из (1.4) следует, что $W^2(t, \varepsilon) = W^1(t, \varepsilon)$ при $t(\varepsilon) \leqslant t \leqslant p$.

Пусть $t(\varepsilon) = 0$. Тогда из леммы 1.1 получим, что $W(t, \varepsilon) = W^1(t, \varepsilon)$ при $0 \leqslant t \leqslant p$

Если $t(\varepsilon) > 0$, то из определения числа $t(\varepsilon)$ (2.14), равенства (2.13) и леммы 2.1 следует существование последовательности чисел $t_i \to t(\varepsilon)$, $t_i < t(\varepsilon)$, что множества $W^1(t_i, \varepsilon)$ пустые. В силу леммы 1.2 множество $W(t, \varepsilon)$ пустое при $0 \leqslant t \leqslant t(\varepsilon)$, а при $t(\varepsilon) \leqslant t \leqslant p$ оно совпадает с множеством (2.13).

Значение цены $G(z)$ (1.6) в рассматриваемой игре равняется минимальному из чисел $\varepsilon \geqslant 0$, которое удовлетворяют следующим двум условиям:

$$t(\varepsilon) = 0, \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} ((x_i, z) - \nu_i(0)) \leqslant \varepsilon \tag{2.15}$$

Первое из них означает, что $W(0, \varepsilon) = W^1(0, \varepsilon)$. Второе условие, как следует из (2.13), означает включение $z \in W^1(0, \varepsilon)$.

Пример 2.1. Уравнения движения, описывающие игру, имеют вид

$$x^{\cdot\cdot} = w,\ x \in R^n,\ (x_i, w) \leqslant \delta_i,\ i = 1, \ldots, n+1$$
$$y^{\cdot} = v,\ y \in R^n,\ |v| \leqslant \lambda$$

Задан момент времени $p > 0$. Первый игрок, выбирая управление w, стремится минимизировать величину $\max\,[(x_i, y(p) - x(p))]$, где максимум берется по $i = 1, \ldots, n+1$.

Введем новые переменные: $z = y - x - (p - t)\,x^{\cdot}$, $u = (p - t)\,w$. Получим эквивалентную игру

$$g(z) = \max\,(x_i, z),\quad z^{\cdot} = -u + v,\quad (x_i, u) \leqslant (p - t)\,\delta_i,\ |v| \leqslant \lambda$$

В данном примере функции (2.12) равны

$$b_i(t) = \lambda\,|x_i| = b_i,\ \ \nu_i(t) = 2^{-1}(p - t)^2\delta_i - (p - t)\,b_i$$

Обозначим

$$\delta = \Big(\delta_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} f_i\delta_i\Big)\Big(1 - \sum_{i=1}^{n} f_i\Big)^{-1},\quad b = \Big(b_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} f_i b_i\Big)\Big(1 - \sum_{i=1}^{n} f_i\Big)^{-1}$$

Тогда условия (2.15) для определения цены игры примут вид

$$\varepsilon \geqslant bt - (\delta t^2)/2,\quad 0 \leqslant t \leqslant p$$
$$\varepsilon \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n+1}\,((x_i, z) - (\delta_i p^2)/2 + b_i) = \Phi(z, p)$$

Отсюда определяется цена игры

$$G(z) = \max\,(\Phi(z, p);\ bp - (\delta p^2)/2),\ \ p \leqslant b/\delta$$
$$G(z) = \max\,(\Phi(z, p);\ b^2/(2\delta)),\ \ p > b/\delta$$

3. Рассмотрим случай, когда $V(t) = \alpha(t)S$ и

$$U(t) = \{u \in R^n\colon a_i(t) \leqslant (x_i, u) \leqslant A_i(t),\ i = 1, \ldots, n\} \tag{3.1}$$

Здесь $x_1, \ldots, x_n$ — некоторый базис в R^n, $a_i(t) \leqslant A_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — непрерывные функции на $[0, p]$, S — выпуклый компакт в R^n, содержащий начало координат в качестве внутренней точки, $\alpha(t)$ — непрерывная и неотрицательная скалярная функция, определенная на отрезке $[0, p]$. Плата игры задается с помощью функции Минковского $g(z)$ множества S:

$$g(z) = \inf\,\{\varepsilon > 0\colon\ z \in \varepsilon S\} \Rightarrow X(\varepsilon) = \{z : g(z) \leqslant \varepsilon\} = \varepsilon S \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. Пусть B — выпуклое замкнутое множество в R^n, а ε и δ — неотрицательные числа. Тогда

$$(\varepsilon S + B) \overset{*}{-} \delta S = \begin{cases} (\varepsilon - \delta)\,S + B, & \varepsilon \geqslant \delta \\ B \overset{*}{-} (\delta - \varepsilon)\,S, & \varepsilon < \delta \end{cases}$$

Доказательство леммы можно провести, привлекая понятие опорной функции выпуклого замкнутого множества.

Обозначим

$$p(\varepsilon) = \inf\Big\{t : 0 \leqslant t \leqslant p,\ \varepsilon \geqslant \int_t^p \alpha(\tau)\,d\tau\Big\} \tag{3.3}$$

Тогда, как следует из леммы 3.1 и формул (1.2), (1.4)

$$W^1(t, \varepsilon) = \Big(\varepsilon - \int_t^p \alpha(\tau)\,d\tau\Big)\,S + \int_t^p U(\tau)\,d\tau,\quad p(\varepsilon) \leqslant t \leqslant p \tag{3.4}$$

$$W^1(t, \varepsilon) = \Big(\int_t^p U(\tau)\,d\tau\Big) \overset{*}{-} \int_t^{p(\varepsilon)} \alpha(\tau)\,d\tau S,\quad t \leqslant p(\varepsilon) \tag{3.5}$$

Обозначим $B_i = \max (x_i, s)$, $b_i = \min (x_i, s)$ (максимум и минимум берутся по $s \in S$) и при $0 \leqslant t \leqslant p$ (ε):

(3.6) $$\nu_i (t, \varepsilon) = \int_t^p a_i (\tau) d\tau - b_i \int_t^{p(\varepsilon)} \alpha (\tau) d\tau,$$

$$\mu_i (t, \varepsilon) = \int_t^p A_i (\tau) d\tau - B_i \int_t^{p(\varepsilon)} \alpha (\tau) d\tau$$

Тогда, как показано в [5], множество вида (3.5) задается неравенствами

(3.7) $$W^1 (t, \varepsilon) = \{z \in R^n : \nu_i (t, \varepsilon) \leqslant (x_i, z) \leqslant \mu_i (t, \varepsilon), i = 1, \ldots, n\}$$

Положим

(3.8) $$t (\varepsilon) = \inf \{t : 0 \leqslant t \leqslant p (\varepsilon), \nu_i (\tau, \varepsilon) \leqslant \mu_i (\tau, \varepsilon) \text{ при } t \leqslant \tau \leqslant p (\varepsilon), i = 1, \ldots, n\}$$

Тогда при $t (\varepsilon) \leqslant t \leqslant p$ множества $W^1 (t, \varepsilon)$ непусты, причем при (ε) $\leqslant t \leqslant p (\varepsilon)$ они имеют вид (3.7), а при $p (\varepsilon) \leqslant t \leqslant p$ — вид (3.4). Используя лемму 3.1, а также леммы 2.1 и 2.2 из работы [5], можно показать равенство $W^2 (t, \varepsilon) = W^1 (t, \varepsilon)$ при $t (\varepsilon) \leqslant t \leqslant p$ и, стало быть, $W (t, \varepsilon) = W^1 (t, \varepsilon)$.

Если $t (\varepsilon) > 0$, то, как и в п. 2, получим, что множества $W (t, \varepsilon)$ пустые при $0 \leqslant t \leqslant t (\varepsilon)$.

Цена игры находится из условия (1.6).

Пример 3.1. Рассмотрим пример 2.1. Будем считать, что ограничения на v те же самые, а ограничения на w и плата $g (z)$ имеют вид

$$-\delta \leqslant w_i \leqslant \delta \ (i = 1, \ldots, n), \quad g (z) = |z|$$

Если обозначить $x_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (единица на i-м месте), в качестве S взять евклидов шар единичного радиуса и перейти, как и в примере 2.1, к переменной z, то получим эквивалентную игру

3.9) $$z^{\cdot} = -u + v, \quad -(p - t) \delta \leqslant (x_i, u) \leqslant (p - t) \delta, \quad v \in \lambda S$$

Число (3.3) $p (\varepsilon) = p - \varepsilon/\lambda$ при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \lambda p$ и $p (\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon \geqslant \lambda p$. Стало быть, для $\varepsilon \geqslant \lambda p$ множество $W (0, \varepsilon)$ задается правой частью равенства (3.4) при $t = 0$.

Если обозначить $Q = \{z \in R^n : -1 \leqslant (x_i, z) \leqslant 1, \ i = 1, \ldots, n\}$, то, как следует из (3.9)

(3.10) $$U (t) = (p - t) \delta Q, \quad \int_t^p U (\tau) d\tau = 2^{-1} \delta p^2 Q$$

Следовательно

(3.11) $$W (0, \varepsilon) = (\varepsilon - \lambda p) S + 2^{-1} \delta p^2 Q, \quad \varepsilon \geqslant \lambda p$$

Пусть $\varepsilon < \lambda p$. Тогда функции (3.6) имеют вид

(3.12) $$\mu_i (t, \varepsilon) = -\nu_i (t, \varepsilon) = 2^{-1} \delta (p - t)^2 - \lambda (p - t) + \varepsilon, \quad 0 \leqslant t \leqslant p - \varepsilon/\lambda$$

Из (3.8) и (3.12) следует, что условие непустоты множества $W (0, \varepsilon)$ или, что то же самое, условие $t (\varepsilon) = 0$, примет вид

(3.13) $$2^{-1} \delta \tau^2 - \lambda \tau + \varepsilon \geqslant 0, \quad \varepsilon/\lambda \leqslant \tau \leqslant p \quad (\varepsilon < \lambda p)$$

Исследовав неравенство (3.13), можно условие непустоты множества $W(0, \varepsilon)$ при $\varepsilon < \lambda p$ записать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&-2^{-1}\delta p^2 + \lambda p \leqslant \varepsilon, \quad && p \leqslant \lambda/\delta \\
&\lambda^2/(2\delta) \leqslant \varepsilon, && p > \lambda/\delta
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

При этих условиях, полагая в (3.7) $t = 0$ и учитывая (3.12) и равенство $W(0, \varepsilon) = W^1(0, \varepsilon)$, получим

$$
W(0, \varepsilon) = (2^{-1}\delta p^2 - \lambda p + \varepsilon)\, Q \tag{3.15}
$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\varepsilon, p) = \varepsilon - \lambda p, \; f(\varepsilon, p) = 2^{-1}\delta p^2, \; \varepsilon \geqslant \lambda p \\
&\varphi(\varepsilon, p) = 0, \; f(\varepsilon, p) = 2^{-1}\delta p^2 - \lambda p + \varepsilon, \; \varepsilon < \lambda p
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Множество $W(0, \varepsilon)$ является непустым тогда и только тогда, когда выполнены неравенства (3.14). В этом случае, как следует из (3.11), (3.15) и (3.16)

$$
W(0, \varepsilon) = \varphi(\varepsilon, p)\, S + f(\varepsilon, p)\, Q \tag{3.17}
$$

Опорная функция множества Q равна $|\psi_1| + \ldots + |\psi_n|$, где $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$. Поэтому точка z принадлежит множеству (3.17) тогда и только тогда ([9], стр. 24), когда

$$
\max\left((z, \psi) - f(\varepsilon, p) \sum_{i=1}^{n} |\psi_i|\right) \leqslant \varphi(\varepsilon, p) \tag{3.18}
$$

Здесь максимум берется по всем векторам $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ единичной евклидовой длины. Стало быть, значение $G(z)$ цены игры для начальной позиции z определяется как наименьшее из чисел $\varepsilon \geqslant 0$, удовлетворяющих неравенствам (3.14) и (3.18).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Hermes H.* The Generalized Differential Equation $x^\cdot \in R\,(t, x)$.— Adv. Math., 1970, v. 4, № 2, p. 149—169.
3. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем.— Кибернетика, 1970, № 2, с. 54—63.
4. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. 2.— Докл. АН СССР 1967, т. 175, № 4, с. 764—766.
5. *Ухоботов В. И.* К построению стабильных мостов.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 5, с. 934—938.
6. *Ченцов А. Г.* О структуре одной игровой задачи сближения.— Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 6, с. 1272—1275.
7. *Ченцов А. Г.* Об игровой задаче сближения в заданный момент времени.— Матем. сб., 1976, т. 99, № 3, с. 394—420.
8. *Чистяков С. В.* К решению игровых задач преследования.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 825—832.
9. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980, с. 319.

Челябинск

Поступила в редакцию
20.XI.1980