Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 6, 1981

УДК 530.1

ПЕРЕХОД ОТ МЕХАНИКИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ К НЬЮТОНИАНСКОЙ МЕХАНИКЕ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ

Черный Л. Т.

Рассматривается общий метод перехода от механики специальной теории относительности к ньютонианской механике и различные релятивистские эффекты.

1. Базовое вариационное уравнение. Пусть x^k — система координат наблюдателя в пространстве Минковского, а $g_{ij}(x^k)$ — компоненты метрического тензора в этой системе. В дальнейшем латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4, а греческие индексы — значения 1, 2, 3. В системе координат x^k, соответствующей инерциальной синхронной системе отсчета наблюдателя (инерциальные системы отсчета везде ниже предполагаются также синхронными), имеем

$$x^4 = ct, \quad g_{ij} = \left\| \begin{array}{c|c} -h_{\alpha\beta} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right\| \tag{1.1}$$

где c — скорость света в вакууме, t — время наблюдателя, а величины $h_{\alpha\beta}$, вообще говоря, зависят от пространственных координат x^γ, которые, однако, в специальной теории относительности всегда можно выбрать так, что глобально во всем пространстве будем иметь $h_{\alpha\beta} = 1$ при $\alpha = \beta$ и $h_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$. (В общей теории относительности это тоже можно достигнуть локально или вдоль любой заданной кривой. Соответствующие системы координат называются координатами Ферми.)

Описание движения сплошной среды связано с введением, наряду с системой координат наблюдателя x^k, сопутствующей для среды системы координат ξ^j. Последние при $j = 1, 2, 3$ индивидуализируют бесконечно малые частицы сплошной среды и называются лагранжевыми координатами. Величина ξ^4 является параметром точек на мировых линиях сплошной среды, для которых $\xi^\alpha = \mathrm{const}$. Связь между системами координат x^k и ξ^j устанавливается законом движения среды

$$x^k = x^k(\xi^j) \tag{1.2}$$

Четырехмерная скорость среды $\mathbf{u}$ определяется как единичный вектор, касательный к мировым линиям среды. В системе координат наблюдателя он имеет компоненты

$$u^k = \left(\frac{dx^k}{ds}\right)_{\xi^\gamma} = \frac{dx^k}{cd\tau} = \left\| \frac{v^\alpha}{(c^2 - v^2)^{1/2}} \,\middle|\, \frac{c}{(c^2 - v^2)^{1/2}} \right\| \tag{1.3}$$

$$u_k = g_{ki}u^i = \left\| \frac{-v_\alpha}{(c^2 - v^2)^{1/2}} \,\middle|\, \frac{c}{(c^2 - v^2)^{1/2}} \right\|$$

$$ds = [g_{ij}(dx^i)_{\xi\gamma}(dx^j)_{\xi\gamma}]^{1/2} = (c^2 - v^2)^{1/2}(dt)_{\xi\gamma} \equiv c\,d\tau$$
$$v^\alpha = (dx^\alpha/dt)_{\xi\gamma}, \quad v^2 = h_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta, \quad v_\alpha = h_{\alpha\beta}v^\beta$$

Здесь ds — элемент дуги мировой линии среды, $d\tau$ — приращение собственного времени, v^α — компоненты трехмерной скорости в инерциальной системе отсчета наблюдателя.

Конструирование моделей сплошных сред всегда связано с принятием некоторых постулатов. Наиболее рационально исходить из базового вариационного уравнения [1—3]:

$$\delta\frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\Lambda\,dV_4 + \delta W^* + \delta W = 0 \tag{1.4}$$
$$dV_4 = \sqrt{-g}\,d^4x = \sqrt{-g^\wedge}\,d^4\xi = dV_3^\wedge\,ds, \quad -\Lambda\,dV_3^\wedge = dE$$
$$g = |g_{ij}|, \quad g^\wedge = |g_{ij}^\wedge|, \quad d^4x = dx^1\ldots dx^4, \quad d^4\xi = d\xi^1\ldots d\xi^4$$

Здесь Λ — лагранжиан сплошной среды, δW^* — задаваемый функционал, учитывающий необратимые процессы и внешние воздействия, δW — функционал, определяемый из уравнения (1.4) и представляющий собой поверхностный интеграл по границе области V_4 в пространстве Минковского и еще возможно по двум сторонам поверхностей сильных разрывов внутри V_4, $dV_3^\wedge$ — трехмерный объем индивидуальной бесконечно малой частицы сплошной среды в сопутствующей системе координат, dE — внутренняя энергия индивидуальной бесконечно малой частицы сплошной среды с объемом $dV_3^\wedge$. Вариации в уравнении (1.4) берутся при $\xi^j =$ $=$ const. Величины, относящиеся к сопутствующей системе координат, отмечаются символом $\wedge$.

Различные модели сплошных сред фиксируются выбором лагранжиана и функционала δW^*. Например, полагая

$$\Lambda = -\rho c^2 - \rho U(S, \gamma_{ij}^\wedge, \mathring{\gamma}_{ij}^\wedge, K_B^\wedge) \tag{1.5}$$
$$\delta W^* = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}(\rho T\delta S - Q_i\delta x^i)\,dV_4, \quad Q_i u^i = \frac{dQ^{(e)}}{c\,d\tau}$$
$$\left(\gamma_{ij}^\wedge = u_i^\wedge u_j^\wedge - g_{ij}^\wedge, \quad u_i^\wedge = \frac{g_{i4}^\wedge}{\sqrt{g_{44}^\wedge}} = g_{ij}^\wedge\frac{d\xi^j}{ds}, \quad g_{ij}^\wedge = g_{kr}x_i{}^k x_j{}^r\right.$$
$$\left.x_i{}^k = \frac{\partial x^k}{\partial\xi^i}, \quad \rho = \rho^\circ\sqrt{\frac{\gamma^\circ}{\gamma^\wedge}}, \quad \gamma^\wedge = |\gamma_{\alpha\beta}^\wedge|, \quad \gamma^\circ = |\mathring{\gamma}_{\alpha\beta}^\wedge|\right)$$

где все параметры $K_B^\wedge$ — известные неварьируемые функции от лагранжевых координат ξ^α, получим модель идеально упругого тела, в котором, по определению, процессы обратимы. Введенные аргументы лагранжиана и функционала δW^* имеют следующий физический смысл: ρ — плотность массы покоя среды, S — удельная энтропия среды, T — абсолютная температура, Q_i — компоненты плотности 4-силы, $dQ^{(e)}$ — плотность внешнего объемного притока тепла к среде за время $d\tau = ds/c$ (для более сложных моделей сред величина $Q_i u^i$ может также включать в себя внешний приток энергии нетепловой природы), $g_{ij}^\wedge$, $u_i^\wedge$ — компоненты метрического тензора и 4-скорости среды в сопутствующей системе координат,$\hat{}_{ij}$ — компоненты пространственного метрического тензора, удовлетворяющие соотношениям

$$u^i\gamma_{ij} = u^j\gamma_{ij} = 0, \quad \gamma_{4j}{}^* = \gamma_{i4}{}^* = 0, \quad \gamma_{4j}^{\wedge} = \gamma_{i4}^{\wedge} = 0 \tag{1.6}$$

и определяющие относительно сопутствующей системы координат длину dl бесконечно малых индивидуализированных отрезков сплошной среды, отвечающих бесконечно малым приращениям лагранжевых координат $d\xi^\alpha$:

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}^{\wedge}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta = \gamma_{ij}^{\wedge}\, d\xi^i\, d\xi^j$$

ρ° — плотность массы покоя среды в «начальном» состоянии, $\overset{\circ}{\gamma}{}_{ij}^{\wedge}$ — компоненты пространственного метрического тензора в начальном состоянии, удовлетворяющие соотношениям

$$u^i\gamma_{ij}{}^\circ = u^j\gamma_{ij}{}^\circ = 0, \quad \overset{\circ}{\gamma}{}_{4j}^{*} = \overset{\circ}{\gamma}{}_{i4}^{*} = 0, \quad \overset{\circ}{\gamma}{}_{4j}^{\wedge} = \overset{\circ}{\gamma}{}_{i4}^{\wedge} = 0 \tag{1.7}$$

и определяющие значение dl° в начальном состоянии

$$dl^{\circ 2} = \overset{\circ}{\gamma}{}_{\alpha\beta}^{\wedge}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta = \overset{\circ}{\gamma}{}_{ij}^{\wedge}\, d\xi^i\, d\xi^j \tag{1.8}$$

Величины ρ°, $\overset{\circ}{\gamma}{}_{ij}^{\wedge}$ по определению являются известными неварьируемыми функциями от ξ^α, т. е. принадлежат к параметрам типа $K_B^{\wedge}$. Величины со звездочкой относятся к собственной для рассматриваемой точки среды $\xi^\alpha{}_*$ в рассматриваемый момент времени t_* системе отсчета. Так называется инерциальная система отсчета наблюдателя, относительно которой $v^{*\nu}(\xi_*{}^\alpha, t_*) = 0$ и, следовательно, $u^{*i}(\xi_*{}^\alpha, t_*) = \delta_4{}^i$. (В пространстве Минковского каждой собственной системе отсчета соответствует некоторая собственная система координат.)

Определенная пятым равенством в скобках в (1.5) плотность среды ρ удовлетворяет релятивистскому уравнению неразрывности

$$\nabla_i \rho u^i = 0$$

Из соотношений (1.6), (1.7) вытекает, что при преобразованиях сопутствующей системы координат ξ^i:

$$\xi'^\alpha = \xi'^\alpha(\xi^\beta), \quad \xi'^4 = \xi'^4(\xi^\beta, \xi^4) \tag{1.9}$$

величины $\gamma_{\alpha\beta}^{\wedge}$, $\overset{\circ}{\gamma}{}_{\alpha\beta}^{\wedge}$ ведут себя как ковариантные компоненты трехмерных тензоров, например

$$\gamma_{\alpha\beta}^{\wedge\prime} = \frac{\partial\xi^i}{\partial\xi'^\alpha}\frac{\partial\xi^j}{\partial\xi'^\beta}\gamma_{ij}^{\wedge} = \frac{\partial\xi^\delta}{\partial\xi'^\alpha}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial\xi'^\beta}\gamma_{\delta\nu}^{\wedge}$$

и аналогичные соотношения справедливы для величин $\overset{\circ}{\gamma}{}_{\alpha\beta}^{\wedge}$, причем

$$\gamma_{i4}^{\wedge\prime} = \gamma_{4j}^{\wedge\prime} = 0, \quad \overset{\circ}{\gamma}{}_{i4}^{\wedge\prime} = \overset{\circ}{\gamma}{}_{4j}^{\wedge\prime} = 0$$

Поэтому отношение $\gamma^\circ/\gamma^\wedge$ и плотность ρ инвариантны относительно преобразований (1.9) сопутствующей системы координат. Лагранжиан по определению — четырехмерный скаляр, поэтому функция U из выражения (1.5) для Λ также должна быть инвариантна относительно преобразований (1.9). Отсюда следует, что для изотропного тела, когда все $K_B^{\wedge}$ — скаляры, функция U может зависеть от компонент $\gamma_{ij}^{\wedge}$, $\overset{\circ}{\gamma}{}_{ij}^{\wedge}$ только через такие их комбинации, которые сами являются инвариантами относительно преобразований (1.9). Учитывая соотношения (1.6), (1.7), можно показать, что число таких независимых комбинаций равно трем. Например, в качестве них можно взять следующие скаляры:

$$I_1{}^\circ = \gamma^{\circ\wedge\alpha\beta}\varepsilon_{\widehat{\alpha\beta}} \equiv \gamma^{\circ\wedge ij}\varepsilon_{\widehat{ij}}$$
$$I_2{}^\circ = \gamma^{\circ\wedge\alpha\delta}\gamma^{\circ\wedge\beta\gamma}\varepsilon_{\widehat{\alpha\beta}}\varepsilon_{\widehat{\gamma\delta}} \equiv \gamma^{\circ\wedge ik}\gamma^{\circ\wedge jr}\varepsilon_{\widehat{ij}}\varepsilon_{\widehat{rk}}$$
$$I_3{}^\circ = \gamma^{\circ\wedge\alpha\zeta}\gamma^{\circ\wedge\beta\gamma}\gamma^{\circ\wedge\delta\varepsilon}\varepsilon_{\widehat{\alpha\beta}}\varepsilon_{\widehat{\gamma\delta}}\varepsilon_{\widehat{\varepsilon\zeta}} \equiv \gamma^{\circ\wedge in}\gamma^{\circ\wedge jr}\gamma^{\circ\wedge km}\varepsilon_{\widehat{ij}}\varepsilon_{\widehat{rk}}\varepsilon_{\widehat{mn}}$$
$$\left(\varepsilon_{\widehat{ij}} \equiv \frac{1}{2}(\gamma_{\widehat{ij}} - \mathring{\gamma}_{ij}^{\wedge}),\ \gamma^{\circ\wedge\alpha\beta} \equiv \frac{1}{\gamma^\circ}\frac{\partial\gamma^\circ}{\partial\mathring{\gamma}_{\beta\alpha}^{\wedge}}\right)$$

Значения четырехмерных компонент $\gamma^{\circ\wedge i4} = \gamma^{\circ\wedge 4i}$ не влияют на инварианты $I_\alpha{}^\circ$, так как $\varepsilon_{\widehat{i4}} = \varepsilon_{\widehat{4i}} = 0$. Дальше для определенности можно принять, что в рассматриваемой фиксированной сопутствующей системе координат $\gamma^{\circ\wedge i4} = \gamma^{\circ\wedge 4i} = 0$. Величины $\gamma^{\circ\wedge\alpha\beta}$ ведут себя при преобразованиях (1.9) сопутствующей системы координат ξ^i как контравариантные компоненты трехмерного тензора

$$\gamma^{\circ\wedge'\alpha\beta} = \frac{\partial\xi'^\alpha}{\partial\xi^i}\frac{\partial\xi'^\beta}{\partial\xi^j}\gamma^{\circ\wedge ij} = \frac{\partial\xi'^\alpha}{\partial\xi^\delta}\frac{\partial\xi'^\beta}{\partial\xi^\gamma}\gamma^{\circ\wedge\delta\gamma}$$

2. Уравнения Эйлера и условия на разрывах. Выберем в качестве независимых определяющих параметров функции x^i (ξ^j), S (ξ^j). На основании приведенных выше определений величин $\gamma_{\widehat{ij}}$, $\mathring{\gamma}_{ij}^{\wedge}$, ρ, $K_{\widehat{B}}$, dV_4 и теории вариаций, развитой в [3], имеем

$$\delta\gamma_{\widehat{ij}} = -\gamma_{\widehat{q(i}}\gamma_{\widehat{j)p}}\xi_r{}^q\xi_k{}^p\nabla^k\delta x^r, \quad \delta\rho = \rho\gamma_{ij}\nabla^j\delta x^i \tag{2.1}$$
$$\delta\, dV_4 = (\nabla_i\delta x^i)\, dV_4, \quad \delta\mathring{\gamma}_{ij}^{\wedge} = 0, \quad \delta K_{\widehat{B}} = 0$$
$$\delta x^{\wedge q} = \xi_i{}^q\delta x^i, \quad \xi_i{}^q \equiv \partial\xi^q/\partial x^i$$

Проведем теперь в уравнении (1.4) варьирование с учетом формул (2.1). В результате получим соотношение

$$\int\limits_{V_4}\left[(\nabla^j T_{ij} - Q_i)\,\delta x^i + \rho\left(T - \frac{\partial U}{\partial S}\right)\delta S - \nabla^j(T_{ij}\delta x^i)\right]dV_4 + \delta W = 0 \tag{2.2}$$
$$T_{ij} = \rho(c^2 + U)\,u_i u_j - p_{ij}, \quad p_{ij} = \xi_i{}^k\xi_j{}^r p_{\widehat{kr}}, \quad p_{\widehat{ij}} = 2\rho\frac{\partial U}{\partial\gamma_{\widehat{\alpha\beta}}}\gamma_{\widehat{\alpha i}}\gamma_{\widehat{\beta j}}$$

Отсюда, ввиду произвольности вариаций δx^i, δS и определения функционала δW, найдем уравнения Эйлера и выражение для функционала δW:

$$\nabla^j T_{ij} = Q_i, \quad \frac{\partial U}{\partial S} = T, \quad \delta W = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial V_4 + \Sigma_\pm} T_{ij}\delta x^i n^j\, d\Sigma \tag{2.3}$$

Здесь $\Sigma_\pm$ — две стороны трехмерной поверхности сильного разрыва, лежащей внутри области V_4, $d\Sigma$ — элемент трехмерного объема поверхности $\partial V_4 + \Sigma_\pm$, n^j — компоненты 4-вектора внешней нормали к этой поверхности. Задавая значения функционала δW при $\delta x^i = 0$ на границе ∂V_4, можно найти условия на поверхности сильного разрыва. Например, при отсутствии внешних воздействий имеем $\delta W = 0$ и, следовательно, для вариаций δx^i, непрерывных на разрыве, из выражения (2.3) для функционала δW получим

$$(T_{ij})_+ n^j = (T_{ij})_- n^j, \quad n^j \equiv n_+{}^j = -n_-{}^j$$

Первое уравнение (2.3) представляет собой уравнение энергии — импульса идеально упругого тела. Компоненты T_{ij} являются компонентами полного тензора энергии — импульса, а компоненты p_{ij} представляют собой компоненты четырехмерного тензора внутренних напряжений. Уравнения (2.3) сохраняют свой вид и в сопутствующей системе координат, если у всех тензорных компонент поставить символ $\wedge$.

Из определения (2.2) величин $p_{ij}^{\wedge}$, p_{ij} вытекают соотношения

$$p_{\alpha\beta}^{\wedge} = 2\rho \frac{\partial U}{\partial \gamma_{\gamma\delta}^{\wedge}} \gamma_{\gamma\alpha}^{\wedge} \gamma_{\delta\beta}^{\wedge}, \quad p_{i4}^{\wedge} = p_{4i}^{\wedge} = 0, \quad u^k p_{ik} = 0 \tag{2.4}$$

Подставляя в последнее равенство (2.4) выражения (1.3) для компонент u^k, найдем

$$p_{\alpha 4} = -\frac{v^\beta}{c} p_{\alpha\beta}, \quad p_{44} = -\frac{v^\beta}{c} p_{4\beta} = \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} p_{\alpha\beta} \tag{2.5}$$

В инерциальной системе отсчета наблюдателя первое уравнение (2.3) с учетом выражения (2.2) для компонент T_{ij} принимает вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho (c^2 + U) u_k u_4 - p_{k4}\right] - \nabla_{(h)}^{\beta} \left[\rho (c^2 + U) u_k u_\beta - p_{k\beta}\right] = Q_k \tag{2.6}$$

где $\nabla_{(h)}^{\beta}$ — контравариантная производная в трехмерном пространстве с компонентами метрического тензора $h_{\alpha\beta}$. Подставляя в уравнение (2.6) выражения (1.3) для u_k и выражения (2.5) для p_{k4}, найдем при $k = \alpha$ и $k = 4$ уравнения импульсов и уравнение энергии:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho (c^2 + U) \frac{v_\alpha}{c^2 - v^2} - p_{\alpha\beta} \frac{v^\beta}{c^2}\right] + \\ &+ \nabla_{(h)}^{\beta} \left[\rho (c^2 + U) \frac{v_\alpha v_\beta}{c^2 - v^2} - p_{\alpha\beta}\right] = h_{\alpha\beta} Q^\beta \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho (c^2 + U) \frac{c^2}{c^2 - v^2} - p_{\alpha\beta} \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2}\right] + \\ &+ \nabla_{(h)}^{\beta} \left[\rho (c^2 + U) \frac{v_\beta c^2}{c^2 - v^2} - p_{\alpha\beta} v^\alpha\right] = c Q_4 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь согласно соотношениям (2.2), (2.4)

$$p_{\alpha\beta} = p_{ij}^{\wedge} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^\beta} = p_{\gamma\delta}^{\wedge} \left(\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\alpha}\right)_t \left(\frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\beta}\right)_t, \quad p_{\gamma\delta}^{\wedge} = 2\rho \frac{\partial U}{\partial \gamma_{\alpha\beta}^{\wedge}} \gamma_{\alpha\gamma}^{\wedge} \gamma_{\beta\delta}^{\wedge}$$

Запишем еще в трехмерной форме уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{(c^2 - v^2)^{1/2}} + \nabla_\alpha \frac{\rho v^\alpha}{(c^2 - v^2)^{1/2}} = 0 \tag{2.8}$$

Если в данный момент времени для рассматриваемой бесконечно малой частицы сплошной среды система отсчета наблюдателя является собственной, то уравнения (2.8), (2.7) существенно упрощаются:

(2.9) $$\frac{\partial\rho}{\partial t^*}+\rho\nabla^*_{(h)\alpha}v^{*\alpha}=0$$

(2.10) $$\left[\rho\left(1+\frac{U}{c^2}\right)h^*_{\alpha\beta}-\frac{1}{c^2}p^*_{\alpha\beta}\right]\frac{\partial v^{*\beta}}{\partial t^*}=\nabla^{*\beta}_{(h)}p^*_{\alpha\beta}+h^*_{\alpha\beta}Q^{*\beta}$$

(2.11) $$\rho\frac{\partial U}{\partial t^*}=p^*_{\alpha\beta}\nabla^{*\beta}_{(h)}v^{*\alpha}+cQ_4{}^*,\quad cQ_4{}^*=cQ_iu^i=\frac{dQ^{(e)}}{d\tau}=\frac{dQ^{(e)}}{dt^*}$$

Здесь

(2.12) $$p^*_{\alpha\beta}=2\rho\frac{\partial U}{\partial\gamma^\wedge_{\gamma\delta}}\left(\frac{\partial x^{*\mu}}{\partial\xi^\gamma}\right)_{t^*}\left(\frac{\partial x^{*\nu}}{\partial\xi^\delta}\right)_{t^*}h^*_{\mu\alpha}h^*_{\nu\beta},\quad p_{i4}{}^*=p_{4i}{}^*=0$$

$$\gamma^\wedge_{\alpha\beta}=h^*_{\gamma\delta}\left(\frac{\partial x^{*\gamma}}{\partial\xi^\alpha}\right)_{t^*}\left(\frac{\partial x^{*\delta}}{\partial\xi^\beta}\right)_{t^*},\quad\gamma^*_{\alpha\beta}=h^*_{\alpha\beta}$$

$$T_{\alpha\beta}{}^*=-p_{\alpha\beta}{}^*,\quad T_{\alpha4}{}^*=T_{4\alpha}{}^*=0,\quad T_{44}{}^*=\rho\,(c^2+U)$$

Задача установления законов движения в произвольных заданных системах отсчета наблюдателя по известным законам в собственной системе отсчета является задачей теории навигации. Переход к произвольной инерциальной системе отсчета наблюдателя от собственной системы отсчета, в которой в рассматриваемой точке $g_{ij}{}^*=g_{ij}$ осуществляется с помощью преобразований Лоренца. В результате в произвольной инерциальной системе отсчета наблюдателя релятивистские уравнения неразрывности и движения для модели идеально упругого тела можно записать в виде

$$\nabla_j(\rho d_i{}^ju^{*i})=0,\quad\nabla^j(b_i{}^kb_j{}^rT^*_{kr})=b_i{}^kQ_k{}^*$$

Здесь $d_i{}^j$ — компоненты матрицы преобразования, связывающего между собой базис $э_j$ системы координат наблюдателя и базис $э_i{}^*$ указанной собственной системы координат

$$э_i{}^*=d_i{}^jэ_j$$

а $b_i{}^k$ — компоненты матрицы, обратной к $\|d_i{}^j\|$. В случае, когда базисы $э_i{}^*$, $э_j$ ортонормированные и их пространственные векторы $э_\alpha{}^*$, $э_\beta$ одинаково ориентированы в трехмерном физическом пространстве, компоненты $d_i{}^j$ имеют вид, указанный в [4].

3. Переход к ньютонианской механике. Уравнения (2.9) — (2.11) отличаются только слагаемыми с коэффициентами c^{-2} от уравнений модели идеально упругого тела в ньютонианской механике, записанных в собственной системе отсчета. Если $U=0$ (это равенство имеет место, например, для пыли), то $p_{\alpha\beta}=0$ и указанные слагаемые отсутствуют. В этом случае уравнения релятивистской механики и уравнения ньютонианской механики в собственной системе отсчета совпадают. Однако в произвольных инерциальных системах отсчета они различаются, так как первые получаются в результате навигационного пересчета при помощи преобразования Лоренца, а вторые — как решение навигационной задачи с применением преобразования Галилея (см. ссылку выше на стр. 973 на работу Л. И. Ткачева). При этом уравнения релятивистской и ньютонианской механики, записанные в произвольных инерциальных системах отсчета, оказываются инвариантными соответственно относительно преобразования Лоренца или Галилея. Если $U \neq 0$, то уравнения (2.9) — (2.11) с учетом слагаемых с коэффициентами c^{-2} также могут рассматриваться в рамках ньютонианской механики как записанные в собственной системе отсчета законы, определяющие движение некоторого идеально упругого тела с усложненными свойствами. В этом случае для получения соответствующих законов движения в произвольной инерциальной системе отсчета надо решить навигационную задачу с использованием преобразования Галилея. В результате получим уравнения, инвариантные относительно преобразования Галилея (при выводе уравнения (3.3) из соотношения (2.11) необходимо учитывать также соотношения (2.9) и (2.10))

$$\partial\rho_{(h)}/\partial t + \nabla_{(h)\alpha}\rho_{(h)}v^{\alpha} = 0 \tag{3.1}$$

$$\rho_{(h)}\frac{dv_{\alpha}}{dt} + \frac{1}{c^2}\left(\rho_{(h)}U_{(h)}h_{\alpha\beta} - p_{(h)\alpha\beta}\right)\frac{dv^{\beta}}{dt} = \nabla^{\beta}_{(h)}p_{(h)\alpha\beta} + Q_{(h)\alpha} \tag{3.2}$$

$$\rho_{(h)}\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + U_{(h)}\right) + \frac{1}{c^2}\left(\rho_{(h)}U_{(h)}h_{\alpha\beta} - p_{(h)\alpha\beta}\right)v^{\alpha}\frac{dv^{\beta}}{dt} = \tag{3.3}$$

$$= \nabla^{\beta}_{(h)}\left(p_{(h)\alpha\beta}v^{\alpha}\right) + \frac{dQ^{(e)}}{dt} + Q_{(h)\alpha}v^{\alpha}$$

Здесь

$$\rho_{(h)} = \rho^{\circ}\sqrt{\frac{\gamma^{\circ}}{h^{\wedge}}}, \quad U_{(h)} = U\big|_{\overset{\wedge}{\gamma}_{\alpha\beta}=\hat{h}_{\alpha\beta}}, \quad Q_{(h)\alpha} = h_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{*\nu}}Q^{*\nu}$$

$$\hat{h}_{\alpha\beta} = h_{\gamma\delta}\left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial\xi^{\alpha}}\right)_t\left(\frac{\partial x^{\delta}}{\partial\xi^{\beta}}\right)_t, \quad h^{\wedge} = |\hat{h}_{\alpha\beta}|$$

$$p_{(h)\alpha\beta} = 2\rho_{(h)}\frac{\partial U_{(h)}}{\partial\hat{h}_{\gamma\delta}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\xi^{\gamma}}\right)_t\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\xi^{\delta}}\right)_t h_{\mu\alpha}h_{\nu\beta}$$

Если система координат наблюдателя x^i совпадает с собственной системой x^{*i}, то на основании равенств (2.12) имеем

$$\hat{h}_{\alpha\beta}\big|_{x^i=x^{*i}} = \overset{\wedge}{\gamma}_{\alpha\beta}, \quad \rho_{(h)}\big|_{x^i=x^{*i}} = \rho, \quad U_{(h)}\big|_{x^i=x^{*i}} = U,$$

$$p_{(h)\alpha\beta}\big|_{x^i=x^{*i}} = \overset{*}{p}_{\alpha\beta}$$

и, следовательно, уравнения (3.1) — (3.3), действительно, в собственной системе отсчета совпадают с уравнениями (2.9) — (2.11).

Уравнения (3.1) — (3.3), очевидно, можно использовать для описания в рамках ньютонианской механики движения сплошной среды в случае, когда относительно применяемой системы отсчета наблюдателя выполняется условие

$$\varepsilon^2 \equiv \max\left[\frac{v^2}{c^2}, \frac{vx_0}{c^2t_0}\right] \ll 1$$

в котором x_0, t_0 — характерные значения расстояния и времени. При этом преобразование Лоренца после пренебрежения членами $\lesssim\varepsilon^2$ сводится к преобразованию Галилея и, следовательно, уравнения (3.1) — (3.3) отличаются от релятивистских уравнений (2.8), (2.7) членами $\lesssim\varepsilon^2$. Присутствие в уравнениях (3.2), (3.3) слагаемых с коэффициентами c^{-2} означает, что для полного перехода к уравнениям модели идеально упругого тела ньютонианской механики кинематического условия $\varepsilon^2 \ll 1$ не-достаточно, а необходимы еще ограничения динамического характера, обеспечивающие малость указанных слагаемых. При выполнении же только условия $\varepsilon^2 \ll 1$ учет в уравнениях (3.2), (3.3) слагаемых с коэффициентами c^{-2} может оказаться существенным и в рамках ньютонианской механики, что приводит к модели идеально упругого тела с усложненными свойствами, обусловленными внутренними, т. е. присутствующими и в собственной системе отсчета, релятивистскими эффектами.

Уравнения (3.2), (3.3) также можно получить из вариационного уравнения (1.4), записанного в трехмерном виде (в инерциальной синхронной системе отсчета)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_3} \Lambda_{(h)} dV_3 \, dt + \delta W^* + \delta W = 0 \tag{3.4}$$

$$dV_3 = \sqrt{h} dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{h^\wedge} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

$$\Lambda_{(h)} = -\rho_{(h)} c^2 - \rho_{(h)} U_{(h)} (S, h_{\alpha\beta}^\wedge, \overset{\circ}{\gamma}{}_{\alpha\beta}^\wedge, K_B^\wedge)$$

$$\delta W^* = \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_3} \Big[\rho_{(h)} T \delta S + (Q_{(h)\beta} - \rho_{\alpha\beta} a^\alpha) \delta x^\beta +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{h^\wedge}} \frac{d}{dt} (\sqrt{h^\wedge} \rho_{\alpha\beta} v^\alpha \delta x^\beta) \Big] dV_3 \, dt$$

$$\rho_{\alpha\beta} \equiv \rho_{(h)} \left(1 + \frac{U_{(h)}}{c^2}\right) h_{\alpha\beta} - \frac{1}{c^2} p_{(h)\alpha\beta}, \quad a^\alpha \equiv \frac{dv^\alpha}{dt}$$

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \frac{dQ^{(e)}}{dt}$$

В уравнении (3.4) вариация δ берется при постоянных значениях ξ^α и i. Если $U_{(h)} \equiv 0$ или $c = \infty$, то

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho_{(h)} h_{\alpha\beta}$$

и, следовательно

$$\delta W^* \equiv \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_3} [\rho_{(h)} T \delta S + Q_{(h)\beta} \delta x^\beta] \, dV_3 \, dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_3} \rho_{(h)} \frac{v^2}{2} dV_3 \, dt$$

При переходе к произвольной заданной неинерциальной, вообще говоря, деформируемой системе отсчета для ускорения $a^\alpha \mathbf{э}_\alpha$, определенного относительно инерциальной системы отсчета, следует использовать общее выражение, полученное в [5]:

$$a^\alpha \mathbf{э}_\alpha = \mathbf{a}_{(r)} + \mathbf{a}_{(t)} + 2 v_{(r)}^\alpha (e_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}) h^{\beta\gamma} \mathbf{э}_\gamma$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_{(h)\alpha} v_{(t)\beta} + \nabla_{(h)\beta} v_{(t)\alpha}), \quad \omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_{(h)\alpha} v_{(t)\beta} - \nabla_{(h)\beta} v_{(t)\alpha})$$

Здесь $\mathbf{v}_{(r)}$, $\mathbf{a}_{(r)}$ — относительная скорость и ускорение в неинерциальной системе отсчета, $\mathbf{v}_{(t)}$, $\mathbf{a}_{(t)}$ — переносная скорость и ускорение рассматриваемой точки этой системы.

Уравнения (3.2), (3.3) даже при отсутствии внешних сил и притоков тепла ($Q_{(h)\alpha} = dQ^{(e)} = 0$) не имеют дивергентного вида, причем при $\varepsilon^2 \ll 1$ они отличаются от дивергентных уравнений (2.7) на члены $\lesssim \varepsilon^2$. Это обстоятельство объясняется применением преобразования Галилея при пересчете записанных в собственной системе отсчета точных уравнений (2.10), (2.11) на произвольную инерциальную систему отсчета наблюдателя и может рассматриваться как указание на то, что преобразование Галилея неточно отражает свойства физического пространства— времени.

Рассуждения, проведенные выше для модели идеально упругого тела, можно обобщить на произвольные модели, так как физические законы, сформулированные в собственных системах отсчета, отражают внутренние процессы, присущие частицам сплошной среды. Эти законы не зависят от произвольного выбора систем отсчета наблюдателя и могут рассматриваться как в рамках специальной теории относительности (СТО), так и в рамках ньютонианской механики. Для получения же соответствующих законов в произвольных заданных системах отсчета наблюдателя достаточно решить навигационную задачу. При этом необходимо пользоваться определенными представлениями о физическом пространстве — времени. Так, в СТО при решении навигационной задачи следует использовать преобразование Лоренца, а в ньютонианской механике — преобразование Галилея [6].

Различные макроскопические эффекты СТО, исчезающие при $c = \infty$, можно разделить на два типа. К первому относятся релятивистские эффекты, наблюдаемые в собственной системе отсчета, относительно которой данная точка сплошной среды в рассматриваемый момент собственного времени покоится. В частности, для пыли такие эффекты отсутствуют. Ко второму типу относятся дополнительно возникающие релятивистские эффекты в СТО, обусловленные переходом от собственной системы отсчета в каждой точке среды к системе отсчета наблюдателя, одинаковой для всех точек. Это эффекты навигационного пересчета. Эффекты первого типа, так же как и в ряде случаев квантовые эффекты (например, явление ферромагнетизма), проявляются только через зависимость от определяющих параметров лагранжиана и функционала δW^* в собственных системах отсчета и их можно описывать в рамках ньютонианской механики. Уравнения ньютонианской механики, учитывающие только собственные релятивистские эффекты, в локально определенных собственных системах отсчета совпадают с уравнениями релятивистской механики, также записанными в собственных системах отсчета.

Соответствующие глобальные уравнения ньютонианской механики получаются из уравнений в собственных системах отсчета после навигационных пересчетов на глобальные инерциальные системы отсчета наблюдателя с применением преобразования Галилея, в то время как для аналогичного получения уравнений релятивистской механики, учитывающих все релятивистские эффекты, необходимо использовать преобразование Лоренца. Выведенные указанным образом уравнения ньютонианской механики отличаются от обычных нерелятивистских уравнений для соответствующих моделей сплошных сред членами, пропорциональными c^{-2}. Порядок этих дополнительных членов может быть, вообще говоря, различным и зависит от порядка ускорения и порядков других величин термодинамической природы (формулы (3.2), (3.3)).

Автор благодарит Седова Л. И. за руководство работой, постоянное внимание и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред.— Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 5, с. 125.
2. *Седов Л. И.* Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 5, с. 771.
3. *Седов Л. И.* Применение базисного вариационного уравнения для построения моделей сплошных сред.— В кн.: Избранные вопросы современной механики. Ч. 1 М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 11.
4. *Седов Л. И.* О естественной теории сплошных сред.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6, с. 971.
5. *Седов Л. И.* О сложении движений относительно деформируемых систем отсчета.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 175.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. 3-е изд. М.: Наука, 1976, т. 1, с. 536; т. 2, с. 573.

Москва

Поступила в редакцию
29.VI. 1981