В равенствах (9), (10) и (14), выражающих обобщение теорем Карно — Остроградского, кинетическая энергия θ_2 в этом случае будет вычисляться также для относительных скоростей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наумов А. Л.* Теоретическая механика, ч. 2. Изд-во Киевск. ун-та, 1958, 318 с.
2. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М., «Наука», 1971. 635 с.
3. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967, 520 с.
4. *Болотов Е. А.* О принципе Гаусса. Изв. физ.-матем. об-ва при Казанск. ун-те, 1916, т. 21, № 3, стр. 99—152.
5. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.—Л., Гостехиздат, 1944, 656 с.

Москва

Поступила в редакцию 2.XI.1979

УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЛОЯХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Амирасланов И. А., Черепанов Г. П.

Предлагается эффективное (во многих случаях в квадратурах) решение краевых задач теории фильтрации жидкости в тонких криволинейных слоях переменной толщины. Основная идея подхода заключается в замене исходной системы уравнений двумерной фильтрации жидкости другой более простой системой уравнений, эквивалентной первой в пределах ее точности. Рассмотрен пример.

1. Общий подход. Рассмотрим фильтрацию несжимаемой тяжелой жидкости в тонком криволинейном слое из пористого материала, заключенного между двумя непроницаемыми поверхностями в пространстве. Обозначим через α и β гауссовы ортогональные координаты срединной поверхности криволинейного слоя, выбранные так, что координатные линии являются линиями главных кривизн этой поверхности. Далее, через γ обозначим нормаль к средней поверхности (так, что $\alpha\beta\gamma$ образуют правую систему координат), а через h — толщину слоя, являющуюся заданной функцией α и β.

Будем считать, что

$$\frac{1}{A}\frac{\partial h}{\partial \alpha} \ll 1, \quad \frac{1}{B}\frac{\partial h}{\partial \beta} \ll 1 \tag{1.1}$$

Здесь A и B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности в координатах α и β.

В таких допущениях уравнения двумерной теории фильтрации имеют следующий вид:

$$\frac{\partial (hv_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (hv_\beta)}{\partial \beta} = 0 \tag{1.2}$$

$$v_\alpha = -\frac{k}{\mu A}\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \rho g \frac{\partial z}{\partial \alpha}\right), \quad v_\beta = -\frac{k}{\mu B}\left(\frac{\partial p}{\partial \beta} + \rho g \frac{\partial z}{\partial \beta}\right) \tag{1.3}$$

Здесь p — давление в жидкости, v_α и v_β — составляющие скорости фильтрации по осям α и β, μ — динамическая вязкость жидкости, k — проницаемость пористого тела, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, которая считается направленной в отрицательном направлении оси z.

Уравнение средней поверхности слоя в прямоугольных декартовых координатах xyz имеет вид

$$x = x(\alpha, \beta), \; y = y(\alpha, \beta), \; z = z(\alpha, \beta) \tag{1.4}$$

Подставляя (1.3) в (1.2), получаем одно уравнение относительно функции $p\ (\alpha,\ \beta)$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h}{A}\frac{\partial p}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h}{B}\frac{\partial p}{\partial\beta}\right)=-\rho g\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h}{A}\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h}{B}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)\right] \tag{1.5}$$

При условии малости производных (1.1) толщину слоя можно представить в следующем виде:

$$h=h_0+\varepsilon h_1\ (\alpha,\ \beta)\quad (\varepsilon\ll 1) \tag{1.6}$$

Здесь ε — некоторое малое число, h_0 — постоянная, h_1 — известная функция α и β.

Уравнения (1.2), (1.3) и, следовательно, (1.5) справедливы лишь при условии малости производных (1.1); вблизи границ слоя, а также в местах резкого изменения его толщины возникает краевой эффект, для изучения которого двумерное приближение не годится и нужно, так или иначе, привлекать трехмерные уравнения теории фильтрации. На расстояниях от краев слоя, имеющих порядок нескольких толщин слоя, точное трехмерное решение асимптотически стремится к приближенному двумерному. Условие малости указанных производных, очевидно, эквивалентно уравнению (1.6), т. е. существованию некоторого малого числа ε.

Нетрудно видеть, что точное решение системы уравнений (1.2), (1.3) отличается от точного решения соответствующей трехмерной задачи теории фильтрации вдали от краев слоя на величину порядка ε^2. Ошибка именно такого порядка заключена в записи уравнений Дарси (1.3) для слоя переменной толщины. В этом можно убедиться также непосредственно, анализируя точные решения трехмерной теории фильтрации для клиновидных и конусовидных слоев. Следовательно, решение системы уравнений (1.2), (1.3) приближенно описывает состояние физической системы (фильтрацию в слое переменной толщины) с погрешностью порядка ε^2. Заметим, что величина v_γ, не фигурирующая в уравнениях (1.2) и (1.3), имеет порядок ε.

Поставим следующий вопрос: нельзя ли найти новую, более простую систему уравнений, эквивалентную исходной системе (1.2), (1.3) в пределах ее точности в том смысле, что решение новой системы отличается от искомого решения лишь на величину порядка ε^2. Очевидно, что в таком случае решение новой системы уравнений можно назвать «точным» решением исходной системы, поскольку его точность соответствует точности исходной системы. Заметим, что это соображение пригодно также для любых приближенных численных решений краевых задач математической физики, слишком высокая точность которых зачастую неоправданна из-за приближенности исходных уравнений.

В данном случае такую эквивалентную систему уравнений легко построить методом малого параметра. Итак, пусть требуется найти решение какой-либо конкретной краевой задачи для уравнения (1.5). В дальнейшем предполагается, что решение этой краевой задачи существует и единственно.

Ищем решение этой задачи в следующем виде:

$$p=p_0\ (\alpha,\ \beta)+\varepsilon p_1\ (\alpha,\ \beta) \tag{1.7}$$

Здесь новые неизвестные функции p_0 и p_1 не зависят от ε. Подставляем функции p и h согласно формулам (1.6) и (1.7) в уравнение (1.5) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, пренебрегая членами порядка ε^2, выходящими за рамки точности исходных уравнений. В более общих случаях эта простая процедура не проходит при наличии малого параметра при старшей производной.

В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial p_0}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial p_0}{\partial\beta}\right)=-\rho g\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)\right] \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial p_1}{\partial\beta}\right)\Bigg]=-\frac{1}{h_0A}\frac{\partial h_1}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial p_0}{\partial\alpha}+\rho g\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)-\frac{1}{h_0B}\frac{\partial h}{\partial\beta}\left(\frac{\partial p_0}{\partial\beta}+\rho g\frac{\partial z}{\partial\beta}\right) \tag{1.9}$$

Таким образом, система уравнений, эквивалентная исходному уравнению (1.5), состоит из двух однотипных уравнений (1.8) и (1.9), различающихся лишь своими правыми частями. Первое из них полностью совпадает с уравнением (1.5) при $h = h_0 = \text{const}$; правая часть второго определяется решением первого уравнения. Граничные условия для этих уравнений можно сформулировать исходя из краевой задачи. То обстоятельство, что эта формулировка неоднозначна, очевидно, не играет роли для определения физически значимой функции $p(\alpha, \beta)$.

Решение краевых задач для системы уравнений (1.8), (1.9) можно получить в квадратурах, если известна функция источника соответствующей краевой задачи для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) = 0$$

Функция источника для этого уравнения может быть найдена аналитически для многих случаев, представляющих практический интерес (плоскость, цилиндрическая и коническая поверхности, сфера, «пологие» поверхности и др.). В этих случаях при помощи принципа суперпозиции решение исходной краевой задачи для криволинейного слоя переменной толщины записывается в форме четырехкратных (в более простых случаях — двукратных) интегралов. Аналитические решения представляют большой практический интерес, в частности, в связи с возможностями, которые они открывают для последующего эффективного решения задач оптимизации.

2. Плоские слои переменной толщины. В случае плоских слоев переменной толщины уравнение (1.5) в декартовых координатах xy имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial p}{\partial y}\right) = -\rho g\left(\cos\varphi\frac{\partial h}{\partial x} + \cos\psi\frac{\partial h}{\partial y}\right) \tag{2.1}$$

Здесь φ и ψ — углы, составляемые осью z с осями x и y соответственно (в этом пункте оси x и y выбраны в плоскости слоя, а ось z по-прежнему определена направлением силы тяжести).

Эквивалентная этому уравнению система уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial y^2} = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} = -\frac{1}{h_0}\frac{\partial h_1}{\partial x}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} + \rho g\cos\varphi\right) - \frac{1}{h_0}\frac{\partial h_1}{\partial y}\left(\frac{\partial p_0}{\partial y} + \rho g\cos\psi\right) \tag{2.3}$$

$$(p = p_0 + \varepsilon p_1)$$

Таким образом, рассматриваемый случай приводится к двум последовательно решаемым задачам теории гармонического потенциала. Поэтому многие краевые задачи для уравнения (2.1) при помощи предложенного подхода можно решить эффективно, в квадратурах. Примерно такой же трудности оказываются соответствующие краевые задачи для цилиндрических, конических и вообще развертывающихся поверхностей в связи с тем, что коэффициенты A и B в этом случае будут постоянны.

Как видно, изложенный подход существенно отличен от стандартного метода малого параметра в следующем. Метод малого параметра является приближенным методом решения «точных» уравнений, причем решение получается в виде бесконечного ряда по степеням малого параметра. Изложенный подход является «точным» методом решения тех же исходных уравнений, которые, однако, считаются уже приближенными; оценка погрешности, содержащейся в этих уравнениях, приводит к заключению, что «точное» решение имеет вид (1.7), т. е. формально совпадает с двумя первыми членами разложения по малому параметру.

Стандартный метод малого параметра хорошо известен в теории фильтрации (см. [1], стр. 433). Течением жидкости в криволинейных слоях занималось много авторов; наибольшее внимание этим вопросам уделялось в работах О. В. Голубевой [2].

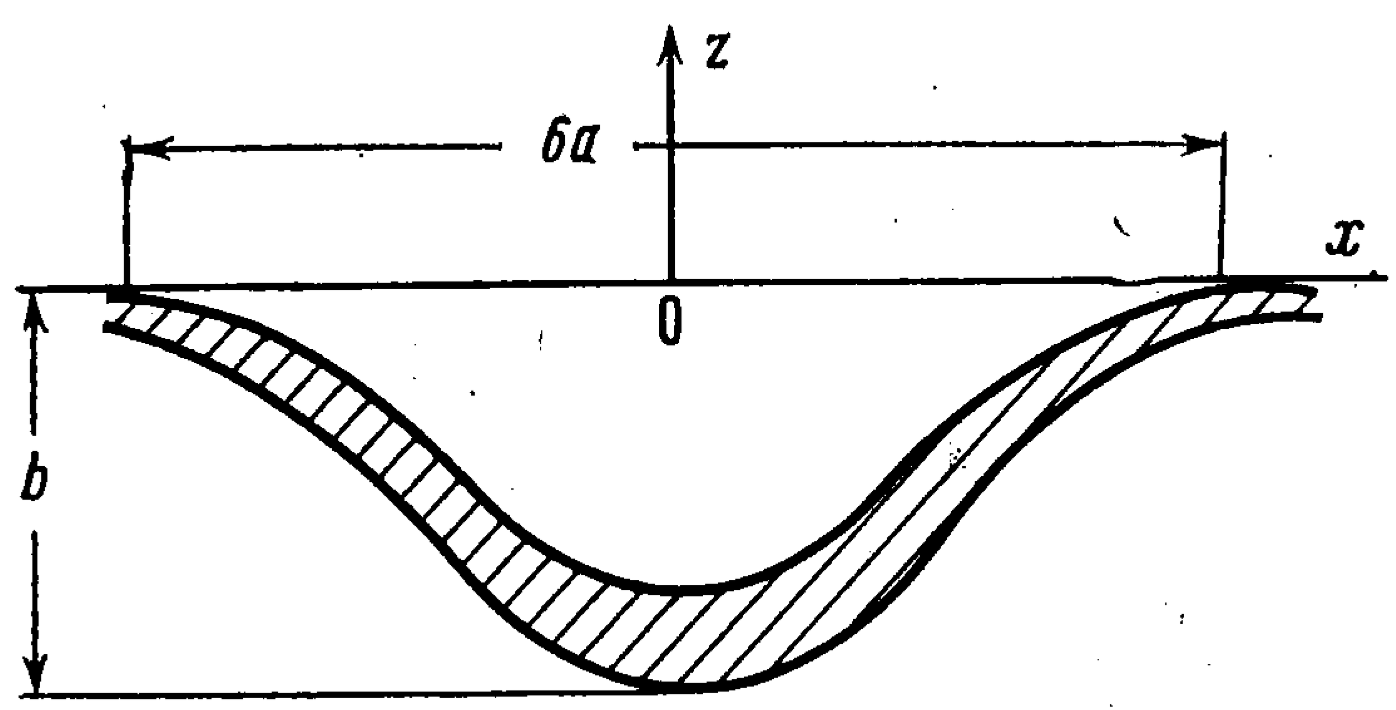
3. Пример. Пусть средняя поверхность слоя задана следующими уравнениями:

$$z = -\frac{ba^2}{\beta^2 + a^2} \quad (b > 0) \tag{3.1}$$

$$x = \int_0^\beta \frac{[(\beta^2 + a^2)^4 - 4\beta^2 b^2 a^4]^{1/2}}{(\beta^2 + a^2)^2}\, d\beta$$

Здесь a и b — некоторые положительные параметры размерности длины.

Уравнения (3.1) определяют цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси y. Поперечное сечение этой поверхности представляет собой симметричную кривую типа лунки в плоскости Oxz, асимптотически стремящуюся к оси x при $x \to \pm\infty$ (фигура). Переменная β, очевидно, представляет собой длину дуги этой кривой, отсчитываемую от точки минимума $x = 0$, $z = -b$. Другую ортогональную координату средней поверхности (α), без ограничения общности можно считать равной y. При этом коэффициенты A и B будут равны единице.



Уравнения (3.1) достаточно хорошо аппроксимируют форму геологических складок с залежами нефти и газа, если в качестве b выбрать наибольшую глубину складки, а в качестве a — примерно одну шестую ширины складки (и z изменить на $-z$).

Пусть толщина слоя задана следующим образом:

$$h = h_0\left(1 + \frac{\varepsilon a^2}{\beta^2 + a^2}\right)$$

Допустим, что тяжелая жидкость насыщает весь слой $-\infty < \alpha < +\infty$, $-\infty < \beta < +\infty$, а в точке $x = 0$, $y = 0$, $z = -b$ (т. е. в начале координат плоскости $\alpha\beta$) имеется сток жидкости мощности Q (скважина). Требуется определить поле давления и скоростей фильтрации в слое.

В рассматриваемой задаче давление определяется или одним уравнением

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h\frac{\partial p}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(h\frac{\partial p}{\partial\beta}\right) = -\rho g\frac{\partial}{\partial\beta}\left(h\frac{\partial z}{\partial\beta}\right) \tag{3.2}$$

или эквивалентной ему системой двух уравнений

$$\Delta p_0 = -\rho g\frac{\partial^2 z}{\partial\beta^2} \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) \tag{3.3}$$

$$\Delta p_1 = -\frac{1}{h_0}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\left(\frac{\partial p_0}{\partial\beta} + \rho g\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)$$

$$\left(h_1 = \frac{h_0 a^2}{\beta^2 + a^2}, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1\right)$$

Решение уравнения (3.2) вряд ли можно получить в аналитическом виде в отличие от решения системы (3.3). Функция Грина для уравнения Лапласа имеет вид $\ln[(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)]^{1/2}$, где α_0 и β_0 — координаты источника (или стока). Поэтому решение системы (3.3) можно записать в следующем виде:

$$p_0 = -\frac{\mu Q}{2\pi k}\ln(\alpha^2+\beta^2)^{1/2} + \frac{\rho g b a^2}{\beta^2+a^2} + p_\infty \tag{3.4}$$

$$p_1 = -\frac{\mu Q a^2}{\pi k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta_0^2\ln[(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2]^{1/2}}{(\alpha_0^2+\beta_0^2)(a^2+\beta_0^2)^2}\,d\alpha_0\,d\beta_0$$

$$(p = p_0 + \varepsilon p_1)$$

Здесь p_∞ — давление в жидкости при $Q = 0$ и $\beta \to \pm\infty$.

Это решение можно считать точным решением уравнения (3.2) в указанном выше смысле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М., «Наука», 1977.
2. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М., «Высшая школа», 1972.

Кировабад, Москва

Поступила в редакцию 18.I.1980