Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 6, 1981

УДК 531.36

ТЕОРЕМЫ КАРНО — ОСТРОГРАДСКОГО ДЛЯ СИСТЕМ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ СВЯЗЯМИ

Синицын В. А.

Изучается изменение кинетической энергии при импульсивном движении механических систем с нестационарными связями в условиях теорем Карно — Остроградского [1]. Доказаны теоремы об изменении кинетической энергии при ударном действии неудерживающих связей на несвободную систему. Рассмотрен пример.

Пусть движение механической системы ограничено идеальными голономными и линейными неголономными связями. Положение системы задано обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_r$ ($r \geqslant m$, m — число степеней свободы), т. е. обобщенные скорости в любой момент времени удовлетворяют уравнениям

$$q_{m+p}^{\cdot} - \sum_{j=1}^{m} b_{pj} q_j^{\cdot} - b_p = 0 \quad (p = 1, \ldots, r - m) \tag{1}$$

где коэффициенты b_{pj} и b_p — непрерывно дифференцируемые функции обобщенных координат и времени. В некоторый момент времени на систему дополнительно налагаются неудерживающие идеальные связи вида

$$q_{l+\nu}^{\cdot} = \sum_{i=1}^{l} a_{\nu i} q_i^{\cdot} \quad (\nu = 1, \ldots, m - l) \tag{2}$$

Коэффициенты $a_{\nu i}$ удовлетворяют тем же требованиям, что и коэффициенты в уравнениях (1).

В дальнейшем будем пользоваться терминологией [2], согласно которой связи вида (2) называются катастатическими (в уравнениях нет слагаемых, не содержащих обобщенных скоростей), а связи вида (1) — акатастатическими.

В выражении кинетической энергии системы θ, получаемом после исключения зависимых скоростей с помощью уравнений связей (1), выделим совокупность θ_2 членов второй степени относительно обобщенных скоростей, группу θ_1 членов, линейных относительно обобщенных скоростей, и совокупность θ_0 членов, не зависящих от обобщенных скоростей,

$$\theta = \theta_2 + \theta_1 + \theta_0$$

Составляя, как обычно, уравнения движения системы со связями (1) и интегрируя их на интервале времени ударного взаимодействия со связями (2) при предположении, что активные ударные силы отсутствуют, получаем уравнения импульсивного движения [3]

$$\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial q_i^{\cdot}} + \sum_{\nu=1}^{m-l} a_{\nu i} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_{l+\nu}^{\cdot}}\right)\Bigg|_-^+ = 0 \quad (i = 1, \ldots, l) \tag{3}$$

($f\,|_-^+ = f^+ - f^-$, индексы плюс и минус указывают на то, что характеристика соответствует доударному или послеударному состоянию системы).

Функцию θ_2 можно рассматривать как кинетическую энергию некоторой механической системы, которую будем называть приведенной.

Удар в результате наложения связей произойдет, если в начальный момент скорости деформации связей (2) (α_ν) — отрицательные величины

(4) $$q^{\cdot -}_{l+\nu} - \sum_{i=1}^{l} a_{\nu i} q_i^{\cdot -} = \alpha_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, m - l)$$

При упругом ударе послеударное состояние характеризуется положительными величинами — скоростями ослабления связей (β_ν) [4]

(5) $$q^{\cdot +}_{l+\nu} - \sum_{i=1}^{l} a_{\nu i} q_i^{\cdot +} = \beta_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, m - l)$$

Процесс удара целесообразно представлять в виде двух фаз. Окончание первой фазы определяется моментом, когда прекращается деформация связей и начинается их ослабление (восстановление). Обобщенные скорости, соответствующие этому состоянию ($q_1^{\cdot *}, \ldots, q_m^{\cdot *}$), должны удовлетворять уравнениям связей (2).

Предполагаем, что прекращение деформации всех связей происходит одновременно.

Теоремы Карно — Остроградского относятся к изменениям кинетической энергии системы в первой фазе ударного действия связей, во второй фазе такого удара и в процессе всего удара. Доказательство теорем известно [1] для несвободных систем с голономными стационарными связями.

Для доказательства первой теоремы каждое из уравнений импульсивного движения (3) для первой фазы умножим на $q_i^{\cdot *}$ и просуммируем по индексу i. Получим

(6) $$\sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial q_i^{\cdot}}\right)\Big|_{-}^{*} q_i^{\cdot *} + \sum_{\nu=1}^{m-l} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial q^{\cdot}_{l+\nu}}\right)\Big|_{-}^{*} \sum_{i=1}^{l} a_{\nu i} q_i^{\cdot *} = 0$$

Учитывая, что обобщение скорости в конце первой фазы удовлетворяют уравнениям (2), равенство (6) приведем к виду

(7) $$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \theta_2^*}{\partial q_j^{\cdot *}} q_j^{\cdot *} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \theta_2^-}{\partial q_j^{\cdot -}} q_j^{\cdot *} = 0$$

Поскольку θ_2 — однородная квадратичная форма, из (7) получаем равенство

$$2\theta_2^* - 2\theta_2(q^{\cdot -}, q^{\cdot *}) = 0 \qquad \left(\theta_2(q^{\cdot -}, q^{\cdot *}) = \frac{1}{2} \sum_{k,\, j=1}^{m} m_{kj} q_k^{\cdot -} q_j^{\cdot *}\right)$$

где $\theta_2(q^{\cdot -}, q^{\cdot *})$ — билинейная форма обобщенных скоростей (m_{kj} — инерционные коэффициенты).

Известные свойства билинейных форм позволяют сделать замену

(8) $$\theta_2(q^{\cdot -}, q^{\cdot *}) = {}^1/_2\,[\theta_2(q^{\cdot -}, q^{\cdot -}) + \theta_2(q^{\cdot *}, q^{\cdot *}) - \theta_2(q^{\cdot -} - q^{\cdot *}, q^{\cdot -} - q^{\cdot *})]$$
$$\theta_2(q^{\cdot -}, q^{\cdot -}) = \theta_2^-, \quad \theta_2(q^{\cdot *}, q^{\cdot *}) = \theta_2^*$$

после которой получаем

(9) $$\theta_2^- - \theta_2^* = \theta_2(q^{\cdot -} - q^{\cdot *}, q^{\cdot -} - q^{\cdot *})$$

Очевидно, к такому же результату приходим, если налагаемые связи сохраняются после удара, так как в этом случае весь процесс удара состоит только из одной фазы (абсолютно неупругий удар). Равенство (9) соответствует утверждению теоремы: при импульсивном движении системы, происходящем в результате наложения сохраняющихся идеальных катастатических связей, потерянная кинетическая энергия приведенной системы равна кинетической энергии потерянных обобщенных скоростей приведенной системы.

Вторую теорему получаем аналогичным преобразованием уравнений импульсивного движения (3), составленных для второй фазы удара.

В результате приходим к равенству

(10) $$\theta_2{}^+ - \theta_2{}^* = \theta_2(q^{\cdot+} - q^{\cdot*},\ q^{\cdot+} - q^{\cdot*})$$

которое выражает вторую теорему: в течение второй фазы удара с освобождением системы от идеальных катастатических связей приобретенная кинетическая энергия приведенной системы равна кинетической энергии приобретенных обобщенных скоростей приведенной системы.

При доказательстве третьей теоремы будем считать, что упругие свойства взаимодействия системы с неудерживающими связями характеризуются одинаковыми отношениями скоростей ослабления связей к скоростям деформации, т. е.

(11) $$\beta_\nu = -\mu\alpha_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, m-l)$$

Физический смысл коэффициента μ можно установить, пользуясь результатами работы [5]: коэффициент μ совпадает с коэффициентом восстановления. Другими словами, предполагается, что коэффициенты восстановления при упругом взаимодействии материальных точек системы с неудерживающими связями одинаковы. Указанное условие позволяет получить с помощью (4), (5) замыкание уравнений (3) относительно обобщенных скоростей $q_1{}^{\cdot+}, \ldots, q_m{}^{\cdot+}$

$$\left(q_{l+\nu}^{\cdot+} - \sum_{i=1}^{l} a_{\nu i} q_i{}^{\cdot+}\right) = -\mu\left(q_{l+\nu}^{\cdot-} - \sum_{i=1}^{l} a_{\nu i} q_i{}^{\cdot-}\right) \quad (\nu = 1, \ldots, m-l)$$

Умножая уравнения (3) соответственно на множители $(q_i{}^{\cdot+} + \mu q_i{}^{\cdot-})$ и суммируя по индексу i $(i = 1, \ldots, l)$, получаем

(12) $$\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial q_i^{\cdot}}\right)\Big|_-^+ (q_i{}^{\cdot+} + \mu q_i{}^{\cdot-}) + \sum_{\nu=1}^{m-l}\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial q_{l+\nu}^{\cdot}}\right)\Big|_-^+ \sum_{i=1}^{l} a_{\nu i}(q_i{}^{\cdot+} + \mu q_i{}^{\cdot-}) = 0$$

В равенстве (12) сделаем замену

$$\sum_{i=1}^{l} a_{\nu i} q_i{}^{\cdot-} = q_{l+\nu}^{\cdot-} - \alpha_\nu, \quad \sum_{i=1}^{l} a_{\nu i} q_i{}^{\cdot+} = q_{l+\nu}^{\cdot+} - \beta_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, m-l)$$

и учтем условия (3) и соотношения

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial q_i^{\cdot}}\right)^+ q_i{}^{\cdot-} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial q_i^{\cdot}}\right)^- q^{\cdot+} = 2\theta_2(q^{\cdot-}, q^{\cdot+})$$

После этого равенство (12) примет вид

(13) $$2\theta_2{}^+ - 2\mu\theta_2{}^- - 2(\mu - 1)\theta_2(q^{\cdot-}, q^{\cdot-}) = 0$$

Подставляя в (13) выражение билинейной формы (8), после очевидных преобразований получаем

(14) $$\theta_2{}^- - \theta_2{}^+ = \frac{1-\mu}{1+\mu}\theta_2(q^{\cdot-} - q^{\cdot+},\ q^{\cdot-} - q^{\cdot+})$$

Таким образом, доказана третья теорема: потеря кинетической энергии приведенной системы в результате упругого взаимодействия с идеальными катастатическими связями (при одинаковых отношениях скоростей деформации к скоростям ослабления) составляет $(1 - \mu) / (1 + \mu)$ — долю кинетической энергии приведенной системы, вычисленной при потерянных обобщенных скоростях.

Пример. Однородный шар радиусом r, масса которого равна единице, катится без проскальзывания по шероховатой горизонтальной плоскости, вращающейся вместе с гладкой вертикальной стенкой вокруг оси OZ (фигура) с угловой скоростью Ω. В некоторый момент времени шар ударяется о стенку. Коэффициент восстановления при ударе равен $\varkappa$. Составить уравнения для определения послеударных скоростей.

Выберем неподвижную систему координат $OXYZ$, как показано на фигуре. Кинетическая энергия шара определяется выражением

$$2T = x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2} + \rho^2 (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)$$

где ρ — радиус инерции шара относительно любого диаметра, x, y, z — координаты центра.

Выразим проекции угловой скорости шара ω_x, ω_y, ω_z через углы Эйлера φ, ψ, ϑ

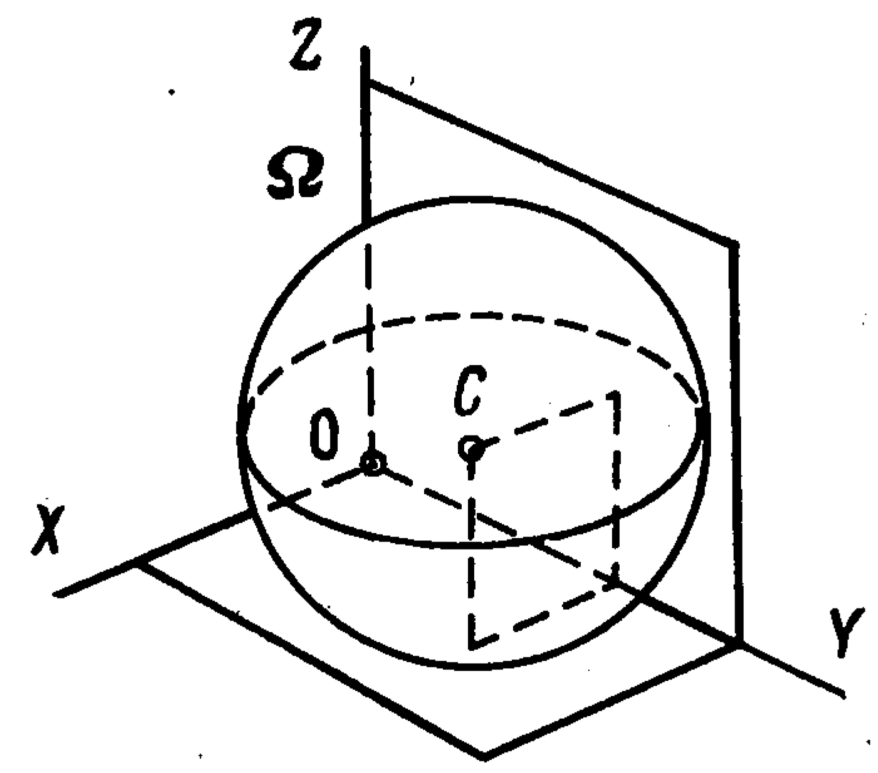
(15) $$\omega_x = \vartheta^{\cdot} \cos\psi + \varphi^{\cdot} \sin\vartheta \sin\psi, \quad \omega_z = \varphi^{\cdot} \cos\vartheta + \psi^{\cdot}$$
$$\omega_y = \vartheta^{\cdot} \sin\psi - \varphi^{\cdot} \sin\vartheta \cos\psi$$

и подставим эти равенства в выражение кинетической энергии

$$2T = x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2} + \rho^2 (\vartheta^{\cdot 2} + \varphi^{\cdot 2} + \psi^{\cdot 2} + 2\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot} \cos\vartheta)$$

Отсутствие проскальзывания соответствует постоянному действию связей

(16) $$x^{\cdot} - r\omega_y + \Omega y = 0,$$
$$y^{\cdot} + r\omega_x - \Omega x = 0, \quad z^{\cdot} = 0$$



Выбирая в качестве независимых обобщенных скоростей $\vartheta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, получаем следующее выражение кинетической энергии приведенной системы:

(17) $$2\theta_2 = (r^2 + \rho^2)\vartheta^{\cdot 2} + (r^2 \sin^2\vartheta + \rho^2)\varphi^{\cdot 2} + \rho^2 (\psi^{\cdot 2} + 2\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot} \cos\vartheta)$$

В момент удара накладывается дополнительная связь

$$x^{\cdot} = -\Omega y$$

которая согласно (15) и (16) в обобщенных координатах выражается уравнением

$$\vartheta^{\cdot} \sin\psi - \varphi^{\cdot} \sin\vartheta \cos\psi = 0$$

Используя это уравнение и выражение (17), составляем уравнения (3)

$$(r^2 \sin^2\vartheta + \rho^2)\, \Delta\varphi^{\cdot} \sin\psi + (r^2 + \rho^2)\, \Delta\nu^{\cdot} \sin\vartheta \cos\psi + \rho^2 \Delta\psi^{\cdot} \cos\vartheta \sin\psi = 0, \quad \Delta\psi^{\cdot} + \Delta\varphi^{\cdot} \cos\vartheta = 0 \quad (\Delta q^{\cdot} = q^{\cdot +} - q^{\cdot -})$$

Третье уравнение получаем, используя обобщение теоремы Карно — Остроградского (14) и учитывая равенство $\mu = \varkappa$,

$$\theta_2^{+} - \theta_2^{-} = -\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\, \theta_2 (\Delta\vartheta^{\cdot}, \Delta\varphi^{\cdot}, \Delta\psi^{\cdot})$$

или в более простом виде

$$\vartheta^{\cdot +} \sin\psi - \varphi^{\cdot +} \sin\vartheta \cos\psi = -\varkappa (\vartheta^{\cdot -} \sin\psi - \varphi^{\cdot -} \sin\vartheta \cos\psi)$$

Найденные уравнения импульсивного движения шара совпали, что и следовало ожидать, с уравнениями удара, полученными в работе [3] (гл. III, § 9, пример 5), где рассматривалось движение по неподвижной плоскости.

В заключение укажем путь обобщения теорем на случай упругого взаимодействия с акатастатическими связями

$$q^{\cdot}_{l+\nu} = \sum_{i=1}^{l} a_{\nu i} q_i^{\cdot} + a_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, m - l)$$

Отличие доказательства будет заключаться только в том, что все выкладки повторяются для относительных скоростей. Относительные скорости некоторого состояния системы определяются как разности соответствующих обобщенных скоростей и переносных обобщенных скоростей, в качестве которых принимается какой-либо набор обобщенных скоростей, удовлетворяющих акатастатическим связям.

Если $q_1^{\cdot e}, \ldots, q_m^{\cdot e}$ — переносные скорости, то относительные скорости до удара, после удара и в конце первой фазы равны разностям

$$(q_j^{\cdot -} - q_j^{\cdot e}), \quad (q_j^{\cdot +} - q_j^{\cdot e}), \quad (q_j^{\cdot *} - q_j^{\cdot e}) \quad (j = 1, \ldots, m)$$

В равенствах (9), (10) и (14), выражающих обобщение теорем Карно — Остроградского, кинетическая энергия θ_2 в этом случае будет вычисляться также для относительных скоростей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наумов А. Л.* Теоретическая механика, ч. 2. Изд-во Киевск. ун-та, 1958, 318 с.
2. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М., «Наука», 1971. 635 с.
3. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967, 520 с.
4. *Болотов Е. А.* О принципе Гаусса. Изв. физ.-матем. об-ва при Казанск. ун-те, 1916, т. 21, № 3, стр. 99—152.
5. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.—Л., Гостехиздат, 1944, 656 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.XI.1979

УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЛОЯХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Амирасланов И. А., Черепанов Г. П.

Предлагается эффективное (во многих случаях в квадратурах) решение краевых задач теории фильтрации жидкости в тонких криволинейных слоях переменной толщины. Основная идея подхода заключается в замене исходной системы уравнений двумерной фильтрации жидкости другой более простой системой уравнений, эквивалентной первой в пределах ее точности. Рассмотрен пример.

1. Общий подход. Рассмотрим фильтрацию несжимаемой тяжелой жидкости в тонком криволинейном слое из пористого материала, заключенного между двумя непроницаемыми поверхностями в пространстве. Обозначим через α и β гауссовы ортогональные координаты срединной поверхности криволинейного слоя, выбранные так, что координатные линии являются линиями главных кривизн этой поверхности. Далее, через γ обозначим нормаль к средней поверхности (так, что $\alpha\beta\gamma$ образуют правую систему координат), а через h — толщину слоя, являющуюся заданной функцией α и β.

Будем считать, что

$$\frac{1}{A}\frac{\partial h}{\partial \alpha} \ll 1, \quad \frac{1}{B}\frac{\partial h}{\partial \beta} \ll 1 \tag{1.1}$$

Здесь A и B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности в координатах α и β.

В таких допущениях уравнения двумерной теории фильтрации имеют следующий вид:

$$\frac{\partial (hv_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (hv_\beta)}{\partial \beta} = 0 \tag{1.2}$$

$$v_\alpha = -\frac{k}{\mu A}\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \rho g \frac{\partial z}{\partial \alpha}\right), \quad v_\beta = -\frac{k}{\mu B}\left(\frac{\partial p}{\partial \beta} + \rho g \frac{\partial z}{\partial \beta}\right) \tag{1.3}$$

Здесь p — давление в жидкости, v_α и v_β — составляющие скорости фильтрации по осям α и β, μ — динамическая вязкость жидкости, k — проницаемость пористого тела, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, которая считается направленной в отрицательном направлении оси z.

Уравнение средней поверхности слоя в прямоугольных декартовых координатах xyz имеет вид

$$x = x(\alpha, \beta), \; y = y(\alpha, \beta), \; z = z(\alpha, \beta) \tag{1.4}$$