Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 6, 1981

УДК 537.226

ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ СРЕДАХ[1]

Желнорович В. А.

Рассматривается система уравнений, описывающая некоторый класс поляризующихся сред в электромагнитном поле при учете как пространственной неоднородности, так и процессов релаксации электрической поляризации среды. Излагается нелинейная теория и линеаризованная теория в рамках электростатического приближения. Даны решения рассмотренных уравнений в электростатическом приближении в виде электроупругих волн. Электроупругие волны без учета релаксации электрической поляризации в пьезокерамических средах рассматривались в [1], в сегнетоэлектриках — в [2].

1. Модели поляризующихся сред в электромагнитном поле. Пусть $э_\alpha$, x^α $(\alpha = 1, 2, 3)$ — базисы и переменные декартовой системы координат наблюдателя в трехмерном физическом (евклидовом) пространстве V; $э_\alpha^\wedge$, ξ^α — базисы и переменные системы координат, сопутствующей (лагранжевой) для сплошной среды, рассматриваемой в V. Определим массовую плотность среды ρ, тензор конечных деформаций $\varepsilon^{\wedge\alpha\beta}э_\alpha^\wedge э_\beta^\wedge$ и вектор скорости среды $v = v^\alpha э_\alpha$ соотношениями

$$\rho = \rho_0 (g^\wedge)^{-1/2}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^\wedge = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta}^\wedge - \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}), \quad v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad g^\wedge = \det \| g_{\alpha\beta}^\wedge \| \tag{1.1}$$

Здесь $g_{\alpha\beta}{}^\wedge$ — компоненты метрического тензора в сопутствующей системе координат, $g_{\alpha\beta}{}^\circ$ — компоненты метрического тензора пространства начальных состояний, определенного на многообразии ξ^α, d/dt — символ субстанциональной производной по времени t (при постоянных лагранжевых переменных ξ^α).

Пусть $P = P^\alpha э_\alpha$ — трехмерный вектор электрической поляризации среды, инвариантный относительно выбора инерциальной системы координат наблюдателя [3, 4], $E = E^\alpha э_\alpha$ — вектор напряженности электрического поля, $D = D^\alpha э_\alpha$ — вектор электрической индукции, $H = H^\alpha э_\alpha$ — вектор напряженности магнитного поля, $B = B^\alpha э_\alpha$ — вектор магнитной индукции. Ниже будут рассматриваться поляризующиеся среды, для которых по условию в собственном базисе намагниченность равна нулю. В этом случае векторы D, H связаны с векторами E, B, P равенствами (c — скорость света в вакууме)

$$D = E + 4\pi P, \quad H = B + 4\pi/c\ [v, P] \tag{1.2}$$

Векторы E, B можно выразить через скалярный и векторный потенциалы равенствами

$$B = \operatorname{rot} A, \quad E = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} A \tag{1.3}$$

---

[1] Доклад на 5 Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата, 27 мая, 1981 г.

Здесь $\partial/\partial t$ — символ частной производной по времени при постоянных переменных x^α.

Рассмотрим класс моделей поляризующихся сред в электромагнитном поле, описываемый системой динамических уравнений

$$\operatorname{div} D = 0,\ \operatorname{rot} H = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} D \tag{1.4}$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} B, \quad \operatorname{div} B = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_\alpha = \partial_\beta P^\beta_{\alpha(m)} + Q_\alpha + \frac{1}{8\pi}(B_\lambda \partial_\alpha H^\lambda - H^\lambda \partial_\alpha B_\lambda +$$
$$+ D_\lambda \partial_\alpha E^\lambda - E^\lambda \partial_\alpha D_\lambda)$$

$$E^\alpha + \frac{1}{c}[v, B]^\alpha + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial P_\alpha} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \partial_\lambda P_\alpha} = \Pi^\alpha$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\partial_\alpha q^\alpha + \tau^{*\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + \Pi^\alpha \left(\frac{d}{\partial t} P_\alpha - [\omega, P]_\alpha\right)$$

$$\rho T + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial s} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0$$

Символ $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ означает частную производную по переменным x^α, $\omega = {}^1/_2 \operatorname{rot} v$ — вектор вихря скорости, $e_{\alpha\beta} = {}^1/_2 (\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha)$ — компоненты тензора скоростей деформации, Q_α — компоненты вектора внешних объемных сил, действующих на среду, T — в равновесных процессах температура, s — удельная плотность энтропии, $\tau^{*\alpha\beta}$ — компоненты тензора вязких напряжений, q^α — компоненты вектора потока тепла; компоненты вектора Π^α определяют процессы релаксации электрической поляризации среды. Компоненты тензора $P^\beta_{\alpha(m)}$ в уравнениях (1.4) определяются соотношением

$$P^\beta_{\alpha(m)} = -\rho v_\alpha v^\beta - \frac{\partial \Lambda_0}{\partial x_\lambda{}^\alpha} x_\lambda{}^\beta + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \partial_\beta P_\lambda} \partial_\alpha P_\lambda - \tag{1.5}$$
$$-\delta_\alpha{}^\beta \left[\Lambda_0 + \frac{1}{2} P_\lambda \left(E^\lambda + \frac{1}{c}[v, B]^\lambda\right)\right] + \tau^{*\beta}_\alpha + \frac{1}{2}(P_\alpha \Pi^\beta - P^\beta \Pi_\alpha)$$

где $x_\gamma{}^\alpha = \partial x^\alpha / \partial \xi^\gamma$ — дисторсия; Λ_0 — задаваемая функция от системы аргументов

$$x_\gamma{}^\alpha,\ P_\alpha,\ \partial_\beta P_\alpha,\ s,\ K_C \tag{1.6}$$

K_C — заданные постоянные тензоры ($dK_C/dt = 0$), определяющие, например, анизотропию среды.

Уравнения (1.4), (1.5) можно получить из вариационного уравнения [3—9]; в этом случае функция Λ_0 представляет собой часть лагранжиана. Рассматриваемые здесь уравнения отличаются от [3] только используемыми далее более общими соотношениями Онзагера, определяющими релаксационный член Π^α.

Система уравнений (1.4), (1.5) содержит уравнения Максвелла для электромагнитного поля в среде, уравнения импульсов, уравнение для электрической поляризации среды, уравнение неразрывности для массовой плотности среды, уравнение баланса энтропии и уравнение для температуры. Из уравнений (1.4), (1.5) следует уравнение энергии

$$(1.7)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left\{\varepsilon_{(m)}+\frac{1}{8\pi}(D_\alpha E^\alpha+H_\alpha B^\alpha)+\frac{1}{c}v_\alpha[B,P]^\alpha\right\}+$$
$$+\partial_\beta\left\{\varepsilon^\beta_{(m)}+\frac{c}{4\pi}[E,H]^\beta+\frac{1}{c}v^\beta v_\alpha[B,P]^\alpha\right\}=Q_\alpha v^\alpha$$

в котором объемная плотность энергии среды $\varepsilon_{(m)}$ и компоненты вектора потока энергии среды $\varepsilon^\beta_{(m)}$ определяются соотношениями

$$(1.8)\qquad \varepsilon_{(m)}=\frac{1}{2}\rho v^2-\frac{1}{2}P_\alpha\left(E^\alpha+\frac{1}{c}[v,B]^\alpha\right)-\Lambda_0$$
$$\varepsilon^\beta_{(m)}=q^\beta+\varepsilon_{(m)}v^\beta-(\rho v_\alpha v^\beta+P^\beta_{\alpha(m)})v^\alpha+\frac{\partial\Lambda_0}{\partial\partial_\beta P_\alpha}\frac{d}{dt}P_\alpha$$

Для замыкания системы уравнений (1.4), (1.5) следует задать компоненты тензора вязких напряжений $\tau^{*\alpha\beta}$, компоненты вектора потока тепла q^α и релаксационный член Π^α уравнения, описывающего поляризацию среды. Основываясь на выражении для внутреннего производства энтропии d_is/dt, которое по определению зададим в виде

$$(1.9)\qquad \rho T\frac{d_iS}{dt}=-\frac{1}{T}q^\alpha\partial_\alpha T+\tau^{*\alpha\beta}e_{\alpha\beta}+\Pi^\alpha\left(\frac{d}{dt}P_\alpha-[\omega,P]_\alpha\right)$$

по Онзагеру можно принять, например, следующие определения для величин $\tau^{*\alpha\beta}$, Π^α, q^α:

$$(1.10)\qquad \tau^{*\alpha\beta}=\tau^{\alpha\beta\lambda\theta}e_{\lambda\theta}+b^{\alpha\beta\lambda}\left(\frac{d}{dt}P_\lambda-[\omega,P]_\lambda\right)$$
$$\Pi^\alpha=s^{\alpha\beta}\left(\frac{d}{dt}P_\beta-[\omega,P]_\beta\right)+s^{\alpha\beta\lambda}e_{\beta\lambda}+m^{\alpha\beta}\partial_\beta T$$
$$q^\alpha=-\varkappa^{\alpha\beta}\partial_\beta T+\eta^{\alpha\beta}\left(\frac{d}{dt}P_\beta-[\omega,P]_\beta\right)$$

Коэффициенты τ, b, s, m, η, $\varkappa$ в уравнениях (1.10) можно задавать в виде функций от определяющих параметров среды и поля таким образом, чтобы выполнялось условие $d_is/dt\geqslant 0$.

Для неподвижных тел релаксация электрической поляризации обычно определяется релаксационным членом $\Pi^\alpha\sim dP^\alpha/dt$. Постулируемое здесь выражение (1.9) для внутреннего производства энтропии за счет поляризации для движущихся сред основано по существу на обобщении выражения для Π^α в виде $\Pi^\alpha\sim d'P^\alpha/dt=dP^\alpha/dt-[\omega,P]^\alpha$, где d'/dt — производная по времени в базисе, который движется и вращается с частицей среды.

Физическая конкретизация класса моделей, описываемых уравнениями (1.4), (1.5), (1.9), (1.10), связана с заданием определенного вида функций Λ_0, q^α, Π^α, $\tau^{*\alpha\beta}$. В частности, моделям упругих поляризующихся сред соответствует случай, когда величины x^α_λ входят в функцию Λ_0 через компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\wedge}$. Моделям жидких поляризующихся сред соответствует случай, когда величины $x^\beta{}_\alpha$ входят в Λ_0 через массовую плотность жидкости ρ. Например, если $\Lambda_0=\Lambda_0(\rho,s,P_\alpha,K_C)$, то для компонент тензора $P^\beta_{\alpha(m)}$ в уравнениях импульсов в (1.4) имеем

$$(1.11)\qquad P^\beta_{\alpha(m)}=-\rho v_\alpha v^\beta-p\delta_\alpha{}^\beta-\tau^{*\beta}_\alpha+\frac{1}{2}(P_\alpha\Pi^\beta-P^\beta\Pi_\alpha)$$
$$p=-\rho^2\frac{\partial\Lambda_0/\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{2}P_\lambda\left(E^\lambda+\frac{1}{c}[v,B]^\lambda\right)$$

В электростатическом приближении система уравнений (1.4) принимает вид

$$\operatorname{div} D = 0, \quad \operatorname{rot} E = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_\alpha = \partial_\beta P^\beta_{\alpha(m)} + Q_\alpha + \frac{1}{2}(P_\lambda \partial_\alpha E^\lambda - E^\lambda \partial_\alpha P_\lambda)$$

$$E^\alpha + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial P_\alpha} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \partial_\lambda P_\alpha} = \Pi^\alpha, \quad \rho T + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial s} = 0 \tag{1.12}$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\partial_\alpha q^\alpha + \tau^{*\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + \Pi^\alpha \left(\frac{d}{dt} P_\alpha - [\omega, P]_\alpha\right)$$

Компоненты тензора $P^\beta_{\alpha(m)}$ в уравнениях (1.12) определены соотношением (1.5).

В электростатическом приближении компоненты вектора электрической напряженности E выражаются через потенциал φ равенством $E = -\operatorname{grad} \varphi$, поэтому вместо уравнений Максвелла в (1.12) можно взять уравнение для потенциала φ

$$\Delta\varphi = 4\pi \operatorname{div} P \tag{1.13}$$

2. Линеаризированная теория поляризующихся сред в электростатическом приближении. Определим вектор перемещений точек среды $u = u^\alpha \mathfrak{э}_\alpha$ равенством $u = r - r_0$, в котором r — радиус-вектор точек среды в текущий момент времени, r_0 — радиус-вектор точек среды в начальном состоянии. Будем считать далее, что в начальный момент времени $t = t_0$ декартова система координат наблюдателя и сопутствующая система координат совпадают. Рассмотрим движения среды, при которых градиенты вектора перемещений и градиенты вектора поляризации среды малы, а компоненты вектора поляризации P, температура T, энтропия s, массовая плотность среды ρ и компоненты вектора электрической индукции E мало меняются относительно равновесных (постоянных) значений P_0, T_0, s_0, ρ_0, E_0. Полагая, что

$$P^\alpha = P_0{}^\alpha + p^\alpha, \quad s = s_0 + s_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1, \quad E^\alpha = E_0{}^\alpha + e^\alpha \tag{2.1}$$

где p^α, s_1, ρ_1, e^α — малые величины, рассматриваемые как малые первого порядка, функцию Λ_0 можно разложить в ряд по $u_{\alpha\beta} = \partial_\beta u_\alpha$, $\partial_\alpha p_\beta$, p_β, s_1. Ограничиваясь в таком разложении величинами второго порядка малости, получим

$$\begin{aligned} -\Lambda_0 = {} & \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta\lambda\theta} u_{\alpha\beta} u_{\lambda\theta} + \frac{1}{2}\alpha^{\alpha\beta\lambda\theta} \partial_\alpha p_\beta \partial_\lambda p_\theta + \mu^{\alpha\beta\lambda\theta} u_{\alpha\beta} \partial_\lambda p_\theta + \\ & + \zeta^{\alpha\beta\lambda} u_{\alpha\beta} p_\lambda + \theta^{\alpha\beta\lambda} p_\alpha \partial_\beta p_\lambda + n^{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} s_1 + \nu^{\alpha\beta} s_1 \partial_\alpha p_\beta + \frac{1}{2}\nu s_1{}^2 + \\ & + \frac{1}{2}\beta^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \beta^\alpha p_\alpha s_1 + Q^{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} + C^{\alpha\beta} \partial_\alpha p_\beta + C^\alpha p_\alpha + \\ & + \rho_0 T_0 s_1 + \text{const} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Постоянные коэффициенты при малых величинах в формуле (2.2) можно выразить через функцию Λ_0 и производные от Λ_0, вычисленные в начальном состоянии. Если выражение (2.2) для Λ_0 принимается безотносительно к точной нелинейной теории, то конкретные значения коэффициентов в (2.2) могут быть связаны, в частности, с дополнительными предположениями относительно свойств симметрии среды. Если в начальном состоянии напряжения в среде равны нулю, то в разложении (2.2) следует положить $Q^{\alpha\beta} = 0$. Согласно определению, коэффициенты λ, α, β в (2.2) всегда обладают следующими свойствами симметрии:

$$\lambda^{\alpha\beta\lambda\theta} = \lambda^{\lambda\theta\alpha\beta}, \quad \alpha^{\alpha\beta\lambda\theta} = \alpha^{\lambda\theta\alpha\beta}, \quad \beta^{\alpha\beta} = \beta^{\beta\alpha}$$

Для величин $\tau^{*\alpha\beta}$, q^{α}, Π^{α} в δW^* далее примем

$$\tau^{*\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta\lambda\theta} e_{\lambda\theta}, \quad q^{\alpha} = -\varkappa^{\alpha\beta}\partial_\beta T, \quad \Pi^{\alpha} = s^{\alpha\beta}\left(\frac{d}{dt}P_\beta - [\omega, P]_\beta\right) \tag{2.3}$$

Линеаризованные уравнения, соответствующие функции Λ_0, определенной формулой (2.2), при наличии соотношений (2.3) имеют вид

$$\begin{gathered}
\operatorname{rot} e = 0, \quad \operatorname{div}(e + 4\pi p) = 0 \\
e^{\alpha} - \beta^{\alpha\beta}p_\beta - Q^{\alpha\beta\lambda}\partial_\beta p_\lambda - \zeta^{\mu\nu\alpha}u_{\mu\nu} + \alpha^{\beta\alpha\lambda\theta}\partial_\beta\partial_\lambda p_\theta - \beta^{\alpha}s_1 + \\
+ \mu^{\mu\nu\lambda\alpha}\partial_\lambda u_{\mu\nu} + Q^{\mu\beta\alpha}\partial_\beta p_\mu + \nu^{\beta\alpha}\partial_\beta s_1 = s^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t}p_\beta - [\omega, P_0]_\beta\right) \\
\rho_0\frac{\partial^2 u^{\alpha}}{\partial t^2} = Q^{\alpha} + \partial_\beta\Big[\lambda^{\alpha\beta\lambda\theta}u_{\lambda\theta} + \mu^{\alpha\beta\lambda\theta}\partial_\lambda p_\theta + \zeta^{\alpha\beta\lambda}p_\lambda + \\
+ (\eta^{\alpha\beta} + \rho_0 T_0\delta^{\alpha\beta})s_1 + \tau^{\alpha\beta\lambda\theta}\frac{\partial}{\partial t}u_{\lambda\theta} + \frac{1}{2}(P_0{}^{\alpha}\Pi^{\beta} - P_0{}^{\beta}\Pi^{\alpha})\Big] \\
\rho_0(T - T_0) = \eta^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta} + \nu^{\alpha\beta}\partial_\alpha p_\beta + \nu s_1 + \beta^{\alpha}p_\alpha \\
\rho_0 T_0\frac{\partial s_1}{\partial t} = \varkappa^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta T, \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho_1 + \rho_0\partial_\alpha v^{\alpha} = 0
\end{gathered} \tag{2.4}$$

3. Изэнтропические волны в упругих поляризующихся средах. Рассмотрим в электростатическом приближении класс моделей упругих поляризующихся сред, для которых функция Λ_0 имеет вид

$$\begin{gathered}
-\Lambda_0 = \frac{2\pi}{\varepsilon - 1}P_\alpha P^{\alpha} + f(P_\alpha^\wedge, K_C) + \lambda_0^{\alpha\beta\lambda\theta}\varepsilon_{\alpha\beta}^\wedge\varepsilon_{\lambda\theta}^\wedge + \\
+ \zeta_0^{\alpha\beta\lambda}\varepsilon_{\alpha\beta}^\wedge P_\lambda^\wedge + \lambda_0^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}^\wedge
\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $P_\alpha^\wedge$ — компоненты вектора поляризации среды, вычисляемые в сопутствующей системе координат, f — заданная функция от аргументов, отмеченных в (3.1), определяющая энергию анизотропии, ε — задаваемая постоянная; постоянные компоненты тензоров K_C, $\lambda_0^{\alpha\beta\lambda\theta}$, $\lambda_0^{\alpha\beta}$, $\zeta_0^{\alpha\beta\lambda}$ задаются в зависимости от вида симметрии среды. В линеаризированной теории функция $-\Lambda_0$, определенная равенством (3.1), записывается в виде формулы (2.2), в которой

$$\begin{gathered}
\lambda^{\alpha\beta\lambda\theta} = \lambda_0^{\alpha\beta\lambda\theta} + \zeta^{\alpha\beta\theta}P_0{}^{\lambda} + \zeta^{\lambda\theta\beta}P_0{}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha\lambda}\left[P_0{}^{\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial P_\beta^\wedge}\right)_0 + \right. \\
\left. + P_0{}^{\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial P_\theta^\wedge}\right)_0\right] + P_0{}^{\alpha}P_0{}^{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial P_\beta^\wedge\partial P_\theta^\wedge}\right)_0 + \\
+ \frac{1}{2}\delta^{\alpha\lambda}(Q^{\theta\beta} + Q^{\beta\theta}) + \delta^{\alpha\theta}Q^{\lambda\beta} + \delta^{\lambda\beta}Q^{\alpha\theta} \\
\zeta^{\alpha\beta\lambda} = \zeta_0^{\alpha\beta\lambda} + \delta^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial P_\beta^\wedge}\right)_0 + P_0{}^{\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial P_\beta^\wedge\partial P_\lambda^\wedge}\right)_0
\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$C^\alpha = \frac{4\pi}{\varepsilon - 1} P_0{}^\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial P_\alpha^\wedge}\right)_0, \quad \beta^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{\varepsilon - 1}\delta^{\alpha\beta} + \left(\frac{\partial f}{\partial P_\alpha^\wedge \partial P_\beta^\wedge}\right)_0$$

$$Q^{\alpha\beta} = \zeta_0^{\alpha\beta\lambda} P_{0\lambda} + P_0{}^\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial P_\beta^\wedge}\right)_0 + \lambda_0^{\alpha\beta}$$

$$\alpha^{\alpha\beta\lambda\theta} = \mu^{\alpha\beta\lambda\theta} = Q^{\alpha\beta\lambda} = C^{\alpha\beta} = 0$$

Скобки $(\ )_0$ означает здесь, что функция, заключенная в скобки, вычисляется в начальном состоянии. Далее рассмотрим случай (соответствующий, например, пьезокерамическим средам), когда поляризующаяся среда обладает осевой симметрией, отсутствуют внешние силы ($Q_\alpha = 0$), а функция f и коэффициенты $\zeta_0^{\alpha\beta\lambda}$, $\lambda_0^{\alpha\beta}$, $\lambda_0^{\alpha\beta\lambda\theta}$ в Λ_0 и коэффициенты $S^{\alpha\beta}$, $\tau^{\alpha\beta\lambda\theta}$ в уравнениях (2.3) определены соотношениями

$$f = \frac{1}{2}(\beta_1{}^\circ\delta^{\alpha\beta} + \beta_2{}^\circ n^\alpha n^\beta) P_\alpha^\wedge P_\beta^\wedge, \quad s^{\alpha\beta} = \tau_\perp(\delta^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta) + \tau_\parallel n^\alpha n^\beta \tag{3.3}$$

$$\zeta_0^{\alpha\beta\lambda} = \zeta_1{}^\circ n^\alpha n^\beta n^\lambda + \zeta_2{}^\circ \delta^{\alpha\beta} n^\lambda + \zeta_3{}^\circ(\delta^{\alpha\lambda} n^\beta + \delta^{\beta\lambda} n^\alpha), \quad \tau^{\alpha\beta\lambda\theta} = 0$$

$$\lambda_0^{\alpha\beta\lambda\theta} = \lambda_1{}^\circ\delta^{\alpha\beta}\delta^{\lambda\theta} + \lambda_2{}^\circ(\delta^{\alpha\lambda}\delta^{\beta\theta} + \delta^{\alpha\theta}\delta^{\beta\lambda}) + \lambda_3{}^\circ(\delta^{\alpha\lambda} n^\beta n^\theta +$$
$$+ \delta^{\alpha\theta} n^\beta n^\lambda + \delta^{\lambda\beta} n^\alpha n^\theta + \delta^{\beta\theta} n^\alpha n^\lambda) + \lambda_4{}^\circ(\delta^{\alpha\beta} n^\lambda n^\theta + \delta^{\lambda\theta} n^\alpha n^\beta) +$$
$$+ \lambda_5{}^\circ n^\alpha n^\beta n^\lambda n^\theta, \quad \lambda_0^{\alpha\beta} = a_1\delta^{\alpha\beta} + a_2 n^\alpha n^\beta$$

в которых n^α — компоненты единичного вектора, направленного по оси анизотропии, β°, τ, ζ°, λ°, a — постоянные. Полагая, что вектор постоянной поляризации среды направлен по оси анизотропии $P_0{}^\alpha = P_0 n^\alpha$, для коэффициентов $\zeta^{\alpha\beta\lambda}$, $\beta^{\alpha\beta}$, $\lambda^{\alpha\beta\lambda\theta}$, C^α, $Q^{\alpha\beta}$ найдем

$$\beta^{\alpha\beta} = \beta_1\delta^{\alpha\beta} + \beta_2 n^\alpha n^\beta, \quad \zeta^{\alpha\beta\lambda} = \zeta_1 n^\alpha n^\beta n^\lambda + \zeta_2\delta^{\alpha\beta} n^\lambda + \zeta_3\delta^{\beta\lambda} n^\alpha + \zeta_4\delta^{\alpha\lambda} n^\beta \tag{3.4}$$

$$Q^{\alpha\beta} = [a_2 + P_0(\zeta_1{}^\circ + 2\zeta_3{}^\circ) + P_0{}^2(\beta_1{}^\circ + \beta_2{}^\circ)] n^\alpha n^\beta +$$
$$+ (a_1 + P_0\zeta_2{}^\circ)\delta^{\alpha\beta}, \quad C^\alpha = \beta^{\alpha\beta} P_{0\beta}$$

$$\lambda^{\alpha\beta\lambda\theta} = \lambda_1\delta^{\alpha\beta}\delta^{\lambda\theta} + \lambda_2(\delta^{\alpha\lambda}\delta^{\beta\theta} + \delta^{\alpha\theta}\delta^{\beta\lambda}) + \lambda_3\delta^{\alpha\lambda} n^\beta n^\theta +$$
$$+ \lambda_4(\delta^{\alpha\theta} n^\beta n^\lambda + \delta^{\lambda\beta} n^\alpha n^\theta) + \lambda_5\delta^{\beta\theta} n^\alpha n^\lambda +$$
$$+ \lambda_6(\delta^{\alpha\beta} n^\lambda n^\theta + \delta^{\lambda\theta} n^\alpha n^\beta) + \lambda_7 n^\alpha n^\beta n^\lambda n^\theta$$

Коэффициенты λ, ζ, β в (3.4) связаны с коэффициентами λ°, ζ°, β° в (3.3) равенствами

$$\beta_1 = \beta_1{}^\circ + \frac{4\pi}{\varepsilon - 1}, \quad \beta_2 = \beta_2{}^\circ, \quad \zeta_1 = \zeta_1{}^\circ + P_0\beta_2{}^\circ, \tag{3.5}$$

$$\zeta_2 = \zeta_2{}^\circ, \quad \zeta_3 = \zeta_3{}^\circ + P_0\beta_1{}^\circ$$

$$\zeta_4 = \zeta_3{}^\circ + (\beta_1{}^\circ + \beta_2{}^\circ)P_0, \quad \lambda_1 = \lambda_1{}^\circ, \quad \lambda_2 = \lambda_2{}^\circ, \quad \lambda_3 = \lambda_3{}^\circ - P_0{}^2(\beta_1{}^\circ + \beta_2{}^\circ)$$

$$\lambda_4 = \lambda_3{}^\circ + P_0\zeta_3{}^\circ, \quad \lambda_5 = \lambda_3{}^\circ + P_0(2\zeta_3{}^\circ + P_0\beta_1{}^\circ)$$

$$\lambda_6 = \lambda_4{}^\circ + P_0\zeta_2{}^\circ, \quad \lambda_7 = \lambda_5{}^\circ + P_0(2\zeta_1{}^\circ + P_0\beta_2{}^\circ)$$

Условие отсутствия напряжений в начальном состоянии ($Q^{\alpha\beta} = 0$) выполняется, если коэффициенты a_1, a_2 в (3.3) определить уравнениями

$$a_1 + P_0\zeta_2{}^\circ = 0, \quad a_2 + P_0(\zeta_1{}^\circ + 2\zeta_3{}^\circ) + P_0{}^2(\beta_1{}^\circ + \beta_2{}^\circ) = 0 \tag{3.6}$$

Отметим, что компоненты тензора $\xi^{\alpha\beta\lambda}$ в Λ_0, определяющие пьезоэлектрическую энергию, в общем случае несимметричны по индексам α, β, поэтому уравнение для поляризации в (2.4) связывает компоненты вектора напряженности электрического поля e^α не только с компонентами тензора деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta} = {}^1/_2\,(u_{\alpha\beta} + u_{\beta\alpha})$ (как в обычных линейных теориях), но также и с компонентами вектора поворота осей деформации $\Omega_\alpha = {}^1/_2\,\mathrm{rot}_\alpha\, u$. Таким же образом, упругая энергия ${}^1/_2\lambda^{\alpha\beta\lambda\theta}u_{\alpha\beta}u_{\lambda\theta}$ зависит как от $\varepsilon_{\alpha\beta}$, так и от Ω_α.

Полагая выполненными соотношения (2.3), (3.1)—(3.7), рассмотрим решения уравнений (2.4) в виде плоских изэнтропических волн

$$p^\alpha = p_0{}^\alpha \exp i\,(k_\lambda x^\lambda - \omega t), \quad u^\alpha = u_0{}^\alpha \exp i\,(k_\lambda x^\lambda - \omega t)$$
$$e^\alpha = e_0{}^\alpha \exp i\,(k_\lambda x^\lambda - \omega t)$$

где k_λ — компоненты волнового вектора, ω — частота волны, $p_0{}^\alpha$, $u_0{}^\alpha$, $e_0{}^\alpha$ — постоянные амплитуды. Рассмотрим сначала случай, когда $k_\lambda = kn_\lambda$. Из уравнений Максвелла, уравнений для поляризации и из уравнений импульсов в (2.4) находим

(3.7)
$$e^\alpha = -4\pi k^{-2}k^\alpha k_\lambda p^\lambda, \quad p^\alpha = \eta_1 e^\alpha + \eta_2 n^\alpha n_\lambda e^\lambda + \theta_1 u^\alpha + \theta_2 n^\alpha n_\lambda u^\lambda$$
$$\Big\{\Big[\rho_0\omega^2 - k^2\Big(\lambda_2 + \lambda_3 - \frac{i}{4}P_0{}^2\omega\tau_\perp\Big)\Big]\delta^{\alpha\beta} -$$
$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 + \lambda_5 + 2\lambda_6 + \lambda_7 + \frac{i}{4}P_0{}^2\omega\tau_\perp\Big)k^2n^\alpha n^\beta\Big\}u_\beta +$$
$$+ k\Big\{\Big(i\zeta_4 - \frac{1}{2}P_0\omega\tau_\perp\Big)\delta^{\alpha\beta} +$$
$$+\Big[i(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) + \frac{1}{2}P_0\omega\tau_\perp\Big]n^\alpha n^\beta\Big\}p_\beta = 0$$

Коэффициенты η, θ определяются следующим образом:

(3.8)
$$\eta_1 = \frac{1}{\beta_1 - i\omega\tau_\perp}, \quad \eta_2 = -\eta_1 + \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 - i\omega\tau_\parallel}$$
$$\theta_1 = k\eta_1\Big(-i\xi_4 + \frac{1}{2}P_0\omega\tau_\perp\Big), \quad \theta_2 = -\theta_1 - ik\,(\eta_1 + \eta_2)(\zeta_1 + \zeta_2 +$$
$$+ \zeta_3 + \zeta_4)$$

Из уравнений (3.7) следует дисперсионное уравнение для продольной (3.9) и поперечной (3.10) волны

(3.9)
$$\rho_0\omega^2 = k^2\Big[\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + \lambda_5 +$$
$$+ 2\lambda_6 + \lambda_7 - \frac{(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4)^2}{4\pi + \beta_1 + \beta_2 - i\omega\pi_\parallel}\Big]$$

(3.10)
$$\rho_0\omega^2 = k^2\Big[\lambda_2 + \lambda_3 + P_0\zeta_4 + \frac{1}{4}P_0{}^2\beta_1 - \frac{(\zeta_4 + {}^1/_2P_0\beta_1)^2}{\beta_1 - i\omega\tau_\perp}$$

Если ось x^3 системы координат направлена по вектору постоянной поляризации среды P_0, то для продольной волны, описываемой дисперсионным уравнением (3.9), имеем

(3.11) $\quad u^\alpha = (0, 0, u), \quad p^\alpha = (0, 0, p), \quad e^\alpha = (0, 0, 4\pi p)$

Величины u, p в равенствах (3.11) связаны соотношением

(3.12)
$$p = -u\,\frac{ik\,(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4)}{4\pi + \beta_1 + \beta_2 - i\omega\tau_\parallel}$$

Для поперечной волны, описываемой уравнением (3.10), имеем

(3.13) $\quad \rho_1 = 0, \quad e^\alpha = 0, \quad u^\alpha = (u^1, u^2, 0), \quad p^\alpha = (p^1, p^2, 0)$

причем

$$p^\alpha = u^\alpha \frac{k}{2} \frac{P_0\omega\tau_\perp - 2i\zeta_4}{\beta_1 - i\omega\tau_\perp} \tag{3.14}$$

В случае, когда волновой вектор k ортогонален вектору постоянной поляризации среды $k_\alpha n^\alpha = 0$, дисперсионное уравнение для продольной волны имеет вид

$$\rho_0\omega^2 = k^2\left(\lambda_1 + 2\lambda_2 - \frac{\zeta_2{}^2}{\beta_1 + \beta_2 - i\omega\tau_\parallel}\right) \tag{3.15}$$

Дисперсионные уравнения для поперечных волн в случае, когда $k_\alpha n^\alpha = 0$, записываются следующим образом:

$$\rho_0\omega^2 = \lambda_2 k^2 \tag{3.16}$$

$$\rho_0\omega^2 = k^2\left\{\lambda_2 + \lambda_5 - P_0\zeta_3 + \frac{1}{4}P_0{}^2(4\pi + \beta_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{[\zeta_3 - {}^1/{}_2 P_0(4\pi + \beta_1)]^2}{4\pi + \beta_1 - i\omega\tau_\perp}\right\}$$

Связь между p^α, u^α в рассматриваемом случае имеет вид

$$p^\alpha = -\frac{1}{2}\frac{2i\zeta_3 + P_0\omega\tau_\perp}{4\pi + \beta_1 - i\omega\tau_\perp} n_\beta u^\beta k^\alpha - \frac{i\zeta_2}{\beta_1 + \beta_2 - i\omega\tau_\parallel} n^\alpha k_\lambda u^\lambda \tag{3.17}$$

Дисперсионные уравнения (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) являются в общем случае уравнениями третьего порядка относительно частоты ω и второго порядка относительно компонент волнового вектора k_λ (явно разрешенными относительно k^2). Из уравнений (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) видно, что коэффициент $\tau_\perp$ в релаксационном члене Π^α уравнения для электрической поляризации среды определяет затухание поперечных волн, коэффициент $\tau_\parallel$ определяет затухание продольных волн. Если релаксация электрической поляризации не учитывается $\Pi^\alpha = 0$ ($\tau_\perp = \tau_\parallel = 0$), то дисперсионные уравнения (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) определяют обычные упругие волны, скорость распространения которых зависит от постоянных коэффициентов ζ, β в Λ_0, определяющих энергию анизотропии и пьезоэлектрическую энергию. Отметим, что при $\zeta_i = 0$ (когда не учитывается пьезоэлектрическая энергия), затухание рассмотренных продольных волн также не происходит; затухание же поперечных волн происходит и в отсутствие пьезоэлектрического эффекта.

Все полученные выше дисперсионные уравнения имеют вид

$$\rho_0\omega^2 = k^2\left(a - \frac{b}{c - i\omega\tau}\right) \tag{3.18}$$

где a, b, c, τ — некоторые положительные постоянные. Применительно к упругим поляризующимся средам такие дисперсионные уравнения (при $\tau = 0$) рассматривались, например, в [1]. При учете релаксации поляризации, когда $\tau \neq 0$, уравнение (3.18) дает для ω комплексное значение $\omega = \omega_0 - i\gamma$, где декремент γ определяет затухание волны. Из уравнения (3.18) получается, что декремент γ связан с волновым вектором следующим соотношением:

$$(\tau k)^2 = -2\rho_0\tau\gamma\frac{(2\tau\gamma - c)^2}{2a\tau\gamma - b} \tag{3.19}$$

График функции $\tau\gamma = f(\tau k)$, определенной согласно (3.19), в физически реальном случае при $b/a < c$ представляет собой монотонно возрастающую кривую, касающуюся оси τk в точке 0 и имеющую горизонтальную асимптоту $\tau\gamma = b/2a$.

Если учесть пространственную неоднородность электрической поляризации среды (внеся в формулу (3.1) для Λ_0 член $\alpha_{\cdot}^{\alpha\lambda}\nabla_{\alpha}^{\wedge}P_{\beta}^{\wedge}\cdot\nabla_{\lambda}^{\wedge}P^{\wedge\beta}$), то дисперсионные уравнения (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) сохранят свой вид, если коэффициент β_1 в них заменить на коэффициент $\beta_1{}^*$, определенный равенством $\beta_1{}^* = \beta_1 + \alpha^{\alpha\lambda}k_{\alpha}k_{\lambda}$.

Автор выражает признательность Седову Л. И. за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баженов В. М., Куценко Г. В., Улитко А. Ф.* Распространение плоских электроупругих волн в пьезокерамической среде.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 2, с. 124.
2. *Вендик О. Г., Мироненко О. Г.* Континуальная модель сегнетоэлектрической моды.— Физика твердого тела, 1974, т. 16, вып. 11, с. 3445.
3. *Желнорович В. А.* Намагничивающиеся и поляризующиеся сплошные среды с внутренним моментом количества движения в ньютонианской механике.— Магнитн. гидродин., 1977, № 2, с. 3.
4. *Желнорович В. А.* Модели материальных сплошных сред, обладающих внутренним электромагнитным и механическим моментами. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980, 174 с.
5. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред.— Успехи матем н., 1965, т. 20, вып. 5, с. 121.
6. *Желнорович В. А., Седов Л. И.* О вариационном выводе уравнений состояния для материальной среды и гравитационного поля.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 771.
7. *Седов Л. И.* О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 1, с. 14.
8. *Седов Л. И., Цыпкин А. Г.* О построении моделей сплошных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 387.
9. *Желнорович В. А.* О моделях намагничивающихся и поляризующихся сред с микроструктурой.— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 2, с. 333.

Москва

Поступила в редакцию
10.VI.1981