Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 6, 1981

УДК 539.3 : 624.011.78

О РАЗРУШЕНИИ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

Николаевский В. Н.

На основе вариационного термодинамического принципа выводится критерий квазистатического роста трещины в вязко-упругом теле: изменение суммы рассеяния и скорости убывания упругой энергии равно приращению поверхностной диссипации. Найден соответствующий инвариантный контурный интеграл. Предлагаемая теория пригодна для трещин любой формы при любом пути нагружения вязкоупругих тел. Рассмотрены примеры, в том числе рост трещины при локализованной вязкой диссипации.

1. Для системы тела с трещиной, находящегося под влиянием внешних воздействий, можно составить следующий баланс энергий:

$$P\Delta^{\cdot} + Q = \mathrm{E}^{\cdot} \tag{1.1}$$

где P — внешнее воздействие, Δ — соответствующее перемещение, Q — приток тепла, E — внутренняя энергия, и проводится дифференцирование по времени. Уравнение роста энтропии S имеет вид

$$TS^{\cdot} = T\Pi + Q \tag{1.2}$$

где T — температура, Π — скорость производства энтропии.

Исключение притока тепла Q позволяет выразить Π через свободную энергию тела $\Phi = \mathrm{E} - TS$ в изотермическом случае ($T = T_0$) следующим образом:

$$\Pi = (P/T_0)\Delta^{\cdot} + S^{\cdot} - (\mathrm{E}^{\cdot}/T_0) = (P/T_0)\Delta^{\cdot} - (\Phi^{\cdot}/T_0) \tag{1.3}$$

С другой стороны, можно ввести функцию рассеяния Ψ, а вариационный принцип наименьшего рассеяния энергии [1] требует, чтобы

$$\delta\,(\Pi - \Psi) = 0 \tag{1.4}$$

причем варьирование будем производить по силам P и длине трещины l.

Дальнейшие преобразования связаны с выделением специфических энергий, затрачиваемых на образование поверхностей разрушения. Так, в свободной энергии Φ выделяется [2] поверхностная энергия $2\gamma_0 l$:

$$\Phi = \Phi\,(l,\ P) = W\,(l,\ P) + 2\gamma_0 l, \quad \gamma_0 = \gamma_0\,(T_0,\ a) \tag{1.5}$$

где a — линейный масштаб (толщина) поверхностной зоны материала, W — упругая энергия тела с разрезом длины l, вычисляемая по удельной объемной [3] энергии U, причем G — сила Ирвина

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P} = \frac{\partial W}{\partial P} = \Delta^e, \quad \frac{\partial W}{\partial l} = -G \tag{1.6}$$

В отличие от анализа [2] здесь также выделена упругая часть Δ^e полного смещения $\Delta = \Delta^e + \Delta^p$, а W задается функцией сил P.

Рассеяние Ψ будем задавать следующим образом:

$$T_0\Psi = \Lambda(P,\ l) + 2\gamma_* l^{\cdot} + 2\xi l \tag{1.7}$$

Здесь Λ — диссипация в теле с разрезом, вычисляемая по удельной объемной [3] диссипации D, $2\gamma_* l^{\cdot}$ — скорость диссипации механической энергии, обусловленная скоростью роста трещины $l^{\cdot}$, но не зависящая от ее длины, $2\xi l$ — специфическая диссипация энергии в поверхностном слое, где $\xi = \xi(l^{\cdot})$ может зависеть от скорости роста трещины.

Условие автономности роста трещины состоит в том, что γ_0, γ_*, ξ не зависят от P.

Подстановка представлений (1.5) и (1.7) в уравнение (1.4) приводит к такому результату:

$$\delta(\Lambda + \partial W/dt) - \Delta^{\cdot}\delta P = -2\xi\delta l - 2\delta(\gamma l^{\cdot}) \tag{1.8}$$

причем будем считать, что вариации $\delta(\gamma l^{\cdot}) = 0$, $\gamma = \gamma_0 + \gamma_*$.

Величина 2ξ интерпретируется [3] как специфическая диссипация механической энергии, приходящаяся на единицу длины поверхностного слоя и обусловленная особой поверхностной вязкостью материала (вблизи прошедшей трещины). Ее величина оценивается соответственно:

$$\xi = \frac{[\mu]}{a}\left(\frac{a}{\tau}\right)^2 f\left(\frac{l^{\cdot}\tau}{a}\right) = \frac{[\mu]}{\mu}\frac{\gamma E}{\mu} f\left(\frac{l^{\cdot}\mu}{\gamma}\right), \quad \tau = \frac{\mu}{E}, \quad a = \frac{\gamma}{E} \tag{1.9}$$

Здесь $[\mu] = \mu_s - \mu$ — скачок динамической вязкости на поверхности разрыва, μ_s — поверхностная вязкость, μ — вязкость того же материала в объеме, E — модуль Юнга, τ — время релаксации.

Понятие особой поверхностной вязкости известно в гидродинамике. Оно вводилось для учета эффекта адсорбционной пленки [4]. В работе [3] величина 2ξ была выявлена как сопротивление росту трещины в идеализированной модели разрушения вязкого тела. Поверхностную вязкость и скорость поверхностной диссипации 2ξ целесообразно использовать и в механике вязкоупругих сред. Например, для таких сред, как полимеры, хорошо установлен [5] факт перестройки внутренней структуры вблизи поверхности разрушения. На эту перестройку затрачивается энергия, обычно учитываемая как поверхностная энергия γ_0, причем введение γ_* означает учет вязкой диссипации, имеющей место при этой перестройке. Естественно также полагать, что полоска материала с перестроенной структурой диссипирует механическую энергию при вязкоупругом деформировании иначе, чем до перестройки.

Приведем числовую оценку поверхностной диссипации по формуле $\xi \sim \gamma E/\mu$. Для значений $\gamma \sim 10^2$ Н/м, $E \sim 10^8$ Па, $\mu \sim 10$—10^4 Па·с, характерных для полимеров, имеем $\xi \sim 10^9$—10^6 Н·м$^{-1}$·с$^{-1}$. Отсюда, $\xi l \gg \gamma l^{\cdot}$ при вполне реальном условии $(10^4$—$10^7)\ l \gg (l^{\cdot}\cdot c)$ для квазистатического роста малых трещин. При этом толщина поверхностного слоя $a \sim 10^{-6}$ м, $\tau \sim 10^{-7}$—10^{-4} с, характерная скорость течения в слое $a/\tau \sim (10$—$10^{-2})$ м/с.

Вариационное уравнение (1.8) распадается на два независимых соотношения, первое из которых определяет неупругую часть скорости смещения

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial P} = \Delta^{\cdot} - \frac{\partial W}{\partial P} = \Delta^{\cdot} - \Delta^{\cdot e} = \Delta^{\cdot p},$$

а второе дает критерий роста трещины в вязкоупругом теле

$$N \equiv -\frac{\partial}{\partial l}\left(\Lambda + \frac{\partial W}{\partial t}\right) \equiv -\frac{\partial\Lambda}{\partial l} + \frac{\partial G}{\partial l} l^{\cdot} = 2\xi \tag{1.10}$$

Иначе говоря, трещина растет, если сумма изменений диссипации и скорости убывания потенциальной энергии тела достигает критического уровня, обуславливаемого правой частью равенства (1.10).

2. Для вязкоупругих (ползучих) сред принято вводить функцию $T_0\Psi^\circ$, такую что:

(2.1) $$e_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}} = T_0 \frac{\partial \Psi^\circ}{\partial \sigma_{ij}}, \quad T_0\Psi^\circ = 2D + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Тем самым, функция $T_0\Psi^\circ$, называемая дополнительной мощностью деформации, выполняет для скоростей деформации $e_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}$ роль потенциала, которую играет упругая энергия U для деформаций упругого тела. Интеграл по объему V тела

$$T_0 \int\limits_V \Psi^\circ dV = \Lambda + \frac{\partial W}{\partial t}, \quad W = \int U\, dV$$

есть дополнительная мощность деформации тела $T_0\Psi$, которая включает в себя в качестве параметра длину трещины l. Для функции $T_0\Psi$ формулируется вариационный принцип стационарности, вполне аналогичный принципу (1.4), а вывод критерия (1.10) фактически использует прием нахождения «лишнего» неизвестного l. Начальное условие $l = l_0$ при $t = 0$ для дифференциального уравнения (1.10) будем определять по решению упругой задачи.

Для анализа роста трещины в вязкоупругой плоскости (материал Максвелла), растягиваемой усилиями P, воспользуемся обычными представлениями

$$D = P^2/(2\mu), \quad U = P^2/(2E)$$

Так как избыточные значения упругой энергии и скорости диссипации пропорциональны площади концентрации напряжений, т. е. l^2, то

(2.2) $$\Lambda = \theta_1 l^2 P^2/(2\mu) + \text{const}, \quad W = -\theta_2 l^2 P^2/(2E) + \text{const}$$

где θ_1, θ_2 — некоторые числовые коэффициенты, а постоянные не зависят от длины трещины.

Подстановка оценки (2.2) в условие роста трещины (1.10) при $\gamma = \text{const}$ приводит к такому дифференциальному уравнению

(2.3) $$2\xi - \theta_1 l\,(P^2/\mu) + \theta_2 l^{\boldsymbol{\cdot}}\,(P^2/E) = 0$$

Если скорость роста трещины $l^{\boldsymbol{\cdot}}$ не влияет на поверхностную диссипацию: $f = f_0 = \text{const}$ в представлении (1.9), то $\xi = \text{const}$ и решение уравнения (2.3) имеет экспоненциальный вид

(2.4) $$l - l_* = (l_0 - l_*) \exp\left(\frac{E}{\mu}\frac{\theta_1}{\theta_2} t\right), \quad l_* = \frac{\xi\mu}{\theta_1 P^2} \left(= \frac{f_0}{\theta_1} \frac{\gamma E}{P^2} \frac{[\mu]}{\mu}\right)$$

Трещина в вязкоупругом теле растет, если ее начальная длина l_0 больше порогового значения l_*, при котором изменение диссипации в теле на единицу длины трещины достигает уровня поверхностной диссипации. При $l_0 > l_*$ оказывается возможным рост трещины за счет высвобождения упругой энергии. С другой стороны, если длина l_0 больше l_*, но меньше критического гриффитсовского значения длины l_G, определяемого из уравнения

$$(2.5)\qquad G(l_G) \equiv \theta_2(P^2 l_G/E) = 2\gamma$$

то решение (2.4) описывает подрастание трещины до значения l_G. Если же $l_0 = l_G$, то из уравнения (2.3) можно определить конечную стартовую скорость роста трещины

$$(2.6)\qquad l^{\cdot}(0) = \frac{2E^2}{\theta_2 P^2}\left(\frac{\xi\mu}{\gamma E} - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right)\frac{\gamma}{\mu} = \frac{2E^2}{\theta_2 P^2}\left(\frac{[\mu]}{\mu}f_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right)\frac{a}{\tau}$$

Второй частный случай: $\xi = \zeta l^{\cdot 2}$, $\xi = [\mu]/a = \mathrm{const}$. Тогда уравнение (2.3) принимает вид

$$(2.7)\qquad \frac{d(l/a)}{-1 + \{1 + \beta(l/a)\}^{1/2}} = \alpha\, dt, \quad \alpha = \frac{\theta_2}{4}\frac{P^2}{E[\mu]}, \quad \beta = 8\frac{\theta_1}{\theta_2}\frac{E^2}{P^2}\frac{[\mu]}{\mu}$$

а его решение таково:

$$(2.8)\qquad \left(-1 + \sqrt{1 + \beta(l/a)}\right) + \ln\left(-1 + \sqrt{1 + \beta(l/a)}\right) = {}^1/_2\alpha\beta t + \mathrm{const}$$

Из уравнения (2.3) следует условие применимости расчета разрыва по вязкой модели [3], а именно, трещина должна быть намного длиннее своего приращения за время релаксации: $l \gg l^{\cdot}\tau$. При постоянстве поверхностной диссипации такая трещина равновесно растет только при спаде растягивающего усилия согласно (2.4). При зависимости поверхностной диссипации от скорости $l^{\cdot}$ трещина в вязкой плоскости равновесно растет и при фиксированном разрывающем усилии. Из решения (2.8) для подобной ситуации следует параболический закон $l \sim t^2$ [3], который соответствует критическому условию разрушения вязкого тела

$$(2.9)\qquad -\partial\Lambda/\partial l = 2\xi$$

В противном случае пренебрежимо малых диссипаций $\Lambda = \xi = 0$ перестановочность операции варьирования и дифференцирования по времени приводит вариационное соотношение (1.8) к известному представлению

$$\delta W - \Delta\delta P = -2\gamma\delta l, \quad \Delta \equiv \Delta^e$$

что дает классический результат обобщенного условия Гриффитса (2.5)

$$G = -\partial W/\partial l = 2\gamma, \quad \gamma = \gamma_* + \gamma_0$$

Полное решение задачи требует нахождения зависимости $\xi(l^{\cdot})$, для чего необходим анализ тонкой структуры зоны разрушения с использованием данных о скоростной зависимости энергии разрушения.

3. Для нахождения инвариантного контурного интеграла следует рассмотреть продифференцированное по времени уравнение притока тепла

$$(3.1)\qquad \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \sigma_{ij}\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j}\right\} = 0, \quad L = 0$$

где ε — удельная внутренняя энергия, σ_{ij} — напряжение, q_j — приток тепла, e_{ij} — деформация, причем u_i — смещение, v_i — скорость смещения

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = e_{ij}^{\cdot} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

Перейдем в подвижную систему координат t' и x_j' по правилу

$$t = t', \quad x_k = x_k' + l_k^{\cdot} t$$

$$\partial/\partial t' = \partial/\partial t + l_k^{\cdot}\delta_{kj}\partial/\partial x_j, \quad \partial/\partial x_k' = \partial/\partial x_k$$

Тогда в предположении о стационарности полей в подвижной системе координат имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) = l_k^{\cdot}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(l_n^{\cdot}\delta_{nj}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) = l_n^{\cdot}\delta_{nj}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(l_k^{\cdot}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial e_{ij}}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{ij}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}v_i) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_n}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) l_n^{\cdot} l_k^{\cdot},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k}\right) l_k^{\cdot}$$

где штрихи опущены, δ_{nj} — единичный тензор. Тогда уравнение (3.1) принимает вид

$$l_n^{\cdot}\delta_{nj}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j \partial x_k} - l_n^{\cdot}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_j \partial x_k} \tag{3.2}$$

Проинтегрируем уравнение (3.2) по области $A_{\beta-\alpha}$ стационарного состояния между контурами Γ_α и Γ_β, последовательно охватывающими вершину трещины. Это приводит к контурному интегралу второго рода (по терминологии [6]):

$$\int_{\Gamma_\beta} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(l^{\cdot}_n\delta_{nj}\varepsilon - \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_n} l_n^{\cdot} - q_j\right) n_j\, d\Gamma = \tag{3.3}$$

$$= \int_{\Gamma_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_k}(\ldots)\cdot n_j\, d\Gamma = \mathrm{const}$$

где n_j — компонента нормали к контуру Γ_β. Поскольку в области A_α (внутри контура Γ_α, непосредственно охватывающего вершину трещины) справедливо уравнение притока тепла $L = 0$, то при обычных [3] ограничениях на бортах разреза (отсутствие потоков) интеграл (3.3) по контуру Γ_α равен нулю, а следовательно, и постоянная в правой части (3.3) равна нулю.

Если ввести удельную внутреннюю энергию ε_v частиц, принадлежащих объемной фазе [3], то интеграл (3.3) принимает следующий вид:

$$I_k = \int_{\Gamma_\beta} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(l^{\cdot}\delta_{nj}\varepsilon_v - \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_n} l_n^{\cdot} - q_j\right) n_j\, d\Gamma = \tag{3.4}$$

$$= \int_{\Gamma_\alpha} l_n^{\cdot}\delta_{nj}\frac{\partial}{\partial x_k}(\varepsilon_v - \varepsilon)\, n_j\, d\Gamma$$

Рассмотрим далее продифференцированное по времени уравнение производства энтропии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(T\frac{\partial s}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_{ij}e_{ij}^{\cdot p}) \tag{3.5}$$

В подвижной системе координат, при наличии зоны $A_{\beta-\alpha}$ стационарного и изотермического состояния, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(T\frac{\partial s}{\partial t}\right)=T_0 l_n^{\cdot} l_k^{\cdot}\frac{\partial^2 s}{\partial x_j \partial x_i}\delta_{nj}\delta_{ki};\quad T=T_0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_{ij}e_{ij}^{\cdot p})=2\frac{\partial D}{\partial t}=-2l_k^{\cdot}\delta_{kj}\frac{\partial D}{\partial x_j}$$

Интегрирование уравнения (3.5) по области $A_{\beta-\alpha}$ приводит к следующему инвариантному интегралу:

$$\int\limits_{\Gamma_\beta}\frac{\partial}{\partial x_k}(T_0 l_n^{\cdot}\delta_{nj}s-q_j)\,n_j\,d\Gamma+2D\delta_{kj}n_j\,d\Gamma=2\frac{\partial\gamma_*}{\partial l_k}l_k^{\cdot} \tag{3.6}$$

причем в правой части стоит производная от сингулярной диссипации (внутри Γ_α), включаемая в интегральный аналог дифференциального соотношения (3.5). Введение объемных удельных функций s_v и D_v сводит контурный интеграл (3.6) к следующему:

$$\begin{aligned} F_k=&\int\limits_{\Gamma_\beta}\frac{\partial}{\partial x_k}(T_0 l_n^{\cdot}\delta_{nj}s_v-q_j)\,n_j\,d\Gamma+2D_v\delta_{kj}n_j\,d\Gamma=\\ =&\int\limits_{\Gamma_\alpha}T_0 l_n^{\cdot}\frac{\partial}{\partial x_k}(s_v-s)\,\delta_{nj}n_j\,d\Gamma+\\ &+2\int\limits_{\Gamma_\alpha}(D_v-D)\,\delta_{kj}n_j\,d\Gamma+2\frac{\partial\gamma_*}{\partial l_k}l_k^{\cdot}\end{aligned} \tag{3.7}$$

Наконец, разность интегралов (3.4) и (3.7) приводит к результирующему контурному интегралу вокруг вершины трещины в вязкоупругом теле:

$$\begin{aligned} N_k=F_k-I_k=&\int\limits_{\Gamma_\beta}\left(2D\delta_{kj}-\frac{\partial U}{\partial x_k}\delta_{kj}l_n^{\cdot}-\sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)\times\\ &\times n_j\,d\Gamma=F_k^{\circ}-I_k^{\circ}=N_k^{\circ}\end{aligned} \tag{3.8}$$

или иначе

$$N_k=\int\limits_{\Gamma_\beta}\left(2D+\frac{\partial U}{\partial t}\right)n_k\,d\Gamma-\sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}n_j\,d\Gamma=N_k^{\circ} \tag{3.9}$$

где k — индекс оси, вдоль которой растет трещина, а индекс объемной фазы опущен. Постоянная N_k° оценивается (см. [3]) путем рассмотрения потоков через контур Γ_α:

$$N_k^{\circ}=\lim_{a\to 0}\int\limits_{-a}^{a}\left\{2[D]+\frac{\partial[f(T_0)]}{\partial t}\right\}dx_2+2\frac{\partial\gamma_*}{\partial t}=2\left(\xi+\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right) \tag{3.10}$$

$$U=\varepsilon-T_0 s,\quad \lim\,[f(T_0)]\,a=\gamma_0$$

где $[D]=D_s-D_v$ — скачок диссипации, $[f(T_0)]=f_s-f$ — скачок изотермического свободного потенциала (упругой энергии U) на поверхности разрушения.

Что касается величины 2ξ, то она фигурировала выше, и представление (3.10) соответствует ее оценке (1.9). Результат (3.9), (3.10) непосредственно обобщает результаты [3] на случай разрушения вязкоупругих тел.

Если принять далее, что поле скоростей смещений разложимо на упругую и вязкую составляющие: $v_i = v_i^e + v_i^p$, то контурный интеграл (3.9) представляется в виде двух слагаемых

$$N_k = -\frac{\partial \Lambda}{\partial l_k} + l_k^{\cdot} \frac{\partial G}{\partial l_k} = N_k^{\circ} \tag{3.11}$$

вычисляемых отдельно

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial l_k} = -\int\limits_{\Gamma_\beta} 2Dn_k\, d\Gamma - \sigma_{ij}\frac{\partial v_i^p}{\partial x_k} n_j\, d\Gamma$$

$$\frac{\partial G^{\cdot}}{\partial l_k} l_k^{\cdot} = \int\limits_{\Gamma_\beta} \frac{\partial U}{\partial t} n_k\, d\Gamma - \sigma_{ij}\frac{\partial v_i^e}{\partial x_k} n_j\, d\Gamma$$

Для прямолинейно распространяющейся трещины можно опустить индекс k. Тогда контурный интеграл (3.11) приводит к следующему критерию разрушения:

$$N = -\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial l} - l^{\cdot}\frac{\partial G}{\partial l}\right) = 2\xi + 2\frac{\partial \gamma}{\partial a} a^{\cdot} \tag{3.12}$$

что совпадает с результатом (1.10) при неизменном линейном масштабе ($a = \mathrm{const}$).

Определение величин Λ, G из решения задачи в напряжениях:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial l} = -(\varkappa + 1)^{-1}\frac{K^2}{8\mu}, \quad G = -\frac{\partial W}{\partial l} = (\varkappa + 1)^{-1}\frac{K^2}{4E}(1 + \nu)$$

где $E/(2 + 2\nu)$ — модуль сдвига, K — коэффициент интенсивности напряжений ($\varkappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ — для плоского напряжённого состояния, ν — коэффициент Пуассона) превращает условие (3.12) в дифференциальное уравнение

$$\frac{K^2}{\mu} - l^{\cdot}\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial K^2}{\partial l} = 16(\varkappa + 1)\left(\xi + \frac{\partial \gamma}{\partial a} a^{\cdot}\right) \tag{3.13}$$

Корни этого уравнения определяют критические (разрушающие) значения $K = K_c$. При $\gamma = \mathrm{const}$ и вязком подрастании трещины $K_c \sim \sqrt{\xi}$, т. е. K_c постоянно при $\xi = \mathrm{const}$, но пропорционально скорости $l^{\cdot}$ при $\xi \sim l^{\cdot 2}$.

При растяжении линейной вязкоупругой полости с трещиной $K = P\sqrt{\pi (l/2)}$, и уравнение (3.13) при $\gamma = \mathrm{const}$ принимает вид

$$2\xi - \frac{\pi P^2}{16(\varkappa+1)\mu} l + \frac{\pi P^2(1+\nu)}{8(\varkappa+1)E} l^{\cdot} = 0 \tag{3.14}$$

Сравнение (3.14) и (2.3) показывает, что

$$\theta_1 = (\pi/16)(\varkappa + 1)^{-1}, \quad \theta_2 = (\pi/8)(\varkappa + 1)^{-1}(1 + \nu)$$

4. Если диссипация локализована в вершине трещины [3], то $\Lambda = \xi = 0$ и достаточно условия (2.5), но следует учитывать зависимость $\gamma_*(l^{\cdot})$. Если локализованная диссипация носит вязкий характер, то из

второго порядка однородности диссипативной функции следует [7], что

$$(4.1)\qquad D \sim \gamma_* l^{\cdot} = \eta l^{\cdot 2}$$

причем, вообще говоря, $\eta = \eta\,(l^{\cdot}\tau/a)$, $\tau = \mu/E$. Для вязкопластических бингамовых сред $\eta = \eta\,(Y/E)$ — коэффициент сопротивляемости (по терминологии [7]) оказывается материальной константой. Здесь Y — предел текучести.

Для бингамовой плоскости с трещиной нормального разрыва длины l, растягиваемой усилиями P, имеем $G = \pi\,(P^2/E)(l/4)$. Условие (2.5) приводит к следующему дифференциальному уравнению квазистатического роста трещины:

$$(4.2)\qquad l^{\cdot}\left(l^{\cdot} - \frac{\pi P^2}{4E\eta}\,l + \frac{\gamma_0}{\eta}\right) = 0$$

Отсюда следуют решения для покоящейся ($l^{\cdot} = 0$) трещины и растущей

$$(4.3)\qquad l - l_G = (l_0 - l_G)\exp\left(\frac{\pi P^2}{4E\eta}\,t\right),\quad l_G = \frac{4E\gamma_0}{\pi P^2}$$

Иначе говоря, роль пороговой начальной длины l_0 трещины играет гриффитсовское значение l_G, причем показатель экспоненты, в отличие от (2.4), растет с ростом растягивающего усилия P.

Уильямс [8] предложил решение для роста трещины в растягиваемой вязкоупругой плоскости (из материала Кельвина—Фойгта), согласно которому фактически использовалась идея о локализованной диссипации

$$(4.4)\qquad 2D = \eta_0 l^{\cdot 2}\,(P/E)^2$$

независимой от длины трещины. Однако уровень диссипации (4.4) тем выше, чем выше скорость трещины. Сопоставление формул (4.1) и (4.4) показывает, что $2\eta = \eta_0\,(P/E)^2$. Введение последнего значения η в решение (4.3) приводит к результату [8], согласно которому показатель экспоненты оказывается независимым от P.

Степенные зависимости γ_* от скорости $l^{\cdot}$ трещины предлагались в работе [9]. Развитие трещин в таких реальных материалах как полимеры осложняется сопутствующими температурными эффектами, что приводит к сложным зависимостям энергетических затрат от скорости трещин [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gyarmati I.* Non — equilibrium thermodynamics. Field theory and variational principles. Berlin — Heidelberg — New York: Springer, 1970, 184 p. (Рус. перев.: М.: Мир, 1974, 304 с.)
2. *Rice J. R.* Thermodynamics of the quasi — static growth of Griffith cracks.— J. Mech. Phys. Solids, 1978, v. 26, No. 2, p. 61—78.
3. *Николаевский В. Н.* Термодинамика роста трещин. Разрушение упругих, почти-упругих и вязких тел.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 95—106.
4. *Dryden H. L., Murnaghan F. D., Bateman H.* Hydrodynamics. New York: Dover, 1956. 634 p.
5. *Liebowitz H.* Ed., Fracture, V. 7, New York — London: Acad Press, 1972. 1044 p. (Рус. перев.: М.: Мир, 1976, 469 с.)
6. *Черепанов Г. П.* Инвариантные Г-интегралы и некоторые их приложения в механике.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 3, с. 399—412.
7. *Nikolaevskii V. N.* On a certain general formulation of the fracture criterion in solids.— Arch. Mech. Stosowanej, 1976, v. 28, No. 2, p. 199—204.
8. *Williams M. L.* The fracture of viscoelastic material.— In: Fracture of solids. New York — London: Gordon and Breach, 1963. 157—188 p.
9. *Вакуленко А. А.* О распространении трещин в полимерах.— Научн. тр. кубанск. ун-та, 1978, № 268, с. 5—12.
10. *Алешин В. И., Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В.* Кинетика роста магистральных трещин в одноосно растягиваемых полимерных образцах.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 112—119.

Москва

Поступила в редакцию
2.IV.1980