

УДК 624.07 : 534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНО-ВЯЗКОУПРУГИХ АРМИРОВАННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.

Исследуется устойчивость неоднородно-стареющих армированных вязкоупругих стержней. Предполагается, что деформации и напряжения в арматуре связаны законом Гука. Свойства основного материала описываются уравнениями теории вязкоупругости неоднородно-стареющих тел [1, 2]. При различных условиях закрепления концов стержня и способах нагружения установлено выражение критической силы в задачах устойчивости на бесконечном интервале времени. Принятое определение устойчивости соответствует определению устойчивости по Ляпунову движения динамических систем. Для задач устойчивости на конечном интервале времени получены оценки критического времени, когда величина прогиба вязкоупругого стержня достигает заданного значения. Сформулированная постановка задачи устойчивости на конечном интервале времени исходит из определений устойчивости движения динамических систем, берущих свое начало с работы Четаева. Численно исследована зависимость критического времени от неоднородности и параметра армирования. Устойчивость вязкоупругих неармированных стержней изучалась в работах [3, 4]. Обзор и библиография работ, связанных с задачей устойчивости вязкоупругих стержней, имеются в [5—8].

1. Модель неоднородно-стареющего вязкоупругого тела. Модель неоднородно-стареющего вязкоупругого тела с изменяющимися во времени упругими и реологическими свойствами характерна своей специфической неоднородностью. Эта неоднородность обусловлена тем, что процесс естественного или искусственного старения в таком теле протекает неодинаково во всех его элементах. Поэтому возраст материала, вообще говоря, зависит от пространственных координат, что в свою очередь определяет вид функции, характеризующей свойства вязкоупругого тела в зависимости от времени и пространственных координат.

Указанная модель может служить для описания процессов дискретного и непрерывного наращивания вязкоупругих тел элементами различного возраста. Уравнение состояния, связывающее деформацию $\varepsilon_x(t)$ с напряжением $\sigma_x(t)$, для неоднородно-стареющего вязкоупругого тела при одноосном напряженном состоянии имеет следующий вид:

$$(1.1) \quad \varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t + \rho(x))} - \int_{t_0}^t \sigma_x(s) K(t + \rho(x), s + \rho(x)) ds$$

$$(1.2) \quad K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + N(t, \tau) \right]$$

Здесь $K(t, \tau)$ — ядро ползучести для однородно-стареющего тела, $E(t)$ — переменный модуль упругомгновенной деформации, $N(t, \tau)$ —

мера ползучести материала, t_0 — момент приложения напряжений, $\rho(x)$ — возраст элемента с координатой x относительно элемента с координатой $x = 0$.

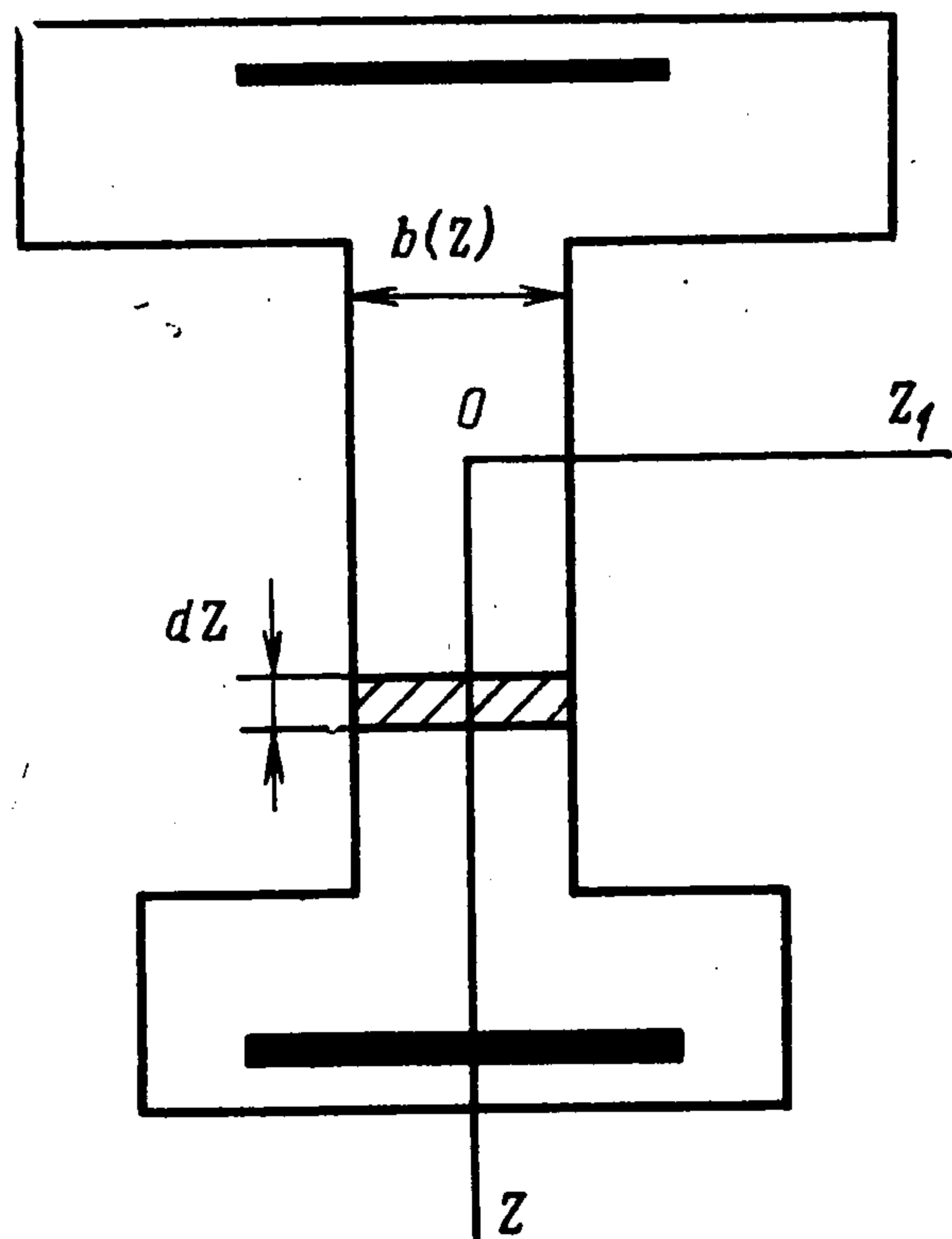
2. Уравнение прогиба армированного вязкоупругого стержня. Выведем уравнение для прогибов армированного неоднородно-вязкоупругого стержня при следующих гипотезах:

1) деформации и напряжения в арматуре удовлетворяют закону Гука, а основного материала — соотношениям (1.1), (1.2);

2) в каждом сечении стержня центр тяжести арматуры совпадает с центром тяжести основного материала; поперечные сечения стержня одинаковы и одинаково ориентированы;

3) в процессе деформирования поперечные сечения элементов стержня остаются плоскими и справедлив закон плоских сечений.

Введем в поперечном сечении стержня декартову систему координат с началом O в центре тяжести поперечного сечения. За ось z примем линию пересечения плоскости изгиба стержня с плоскостью поперечного сечения. Ось z_1 совпадает с нейтральной осью (см. фиг. 1). След арматуры на фиг. 1 показан сплошной линией.



Фиг. 1

В силу закона плоских сечений имеем

$$(2.1) \quad \varepsilon_x(t, z) = \omega(t)z$$

где $\omega(t)$ — кривизна нейтральной линии стержня в момент t .

Закон вязкоупругости основного материала примем в виде (1.1), (1.2) при постоянном модуле упругомгновенной деформации E и мере ползучести $N(t, \tau)$, удовлетворяющей равенству

$$(2.2) \quad N(t, \tau) = \varphi(\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$$

В соответствии с законом Гука для i -го прутка арматуры будет

$$(2.3) \quad \sigma_a^i(t) = E_a \varepsilon_a^i(t)$$

Уравнение равновесия дает

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^n F_a^i \sigma_a^i z_i + \int_F \sigma_x(t, z) z b(z) dz = M(t, x)$$

Здесь F_a^i — площадь поперечного сечения i -го прутка арматуры, F — площадь основной части сечения, $M(t, x)$ — изгибающий момент в сечении x .

Из соотношений (2.1), (1.1) следует, что

$$(2.5) \quad \sigma_x(t, z) = Ez \left[\omega(t) + \int_{t_0}^t \omega(\tau) R(t + \rho(x), \tau + \rho(x)) d\tau \right]$$

Здесь $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $EK(t, \tau)$. Подставив (2.3), (2.5) в уравнение равновесия (2.4), получим

$$(2.6) \quad \omega(t) + \beta \int_{t_0}^t \omega(\tau) R(t + \rho(x), \tau + \rho(x)) d\tau = -\frac{1}{JE} M(t, x)$$

$$J = E^{-1} (E_a J_a + EJ_1), \quad \beta = J_1 J^{-1}$$

Здесь J_a — момент инерции арматуры относительно оси Oz_1 , через J_1 обозначен момент инерции поперечного сечения основного материала относительно оси Oz_1 .

Далее ввиду ([9] стр. 185) и равенств (1.2), (2.2) имеем

$$(2.7) \quad R(t, \tau) = -\gamma \varphi(\tau) E + [\gamma^2 \varphi(\tau) E + \gamma^2 \varphi^2(\tau) E^2 + \\ + \gamma \varphi'(\tau) E] \int_{\tau}^t e^{-\eta(s) + \eta(\tau)} ds, \quad \eta(t) = \gamma \int_{t_0}^t [1 + E\varphi(s)] ds$$

Кроме того

$$(2.8) \quad \omega(t) = y''(t, x) - y_0''(x), \quad y'(t, x) = \partial y(t, x) / \partial x$$

Здесь $y(t, x)$ — прогиб нейтральной оси, координата x , $0 \leq x \leq l$; $y_0(x)$ — начальная погибь стержня. Подставим (2.7), (2.8) в (2.6) и продифференцируем полученное два раза по t . Получим уравнение для прогиба

$$(2.9) \quad 0 = y^{(4)}(t, x) + \gamma [1 + E\varphi(t + \rho(x)) (1 - \beta)] y''(t, x) + \\ + \frac{1}{EJ} M''(t, x) + \frac{\gamma}{EJ} M'(t, x) [1 + E\varphi(t + \rho(x))] \\ y'(t, x) = \partial y(t, x) / \partial t, \quad t \geq t_0$$

Для неармированных стержней (т. е. при $\beta = 1$) уравнение (2.9) приведено ранее в [4]. Величина прогиба $y(t_0, x)$ в начальный момент времени t_0 непосредственно после приложения напряжений удовлетворяет уравнению

$$(2.10) \quad y''(t_0, x) + \frac{1}{EJ} M(t_0, x) = y_0''(x)$$

Скорость изменения прогиба в начальный момент времени (т. е. производная $y'(t, x)$ при $t = t_0$) удовлетворяет уравнению

$$(2.11) \quad y'''(t_0, x) + \frac{1}{EJ} M'(t_0, x) = -\frac{\gamma\beta}{J} \varphi(t_0 + \rho(x)) M(t_0, x)$$

Для того чтобы определить из уравнений (2.10), (2.11) величины $y(t_0, x)$ и $y'(t_0, x)$, необходимо задать конкретные способы нагружения стержня и условия закрепления его концов, определяющие изгибающий момент $M(t, x)$ и граничные условия.

3. Устойчивость на бесконечном интервале времени. Поскольку способы исследования на устойчивость для различных ситуаций близки друг другу, ниже подробно изучается устойчивость стержня, нижний конец которого ($x = l$) заделан, а верхний свободен, под действием распределенной нагрузки. В отношении остальных случаев ограничимся постановкой задачи и формулировкой условий устойчивости.

В недеформированном состоянии стержень расположен вдоль оси Ox . Прогиб стержня $y(t, x)$ в точке x в момент $t \geq t_0$ отсчитывается от оси Ox .

Стержень называется устойчивым, если для любого $\delta_1 > 0$ найдется такое $\delta_2 > 0$, что при $t \geq t_0$, $0 \leq x \leq l$ будет

$$(3.1) \quad \sup_{t,x} |y(t, x)| < \delta_1 \quad \text{при} \quad \sup_x |y_0(x)| < \delta_2$$

Уравнение для прогиба имеет вид (2.9). Функция неоднородного старения $\rho(x)$ в этом уравнении предполагается ограниченной, кусочно непрерывно дифференцируемой и имеющей конечное число точек разрыва производной.

Из условий закрепления концов стержня вытекают следующие граничные условия:

$$(3.2) \quad y(t, 0) = 0, \quad y''(t, 0) = 0, \quad y'(t, l) = 0$$

Функция φ положительна, непрерывно дифференцируема и

$$(3.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = C_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) = 0, \quad C_0 > 0$$

Стержень находится под действием постоянной продольной нагрузки величины g . Изгибающий момент $M(t, x)$ в сечении x задается выражением

$$(3.4) \quad M(t, x) = g \int_0^x (y(t, x) - y(t, z)) dz$$

Введем в рассмотрение последовательность $\psi_n(x)$ собственных функций и последовательность λ_n собственных значений краевой задачи

$$(3.5) \quad \psi_n''(x) + \lambda_n x \psi_n(x) = 0, \quad \psi_n(l) = 0, \quad \psi_n'(0) = 0$$

Известно, что функции $\psi_n(x)$ ортонормированы в обобщенном смысле, т. е. (см., например, [10])

$$(3.6) \quad \int_0^l \psi_n(x) \psi_m(x) x dx = 0, \quad \delta_{nm} = 0, \quad n \neq m, \quad \delta_{nm} = 1, \quad n = m$$

Представим производную $y'(t, x)$ в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда по функциям $\psi_n(x)$:

$$(3.7) \quad y'(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \psi_n(x),$$

$$(3.8) \quad A_n(t) = \int_0^l \psi_n(x) y'(t, x) x dx$$

Подставим (3.4), (3.7) в (2.9), продифференцируем обе части полученного равенства по x , затем домножим на $\psi_n(x)$ и проинтегрируем по x от нуля до l . В результате получим

$$(3.9) \quad \mu_n (A_n'' + \gamma A_n') + \gamma E C_0 A_n' + \gamma E \sum_{m=0}^{\infty} A_m \bar{\beta}_{mn}(t) + \alpha_{mn} = 0,$$

$$\mu_n = 1 - EJg^{-1}\lambda_n$$

$$\bar{\beta}_{mn} = \int_0^l x \psi_m(x) \psi_n(x) \varphi(t + \rho(x)) dx +$$

$$+ \int_0^l \psi_n(x) \left[\int_0^x dz \int_z^x \psi_m(s) ds \right] dx \varphi(t + \rho(x)) = \beta_{mn} + C_0 \delta_{mn}$$

$$(3.10) \quad \alpha_{mn} = \gamma E (1 - \beta) \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_0^l \psi_n(x) dx [\varphi(t + \rho(x)) \psi_m'(x)]$$

Преобразуем выражение для α_{mn} . Интегрируя два раза по частям, с учетом граничных условий (3.5) получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^l \psi_n(x) dx [\varphi(t + \rho(x)) \psi_m'(x)] = \\ & = -C_0 \delta_{mn} \lambda_n - \lambda_n \int_0^l x \psi_n(x) \psi_m(x) (\varphi(t + \rho(x)) - C_0) dx + \\ & + \int_0^l \psi_m(x) \psi_n'(x) dx \varphi(t + \rho(x)) = -C_0 \delta_{mn} \lambda_n + \alpha_{mn}^{(1)} \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.10) вытекает, что

$$(3.11) \quad \alpha_{mn} = -\gamma E (1 - \beta) (C_0 \lambda_n A_n - \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(1)} A_m)$$

Установим теперь, что достаточным условием устойчивости является следующее:

$$(3.12) \quad g < \frac{JE\lambda_0}{1 + EC_0} (1 + EC_0(1 - \beta)), \quad \lambda_0 = 7,8373l^{-3}$$

Здесь λ_0 — минимальное собственное значение краевой задачи (3.5).

Это условие устойчивости для неармированных стержней (т. е. при $\beta = 1$) установлено в [4]. Если же процент армирования увеличивается, причем $\beta \rightarrow 0$ (т. е. в пределе получается упругий стержень), то из (3.12) получается известное условие устойчивости упругого стержня под действием распределенной нагрузки: $g < JE\lambda_0$ (см., например, [11]). Из (3.12) вытекает, что критическая длина l_0 вязкоупругого армированного стержня равняется

$$l_0 = 1,9863 [JEg^{-1} (1 - EC_0\beta (1 + EC_0)^{-1})]^{1/3}$$

Увеличение критической длины l_0 армированного вязкоупругого стержня по сравнению с критической длиной l_1 соответствующего неармированного стержня в силу (3.12) описывается выражением $l_0^3 = l_1^3 (1 + (1 - \beta) EC_0)$.

Рассмотрим другой предельный случай, в котором основной материал предполагается упругим с модулем упругости E . Критическую длину армированного стержня, у которого и арматура, и основной материал подчиняются закону Гука, обозначим через l_2 . Ясно, что величина l_2 должна быть больше критической длины соответствующего вязкоупругого армированного стержня. Зависимость между l_0 и l_2 на основании (3.12) имеет вид

$$l_0 = l_2 \left(1 - \frac{EC_0\beta}{1 + EC_0}\right)^{1/3}$$

Обратимся к обоснованию условия устойчивости (3.12). Рассмотрим функцию

$$V(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t)^2$$

В соответствии с уравнениями (3.9) — (3.11) имеем

$$(3.13) \quad V^*(t) = 2\gamma \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*{}^2 \left[-1 - \frac{EC_0}{\mu_n} + \frac{EC_0(1-\beta)\lambda_n}{\mu_n} \right] - \\ - 2\gamma E \sum_{n=0}^{\infty} A_n^* \mu_n \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{mn} A_m^* + Q \\ Q = -2\gamma E(1-\beta) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(t) \mu_n \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(1)} A_m^*(t)$$

Рассмотрим отдельные слагаемые в правой части (3.13). Собственные значения λ_n краевой задачи (3.5) определяются из уравнения (см., например, [11]) $J_{-1/2}(\sqrt{2/3} \sqrt{\lambda_n l^3}) = 0$, где $J_{-1/2}$ — функция Бесселя первого рода порядка $-1/2$. Поэтому числа λ_n удовлетворяют асимптотическому равенству [12]

$$(3.14) \quad \lambda_n = C_1 n^2, \quad n \rightarrow \infty, \quad C_1 > 0$$

Значит, максимум выражения в квадратных скобках в (3.13) достигается при минимальном собственном значении λ_0 . Из требования отрицательности этого максимума и вытекает неравенство (3.12).

Далее, как доказано в статье [4], справедлива формула

$$(3.15) \quad \left| 2\gamma E \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(t) \mu_n \sum_{m=0}^{\infty} A_m^* \beta_{mn} \right| \leq V(t) f(t)$$

Здесь и далее через $f(t)$ обозначены некоторые различные непрерывные неотрицательные функции, такие, что

$$(3.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

Обратимся, наконец, к оценке величины Q . Обозначим через C некоторые различные неотрицательные постоянные. Заметим вначале, что

$$(3.17) \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(t) \mu_n \sum_{m=0}^{\infty} A_m^*(t) \int_0^l \psi_m(x) \psi_n'(x) dx \varphi(t + \rho(x)) \right| \leq \\ \leq CV(t) \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^2 \int_0^l (\psi_n')^2 (\varphi')^2 dx \leq Cf(t) V(t) \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^2 \lambda_n \leq f(t) V(t)$$

Оценим теперь выражение

$$(3.18) \quad Q_1 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(t) \mu_n \lambda_n \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^l x \psi_n(x) \psi_m(x) (\varphi(t + \rho(x)) - C_0) dx \right|$$

Представим произведение $\mu_n \lambda_n$ в виде

$$(3.19) \quad \mu_n \lambda_n = -\frac{g}{JE} \left[1 + \left(1 - \frac{g}{JE \lambda_n} \right)^{-1} \frac{g}{JE \lambda_n} \right]$$

Подставим (3.19) в (3.18) и оценим возникающие при этом два слагаемых. Первое из них в силу равенства Парсеваля [10] оценивается следующим образом:

$$Q_2 = \left| \frac{g}{JE} \int_0^l y^2(t, x) x (\varphi(t + \rho(x)) - C_0) dx \right| \leq f(t) V(t)$$

Оценка второго слагаемого ввиду асимптотики (3.14) осуществляется подобно (3.17). Значит, $Q_1 \leq f(t) V(t)$. Таким образом, окончательно заключаем, что

$$(3.20) \quad V'(t) \leq 2\gamma \left[-1 + \frac{EC_0 - EC_0(1-\beta)\lambda_0}{EJ\lambda_0 g^{-1} - 1} + f(t) \right] V(t)$$

Оценим теперь $V(t_0)$. Начальные условия для системы уравнений (3.9) даются следующими формулами, вытекающими из (2.10) и (2.11):

$$(3.21) \quad \begin{aligned} A_n(t_0) &= -A_n^0 \lambda_n EJ g^{-1} \mu_n^{-1}, \quad A_n^0 = \int_0^l y_0'(x) \psi_n(x) x dx \\ A_n'(t_0) &= -E\gamma \mu_n^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t_0) (\beta_{mn}(t_0) + C_0 \delta_{mn}) \end{aligned}$$

Из равенства Парсеваля и (3.21) следует, что

$$(3.22) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2(t_0) \leq C_1 \int_0^l x (y_0'(x))^2 dx$$

Далее, с учетом (3.10) и граничных условий (3.5) имеем

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\beta}_{mn}^2(t) &= \int_0^l x dx \left(\int_x^l \varphi(t + \rho(x_1)) d\psi_n(x_1) \right)^2 \leq \\ &\leq \varphi_1(t) \lambda_n, \quad \varphi_1(t) = \frac{l^3}{2} \max_{0 \leq x \leq l} \varphi(t + \rho(x))^2 \end{aligned}$$

Формулы (3.21) — (3.23) дают

$$(3.24) \quad V(t_0) \leq E^2 \gamma^2 \varphi_1(t_0) C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{-2} \lambda_n \int_0^l x y_0'(x)^2 dx$$

Из неравенства (3.24) вытекает, что $V(t_0) < \infty$. Отсюда и из (3.16) следует, что

$$(3.25) \quad V(t) \leq C \exp(-Ct), \quad t \geq t_0, \quad C > 0$$

Обозначим через $z(t, s)$ функцию

$$(3.26) \quad z(t, s) = \exp \left[-\gamma(t-s) - E(1-\beta) \int_s^t \varphi(\tau + \rho(x)) d\tau \right]$$

В силу (2.9) имеем

$$(3.27) \quad \begin{aligned} y''(t, x) &= z(t, t_0) \left[y''(t_0, x) + \frac{1}{EJ} M^*(t_0, x) \right] - \\ &- \frac{1}{EJ} M^*(t, x) - \frac{\gamma\beta}{J} \int_{t_0}^t M^*(s, x) \varphi(s + \rho(x)) z(t, s) ds \end{aligned}$$

Ввиду (3.26) первое слагаемое в правой части (3.27) экспоненциально убывает при $t \rightarrow \infty$. Аналогичное заключение справедливо в отношении остальных слагаемых в (3.27). Для доказательства этого отметим, что в

силу (3.4) и граничных условий (3.2) и равенства Парсеваля будет

$$|M^*(t, x)| = g \left| \int_0^x s y''(t, s) ds \right| \leq \\ \leq g \frac{l^2}{2} \left[\int_0^l s |y''(t, s)|^2 ds \right]^{1/2} = \frac{gl^2}{2} V(t)^{1/2}$$

Отсюда и из (3.27), (3.25) окончательно заключаем, что

$$(3.28) \quad |y''(t, x)| \leq C_1 \exp(-Ct), \quad C > 0, \quad t \geq t_0$$

Но

$$(3.29) \quad y(t, x) = y(t_0, x) + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi) y''(s, \xi) ds d\xi \\ G(x, \xi) = x, \quad x \leq \xi; \quad G(x, \xi) = \xi, \quad x \geq \xi$$

Значит, ввиду (3.28), (3.24) оценка (3.1) имеет место. Тем самым достаточность условий (3.12) для устойчивости стержня на бесконечном интервале времени установлена.

Аналогично [4] можно показать, что при нарушении условия (3.12) вязкоупругий стержень неустойчив.

4. Устойчивость на конечном интервале времени. Возможны различные постановки задачи об устойчивости стержня на конечном интервале времени. Рассмотрим две из них, считая упругий стержень устойчивым, т. е., считая, что $g \leq JE\lambda_0$.

1°. Имеется конечный интервал времени $[0, T]$, где T — заданное число. Требуется определить условия, при выполнении которых на интервале $[0, T]$ прогиб $y(t, x)$ не превосходит для любого x заданного критического значения y^* , т. е.

$$(4.1) \quad \sup_t \sup_x |y(t, x)| \leq y^*, \quad t \in [0, T], \quad 0 \leq x \leq l$$

Для получения условий устойчивости достаточно оценить левую часть соотношения (4.1). Один из способов оценивания основан на представлении (3.29) и формулах (3.25) — (3.28), в которых надлежит входящие в них величины выразить через исходные характеристики задачи. Подобный способ действий подробно реализован для неармированных стержней [3, 4]. Здесь же приведем другой способ оценивания прогиба, справедливый для более общих ядер K в уравнении состояния (1.2). Из (2.6) следует, что

$$(4.2) \quad \omega(t) = -\frac{1}{JE} M(t, x) + I, \quad I = \int_{t_0}^t M(\tau, x) K_1(\beta, t + \\ + \rho(x), \tau + \rho(x)) d\tau$$

где K_1 — резольвента ядра $-\beta R(t + \rho(x), \tau + \rho(x))$. Продифференцируем обе части соотношения (4.2) по x . Получим

$$(4.3) \quad y'(t, x) = \int_0^l G(x, \xi) \left[y_0'''(\xi) + \frac{d}{d\xi} I(t, \xi) \right] d\xi$$

Здесь $G(x, \xi)$ — функция Грина задачи (3.5) при $\lambda_n = g(JE)^{-1}$.
Далее имеем

$$(4.4) \quad \left| I(t, l) - \int_0^l I(t, \xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} d\xi G(x, l) \right| \leq \\ \leq g \left| \int_{t_0}^t d\tau \int_0^l \int_0^{\xi} (y(\tau, \xi) - y(\tau, \xi_1)) d\xi_1 \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} \times \right. \\ \left. \times K_1(\beta, t + \rho(\xi), \tau + \rho(\xi)) d\xi \right| \leq \left| \int_{t_0}^t y_1(\tau) K_3(\beta, x, \tau) d\tau \right|$$

С учетом (4.3) получим

$$(4.5) \quad y_1(t) \leq \int_{t_0}^t y_1(\tau) K_4(\beta, \tau) d\tau + q_0, \quad q_0 = \int_0^l \int_0^l |G(x, \xi) y_0'''(\xi)| d\xi dx \\ y_1(\tau) = \max_x |y(\tau, x)|, \quad K_3(\beta, x, \tau) = \max_{0 \leq t \leq T} K_2(\beta, t, x, \tau) \\ K_2(\beta, t, x, \tau) = 2l \int_0^l |\xi \partial G(x, \xi) / \partial \xi| |K_1(\beta, t + \rho(\xi), \tau + \rho(\xi))| d\xi \\ K_4(\beta, \tau) = \int_0^l K_3(\beta, x, \tau) dx$$

Из (4.5) и леммы Гронуола — Беллмана следует оценка

$$y_1(t) \leq q_0 \exp \int_{t_0}^t K_4(\beta, \tau) d\tau$$

Сравнивая ее с (4.1), заключаем, что достаточное условие устойчивости в смысле справедливости неравенства (4.1) имеет вид

$$(4.6) \quad q_0 \exp \int_{t_0}^T K_4(\beta, \tau) d\tau \leq y^*$$

2°. Другая постановка задачи устойчивости на конечном интервале времени состоит в следующем. Известна величина y^* предельно допустимого значения прогиба. Требуется определить критический момент времени t_1 , в который впервые максимальное значение прогиба становится равным y^* , т. е. $t \geq t_0$, $0 \leq x \leq l$:

$$(4.7) \quad \max_t \bar{y}(t) = y^*, \quad \bar{y}(t) = \max_x |y(t, x)|$$

Оценим величину критического времени t_1 . Подобно (4.5) можно показать, что

$$(4.8) \quad y_1(t) \leq q_0 + \int_{t_0}^t y_1(\tau) \int_0^l K_2(\beta, t, x, \tau) dx$$

Обозначим через R_2 резольвенту ядра

$$\int_0^l K_2(\beta, t, x, \tau) dx$$

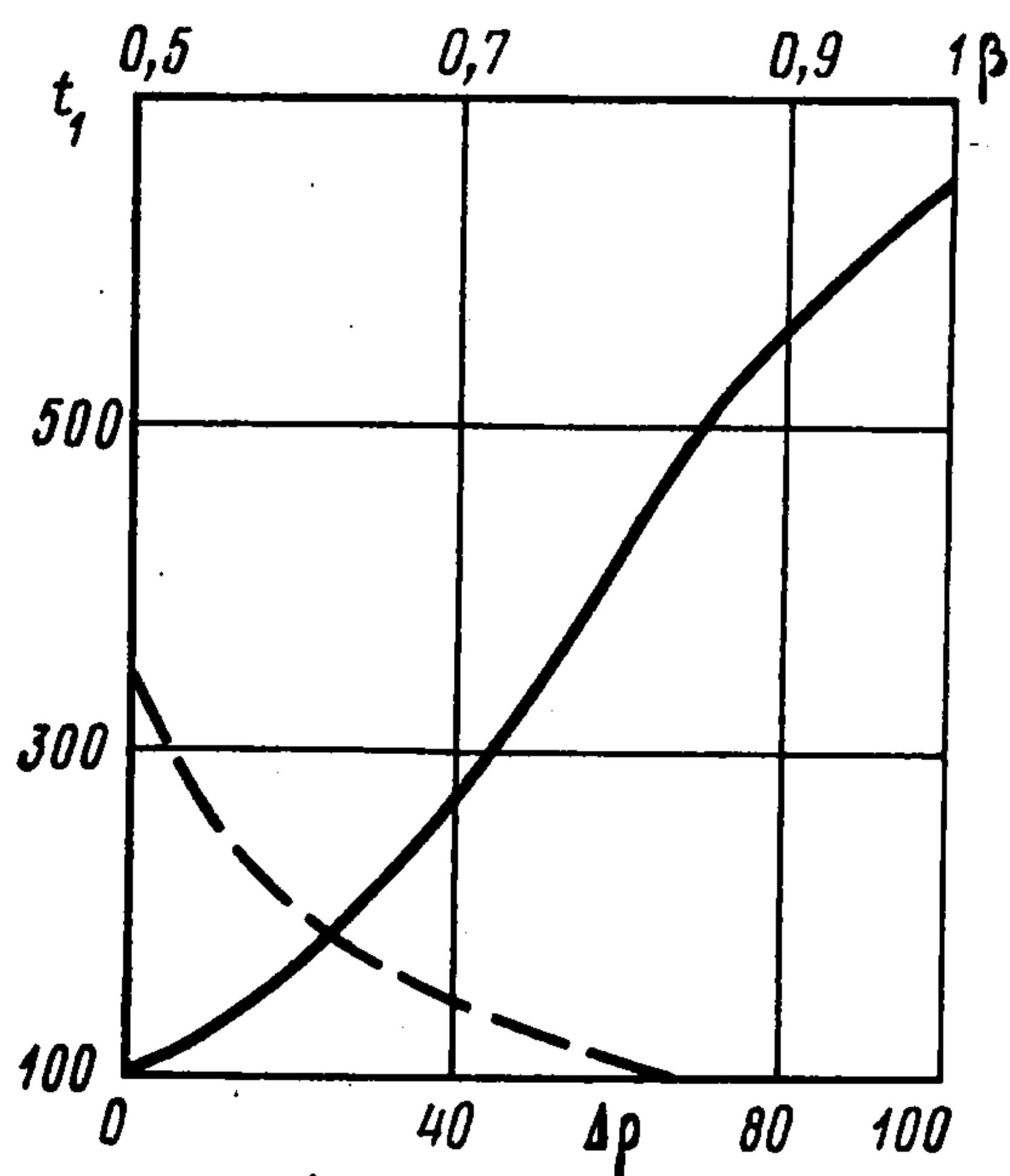
Из (4.8) следует, что

$$y_1(t) \leq f_1(t), \quad f_1(t) = q_0 + q_0 \int_0^t R_2(\beta, t, \tau) d\tau$$

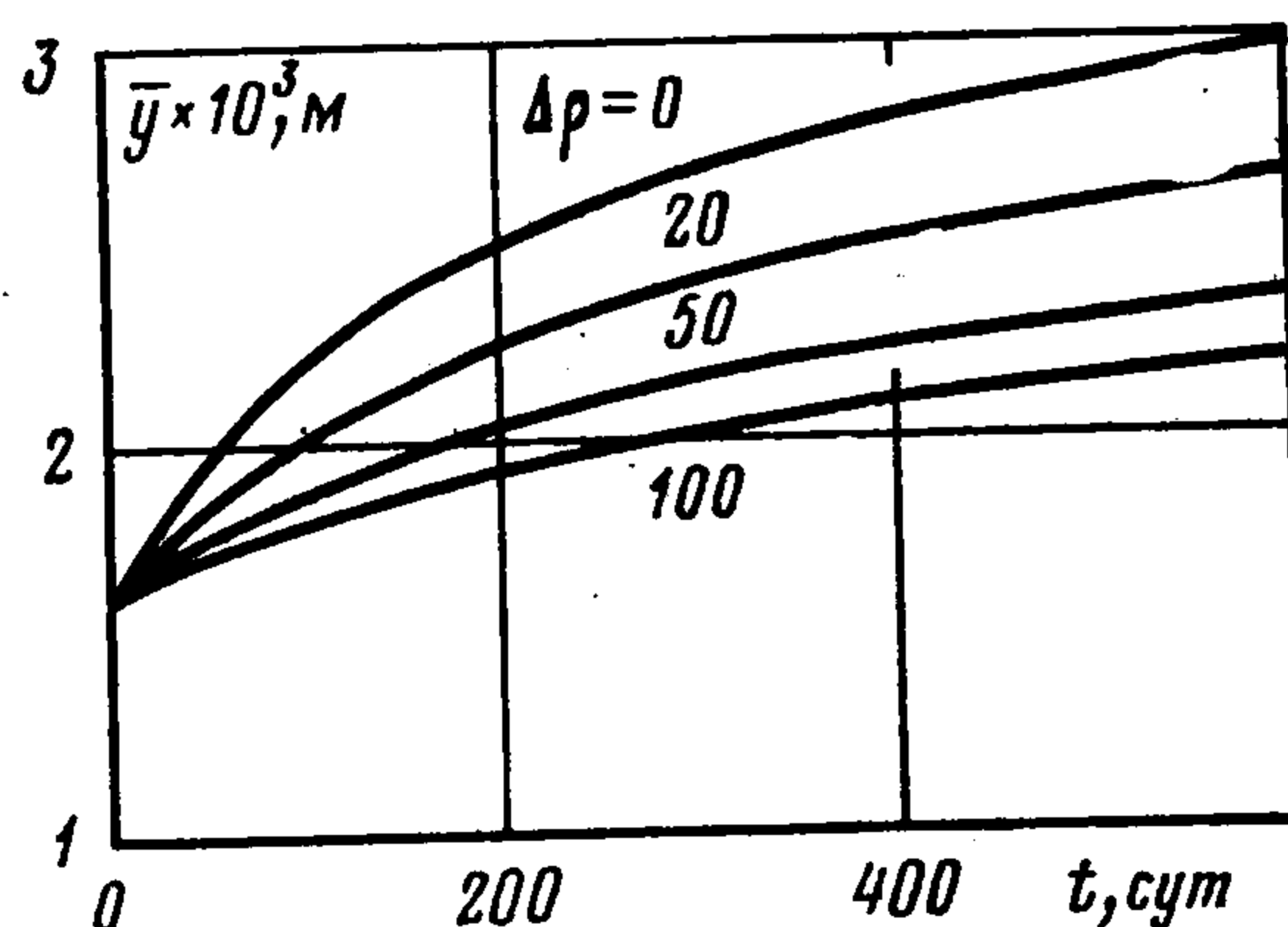
Значит, на основании (4.8) критическое время $t_1 \geq t_1^-$, где t_1^- — наименьший корень уравнения $f_1(t) = y^*$, $t \geq t_0$.

Для численного исследования поставленной задачи устойчивости необходимо определить решение уравнения (2.6) при условиях (3.2), (3.4).

Пусть стержень состоит из двух кусков одинаковой длины и внутри каждого куска возраст постоянен.



Фиг. 2



Фиг. 3

Общими в расчетах были следующие числовые значения параметров:

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= C + A \exp(-\beta_1 \tau), \quad l = 1 \text{ м}, \quad y_0'' = -2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}, \\ \gamma &= 0,006 \text{ сут}^{-1}, \quad \beta_1 = 0,031 \text{ сут}^{-1}, \quad C = 0,2761 \cdot 10^4 \text{ МПа}^{-1}, \quad A = \\ &= 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}, \quad E = 3,3 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad y^* = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad g/JE = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1} \end{aligned}$$

На фиг. 2 приведены значения критического времени t_1 (в сутках) в зависимости от разности возрастов кусков стержня $\Delta\rho$ (в сутках) при $\beta = 0,5$ (сплошная линия), а также зависимость критического времени t_1 от степени армирования β (штриховая линия). Функция $\rho(x) = 50$ суток при $0 \leq x \leq 0,5$ и $\rho(x) = 0$ при $0,5 \leq x \leq 1$ для штриховой линии. Результаты расчетов показали, что критическое время увеличивается как с увеличением разности возрастов, так и с увеличением степени армированности.

На фиг. 3 приведена зависимость максимального по x значения прогиба $\bar{y}(t)$ в виде функции времени t (в сутках) при $\beta = 0,5$. Кривые отвечают различным значениям разности возрастов $\Delta\rho$. Величина $\Delta\rho$ изменялась от 0 для верхней кривой до 100 суток для нижней кривой.

5. Замечание. Развитый выше способ исследования устойчивости вязкоупругих армированных стержней применим и для некоторых иных ситуаций. В каждом конкретном случае, приводимом ниже, уравнение для прогибов имеет вид (2.9), но меняются граничные условия в зависимости от способа закрепления концов стержня. Устойчивость стержня рассматривается на бесконечном интервале времени в смысле (3.1).

1°. Имеется вязкоупругий армированный стержень, находящийся под действием собственного веса, при подвижной заделке верхнего конца и шарнирном опирании

нижнего. Граничные условия для прогиба имеют вид

$$y'(t, 0) = 0, \quad y''(t, 0) = 0, \quad y''(t, l) = 0$$

Условие устойчивости дается формулой (3.12), в которой

$$\lambda_0 = 3,524 l^{-3}$$

2°. Рассмотрим стержень с зацементированным нижним концом при подвижной заделке верхнего. Граничные условия имеют вид

$$y'(t, 0) = 0, \quad y''(t, 0) = 0, \quad y'(t, l) = 0$$

Стержень находится под действием веса с постоянной продольной нагрузкой g . Условие устойчивости имеет вид (3.12) при $\lambda_0 = 18,99l^{-3}$.

3°. Пусть стержень, изученный в п. 3, находится под действием продольной силы P на верхнем конце. Величина момента равняется $P y(t, x)$. Значение критической силы дается правой частью (3.12) при $\lambda_0 = 4\pi^2 l^{-2}$.

Авторы благодарят Метлова В. В. за участие в проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 153—164.
2. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Об устойчивости сжато-растянутых неоднородно-вязкоупругих армированных стержней.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 6, с. 1334—1336.
3. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Об устойчивости неоднородно-стареющих вязкоупругих стержней.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 708—721.
4. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Об устойчивости неоднородных вязкоупругих стержней.— Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1980, т. 33, № 4, с. 26—37.
5. Работное Ю. Н. Теория ползучести.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М.: Наука, 1972, с. 119—154.
6. Шестериков С. А. Выпучивание при ползучести.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 754—760.
7. Куршин Л. М. Устойчивость при ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3, с. 125—160.
8. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.
9. Арутюнян Н. Х. Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М.: Наука, с. 155—202.
10. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
11. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.XII.1980