Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 6, 1981

УДК 539.3 : 534.1

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТОЙ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ И ЕЕ КОНЕЧНО-МЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Медведев Н. Г.

Изучаются вопросы оптимизации в задачах о колебании ортотропных оболочек вращения переменной толщины, когда управлениями являются толщина и радиус кривизны образующей оболочки при ограничениях на основную собственную частоту колебаний, толщину, внутренний объем и другие параметры. Доказывается существование решения рассматриваемой задачи и возможность ее аппроксимации последовательностью конечно-мерных задач.

Некоторые вопросы оптимального управления в задачах о колебании пластин переменной толщины, когда управлением служит толщина, рассмотрены в работах [1—4].

1. Основные предположения. Пусть Ω — прямоугольная область в R^2: $\Omega = \{(\varphi, z) \mid 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < z < L\}$; $H_0 = W_{2,0}^1(\Omega) \times W_{2,0}^1(\Omega) \times W_{2,0}^2(\Omega)$ — прямое произведение пространств Соболева С. Л. [5], периодических по φ с периодом 2π функций: $H_0 = \{\omega = (u, v, w) \mid u, v \in W_{2,0}^1(\Omega),\ w \in W_{2,0}^2(\Omega)\}$($W_{2,0}^l(\Omega)$ — подпространство в пространстве $W_2^l(\Omega)$ с нормой пространства $W_2^l(\Omega)$).

Обозначим через H замыкание в норме

$$\|\omega\|_H^2 = \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|v\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|w\|^2_{W_2^2(\Omega)} \tag{1.1}$$

множества бесконечно дифференцируемых в полосе $0 < z < L$, $-\infty < \varphi < \infty$ периодических по φ функций $\omega \in H_0$, удовлетворяющих граничным условиям решаемой задачи [6].

Введем в рассмотрение множество

$$U = \{t = (h, r) \mid h \in C(\bar{\Omega}),\ r \in C^3[0, L],\ e_1 \leqslant h \leqslant e_2,\ e_3 \leqslant r \leqslant e_4\} \tag{1.2}$$

где e_i — положительные постоянные, которое снабжаем топологией, порожденной произведением сильных топологий пространств $C(\bar{\Omega})$ и $C^3[0, L]$.

Определим далее на $H \times H$ семейства билинейных симметричных форм $a_t(\omega', \omega'')$ и $b_t(\omega', \omega'')$, зависящих от параметра $t \in U$:

$$\begin{aligned} a_t(\omega', \omega'') = \int_\Omega \{&D_1[E_1\varepsilon_1'\varepsilon_1'' + \nu_2 E_1(\varepsilon_1'\varepsilon_2'' + \varepsilon_1''\varepsilon_2') + E_2\varepsilon_2'\varepsilon_2'' + \\ &+ (1-\nu_1\nu_2)G\varepsilon_3'\varepsilon_3''] + D_2[E_1\varepsilon_4'\varepsilon_4'' + \nu_2 E_1(\varepsilon_4'\varepsilon_5'' + \varepsilon_4''\varepsilon_5') + \\ &+ E_2\varepsilon_5'\varepsilon_5'' + 4(1-\nu_1\nu_2)G\varepsilon_6'\varepsilon_6'']\} A_1^2 r\, d\Omega \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$b_t(\omega', \omega'') = \int_\Omega \rho h (u'u'' + v'v'' + w'w'') A_1^2 r\, d\Omega; \quad \rho = \mathrm{const} > 0$$

$$(1.4)\qquad \varepsilon_1(\omega, r)=\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{w}{R_1},\quad \varepsilon_2(\omega, r)=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{r'}{A_1^2 r}u-\frac{w}{R_2}$$

$$\varepsilon_3(\omega, r)=\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{r'}{A_1^2 r}v,$$

$$\varepsilon_4(\omega, r)=-\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{u}{R_1}\right)$$

$$\varepsilon_5(\omega, r)=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{v}{R_2}\right)-\frac{r'}{A_1^2 r}\left(\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{u}{R_1}\right)$$

$$\varepsilon_6(\omega, r)=-\frac{1}{A_1^2 r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi\,\partial z}-\frac{r'}{r}\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{1}{R_1 r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-$$

$$-\frac{1}{R_2 A_1^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{r'}{r}v\right)$$

$$r'=\frac{dr}{dz},\quad A_1^2=(1+r'^2)^{1/2},\quad R_1=\left(\frac{d^2 r}{dz^2}\right)^{-1}A_1^6,\quad R_2=-rA_1^2$$

$$D_1(h)=\frac{h}{1-\nu_1\nu_2},\quad D_2(h)=\frac{h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}$$

Здесь ε_i', ε_i'' — компоненты деформации оболочки вращения [7], порожденные смещениями срединной поверхности ω', $\omega'' \in H$ и зависящие от радиуса образующей $r(z) \in C^3[0, L]$, коэффициенты D_1 и D_2 зависят от толщины оболочки $h(z,\varphi) \in C(\bar\Omega)$, E_i, ν_i, G — соответственно модули упругости, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига, причем $E_1\nu_2 = E_2\nu_1$, L — длина оболочки, ρ — плотность материала оболочки.

Вводим следующие допущения:

1) E_i, ν_i, G — положительные постоянные, причем $|\nu_i| < 1$, $i = 1, 2$;

2) при любых $t \in U$, $\omega \in H$ из условий $\varepsilon_i(\omega, r) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ следует, что $\omega = 0$.

Допущение 1 справедливо для ортотропных материалов, а допущение 2 — для случая, когда оболочка не имеет жестких смещений, т. е. закреплена так, что из равенства нулю деформаций следует равенство нулю перемещений (подробнее см. [6]).

Аналогично тому, как это проделано в [6], можно показать, что при выполнении допущений 1, 2 форма $a_t(\omega', \omega'')$ порождает в H скалярное произведение и норму, эквивалентную норме (1.1), т. е. справедливы неравенства

$$(1.5)\qquad m_{1t}\|\omega\|_H^2 \leqslant a_t(\omega, \omega) \leqslant M_{1t}\|\omega\|_H^2,\quad \forall\omega\in H,\quad \forall t\in U$$

где m_{1t}, M_{1t} — положительные постоянные, зависящие от t.

Очевидно также, что форма $b_t(\omega', \omega'')$ порождает в H скалярное произведение и норму, эквивалентную норме пространства $H_b = (L_2(\Omega))^3$:

$$(1.6)\qquad m_2\|\omega\|_{H_b}^2 \leqslant b_t(\omega, \omega) \leqslant M_2\|\omega\|_{H_b}^2,\quad \forall\omega\in H,\quad \forall t\in U;$$
$$m_2, M_2 = \mathrm{const} > 0$$

2. Задача о собственных частотах и формах колебаний оболочки. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$(2.1)\qquad a_t(\omega, \omega') = \lambda b_t(\omega, \omega'),\quad \forall\omega' \in H$$

С учетом соотношений (1.5) и компактности вложения

$$W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega) \times W_2^2(\Omega) \to (L_2(\Omega))^3$$

из известных результатов [8] получаем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполнены допущения 1, 2. Тогда для любых $t \in U$ спектральная задача (2.1) имеет последовательность ненулевых решений $\omega_k \in H$, отвечающих последовательности собственных значений λ_k, таких, что $a_t(\omega_k, \omega) = \lambda_k b_t(\omega_k, \omega)$, $\forall \omega \in H$, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, при этом

$$\lambda_k = \inf \left\{ \frac{a_t(\omega, \omega)}{b_t(\omega, \omega)} \middle| \omega \in H, \ \omega \neq 0, \ b_t(\omega, \omega_i) = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant k-1 \right\} \tag{2.2}$$

Задача (2.1) связана с определением собственных частот и форм колебаний ортотропных оболочек вращения переменной толщины, удовлетворяющих некоторым условиям закрепления, обеспечивающих выполнение допущения 2 [6].

3. Бесконечномерная задача оптимального управления. Очевидно, что основная собственная частота λ_1, соответствующая ей собственная форма колебаний ω_1 и вес оболочки P зависят от параметра $t = (h, r)$. Обозначая эти зависимости λ_t, ω_t и P_t, с учетом (2.2) получим

$$\lambda_t = \frac{a_t(\omega_t, \omega_t)}{b_t(\omega_t, \omega_t)} = \inf_{\substack{\omega \in H \\ \omega \neq 0}} \frac{a_t(\omega, \omega)}{b_t(\omega, \omega)}; \quad P_t = \int_\Omega \rho A_1^2 r h \, d\Omega \tag{3.1}$$

Будем управлять параметром t с тем, чтобы получить минимальный вес оболочки P_t, так, чтобы основная собственная частота λ_t была не ниже заданной λ_- при ограничениях сверху и снизу на толщину оболочки h и радиус образующей r. В связи с этим введем в рассмотрение пространство

$$V = C(\bar{\Omega}) \times C^3[0, L] = \{t = (h, r) \mid h \in C(\bar{\Omega}), \ r \in C^3[0, L]\}$$

Пусть E — рефлексивное банахово пространство, такое, что $E \subset V$, вложение E в V компактно. В частности, E можно выбрать в виде

$$E = W_{p_1}^1(\Omega) \times W_{p_2}^4(0, L) \quad (p_1 > 2, \ p_2 > 1)$$

Определим допустимое множество управлений выражением

$$\begin{aligned} U_\partial = \{ & t = (h, r) \mid t \in E, \ \|t\|_E \leqslant C, \ h_- \leqslant h \leqslant h_+, \ r_- \leqslant r \leqslant r_+, \\ & \lambda_- \leqslant \lambda_t, \ \psi_j(t, \omega_t) \leqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, l\}; \quad e_1 < h_- < h_+ < e_2, \\ & e_3 < r_- < r_+ < e_4 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$(t, \omega) \to \psi_j(t, \omega)$ — непрерывные отображения $U \times H$ (с топологией, порожденной произведением сильных топологий пространств $C(\bar{\Omega})$, $C^3[0, L]$ и H) в R.

Здесь C, h_-, h_+, r_-, r_+ — положительные постоянные, e_i — постоянные из (1.2).

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти функцию $t_0 = (h_0, r_0)$, такую, что

$$t_0 \in U_\partial, \quad P_{t_0} = \inf_{t \in U_\partial} P_t = \inf_{t \in U_\partial} \int_\Omega \rho A_1^2 r h \, d\Omega \tag{3.3}$$

Отметим, что неравенства $\psi_j(t, \omega_t) \leqslant 0$ накладывают ограничения на другие параметры ортотропной оболочки вращения в зависимости от решаемой задачи. Например, в случае ограничения на минимальный внутренний объем оболочки вращения V_∂:

(3.4) $$\psi_1 = V_\partial - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left(r - \frac{h}{2}\right)^2 d\Omega$$

Лемма. Функция $t \to \lambda_t$ (3.1) является непрерывным отображением из U, определяемом (1.2), в R.

Доказательство. Пусть $t_0 = (h_0, R_0)$ — произвольный элемент из U, $\{t_n\} = \{(h_n, r_n)\}$ — последовательность элементов, такая, что

(3.5) $$t_n \in U,\ t_n \to t_0 \text{ в } U$$

Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ введем следующие обозначения:

(3.6) $$\lambda^{(n)} = \lambda_{t_n},\quad \omega_n = \omega_{t_n},\quad a_n(\omega', \omega'') = a_{t_n}(\omega', \omega''),\quad b_n(\omega', \omega'') = b_{t_n}(\omega', \omega'')$$

Из соотношений (1.3), (1.4), (3.5), (3.6) имеем

(3.7) $$|a_n(\omega, \omega) - a_0(\omega, \omega)| \leqslant c_n' \|\omega\|_H^2;\quad |b_n(\omega, \omega) - b_0(\omega, \omega)| \leqslant c_n'' \|\omega\|_{H_b}^2$$
$$\forall \omega \in H,\ c_n' \to 0 \text{ и } c_n'' \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Из (1.5), (1.6), (3.7) вытекают неравенства

(3.8) $$m_1 \|\omega\|_H^2 \leqslant a_n(\omega, \omega) \leqslant M_1 \|\omega\|_H^2,\quad \forall \omega \in H,\quad n = 0, 1, 2, \ldots, m_1,$$
$$M_1 = \text{const} > 0$$

Пусть ω' — произвольный элемент из H. Тогда с учетом (1.6), (3.8) имеем

(3.9) $$\frac{m_1 \|\omega'\|_H^2}{M_2 \|\omega'\|_{H_b}^2} \leqslant \frac{a_n(\omega', \omega')}{b_n(\omega', \omega')} \leqslant \frac{M_1 \|\omega'\|_H^2}{m_2 \|\omega'\|_{H_b}^2} = q;\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Принимая во внимание соотношения (3.1), (3.6), (3.9), получим

(3.10) $$\lambda^{(n)} = \inf_{\omega \in Q} \frac{a_n(\omega, \omega)}{b_n(\omega, \omega)};\quad Q = \left\{\omega \mid \omega \in H,\ \omega \neq 0,\ \frac{\|\omega\|_H^2}{\|\omega\|_{H_b}^2} \leqslant \frac{M_2}{m_1} q\right\};$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Из неравенств (1.6), (3.7), (3.8) следует

(3.11) $$\left|\frac{a_n(\omega, \omega)}{b_n(\omega, \omega)} - \frac{a_0(\omega, \omega)}{b_0(\omega, \omega)}\right| \leqslant \varepsilon_n,\quad \forall \omega \in Q,\quad \varepsilon_n \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Теперь из (3.10), (3.11) следует, что $\lambda^{(n)} \to \lambda^{(0)}$ при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены допущения 1, 2 и непустое множество U_∂ задается соотношением (3.2). Тогда существует решение задачи (3.3).

Доказательство. Пусть $\{t_n\}_{n=1}^\infty = \{(h_n, r_n)\}_{n=1}^\infty$ — такая последовательность, что

(3.12) $$t_n \in U_\partial, \lim_{n \to \infty} P_{t_n} = \inf_{t \in U_\partial} P_t$$

В силу (3.2) из последовательности $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность $\{t_m\}_{m=1}^\infty$, такую, что

(3.13) $$t_m \in U_\partial,\quad t_m \to t^* \text{ слабо в } E$$

Используя примерно те же рассуждения, что и при доказательстве леммы, можно убедиться, что $\lambda^{(m)} \leqslant c_1$, $\| \omega_m \|_H^2 \leqslant c_2$ $(c_1, c_2 = \text{const} > 0)$.

Отсюда с учетом компактности вложения E в V и леммы следует существование подпоследовательности $\{\lambda^{(k)}, \omega_k, h_k, r_k\}_{k=1}^{\infty}$, такой, что

(3.14) $\lambda^{(k)} \to \lambda_{h^*}$ в R

(3.15) $\omega_k \to \omega^*$ сильно в H_b

(3.16) $t_k = (h_k, r_k) \to (h^*, r^*) = t^*$ слабо в E

(3.17) $h_k \to h^*$ сильно в $C(\bar{\Omega})$; $r_k \to r^*$ сильно в $C^3[0, L]$

Учитывая, что $t \to P(t)$ — непрерывное отображение U в R, из (3.13), (3.17) имеем

(3.18) $$P_{t^*} = \lim_{k\to\infty} P_{t_k} = \inf_{t\in U_\partial} P_t; \quad h_- \leqslant h^* \leqslant h_+; \quad r_- \leqslant r^* \leqslant r_+$$

Из соотношений (3.13), (3.16) получим

(3.19) $$C \geqslant \varliminf_{k\to\infty} \| t_k \|_E \geqslant \| t^* \|_E$$

где C — постоянная из (3.2), а из (3.2), (3.13), (3.15), (3.16) имеем

(3.20) $$0 \geqslant \lim_{k\to\infty} \psi_j(t_k, \omega_k) = \psi_j(t^*, \omega^*); \quad j = 1, \ldots, l$$

Учитывая (3.12), (3.14), получим, что $\lim \lambda^{(k)} = \lambda_{h^*} \geqslant \lambda_-$ при $k \to \infty$. Отсюда и из (3.18) — (3.20) следует, что функция $t_0 = t^* = (h^*, r^*)$ — решение задачи (3.3).

4. Приближенное решение задачи (3.3). Пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность конечно-мерных подпространств в E. Конечно-мерная задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти функцию $t_n = (h_n, r_n)$, такую, что

(4.1) $$t_n \in E_n \cap U_\partial; \quad P_{t_n} = \inf_{t\in E_n \cap U_\partial} P_t$$

Используя лемму, можно доказать утверждение [1].

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, $\{E_n\}$ — последовательность конечно-мерных подпространств в E, удовлетворяющая условию предельной плотности

(4.2) $$\lim_{n\to\infty} \inf_{t\in E_n} \| t - y \|_E = 0, \quad \forall y \in E$$

и существует последовательность $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что $q_n \in U_\partial^0$, $q_n \to t_0$ в E, где U_∂^0 — внутренность U_∂, t_0 — решение задачи (3.3). Тогда существует такое n_0, что при $\forall n \geqslant n_0$ множество $E_n \cap U_\partial$ не пусто, задача (4.1) имеет решение $t_n = (h_n, r_n)$ и

$$\lim_{n\to\infty} P_{t_n} = P_{t_0} = \inf_{t\in U_\partial} P_t$$

Из последовательности $\{t_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$, такую, что $t_m \to t_0$ сильно в V.

[1] *Литвинов В. Г.* Оптимальное управление коэффициентами в эллиптических системах.— Препринт Ин-та матем. АН УССР. Киев, 1979, № 794. 52 с.

В качестве конечно-мерных подпространств E_n, удовлетворяющих условию (4.2), можно выбирать тензорное произведение пространств сплайнов [9].

Отметим, что для построения приближенного решения задачи (3.3) имеется другой подход, не использующий существование последовательности $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Аналогично [4] можно рассматривать двойственную задачу оптимального управления, т. е. задачу о максимизации основной собственной частоты колебаний оболочки вращения при ограничениях на вес и другие параметры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арман Ж.-Л. П., Лурье К. А., Черкаев А. В.* К решению задач оптимизации собственных значений, возникающих при проектировании упругих конструкций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 159—162.
2. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
3. *Гура Н. М., Сейранян А. П.* Оптимальная круглая пластинка при ограничениях по жесткости и частоте собственных колебаний.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 138—145.
4. *Литвинов В. Г.* Задача оптимального управления собственной частотой пластины переменной толщины.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 4, с. 866—877.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
6. *Литвинов В. Г., Медведев Н. Г.* Некоторые вопросы устойчивости оболочек вращения.— В сб.: Математическая физика. Вып. 26. Киев: Наукова думка, 1979, с. 101—109.
7. *Григоренко Я. М.* Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наукова думка, 1973. 228 с.
8. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
9. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М.: Мир, 1974. 126 с.

Киев

Поступила в редакцию 29.X.1980