Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 6, 1981

УДК 539.3 : 62—50

ПРИВЕДЕНИЕ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ В ЗАДАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОСРЕДСТВОМ СИЛОВОГО ГРАНИЧНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Акуленко Л. Д.

Строится решение задачи оптимального управления движением распределенной упругой системы посредством сосредоточенного граничного воздействия силового типа. Состояние системы описывается гиперболическим уравнением с постоянными коэффициентами. Рассматривается общий случай произвольных начального и конечного распределений. Обсуждаются вопросы управления при помощи сосредоточенных и распределенных воздействий.

1. Вводные замечания и постановка основной задачи управления. Рассматривается задача об оптимальном управлении состоянием однородной упругой системы на фиксированном интервале времени [1, 2]. Предполагается, что начальное и конечное распределения упругих отклонений заданы и произвольны. Для определенности механическим аналогом такой системы можно считать однородную упругую пружину (брус) или упругий вал. В качестве управляющей функции времени возьмем величину силового воздействия (силу или момент сил) на границе системы. Состояние такой системы описывается уравнением в частных производных гиперболического типа и при заданных воздействиях исследуется в рамках теории уравнений математической физики [3]. Функционалом, характеризующим качество управления, служит интеграл от квадрата управляющей функции. Такая постановка задачи управления позволяет решить вопрос о принципиальной возможности управления в классе ограниченных кусочно-непрерывных функций времени. Отметим, что при некоторых условиях указанная постановка может быть некорректной [4].

Для построения кусочно-непрерывного управления используется модифицированный прием метода моментов [5, 6], аналогичный примененному в [1]. В результате решение задачи оптимального управления находится в явном конечном виде.

Исследование задач управления системами, содержащими упругие элементы, посредством граничных, распределенных, сосредоточенных (импульсных) и движущихся управляющих воздействий в настоящее время весьма актуально для решения ряда прикладных задач механики и техники. В теоретическом отношении решение задач управления колебательными системами с распределенными параметрами по сравнению с соответствующими конечно-мерными аналогами обладает рядом специфических особенностей [1, 7]. В различных постановках такие задачи были предметом исследований работ [1, 2, 7—13] и др.

Переходим к постановке основной задачи управления. Предполагается, что управляемая система (упругий брус или вал) описывается уравнениями вида [3]

$$\rho\varphi^{\cdot\cdot} = c\varphi'', \quad \varphi = \varphi(t, x), \quad x \in (0, l)$$
$$c\varphi'(t, 0) = -M(t), \quad \varphi'(t, l) = 0, \quad t \in [t_0, T] \tag{1.1}$$

Здесь φ — упругое отклонение сечения (линейное или угловое) с координатой x в момент времени t; точками обозначено дифференцирование по t, штрихами — по x. Постоянными параметрами задачи являются: ρ — линейная инерционная характеристика (плотность распределения массы или момента инерции), c — характеристика жесткости материала (модуль Юнга или крутильная жесткость), l — длина, ρ, c, $l > 0$, t_0, T — заданные моменты времени, $T > t_0$. Неизвестная функция $M(t)$ — управляющее воздействие (сила или момент сил, сосредоточенные для определенности на левом конце $x = 0$).

Для управляемой распределенной системы (1.1) ставится задача оптимального управления. Выбором допустимой управляющей функции $M(t)$ привести систему из произвольного начального состояния

$$\varphi(t_0, x) = f^\circ(x), \quad \varphi^{\cdot}(t_0, x) = g^\circ(x) \tag{1.2}$$

в заданное конечное

$$\varphi(T, x) = f^T(x), \quad \varphi^{\cdot}(T, x) = g^T(x) \tag{1.3}$$

таким образом, чтобы достигал минимума функционал [1]

$$J[M] = \int_{t_0}^{T} M^2(t)\,dt \to \min_M, \quad |M| < \infty \tag{1.4}$$

Здесь $f^{0,T}(x)$, $g^{0,T}(x)$ — достаточно гладкие функции x, $x \in [0, l]$, а именно непрерывные, причем $f^{0,T}$ — кусочно-непрерывно дифференцируемы. Ниже будет установлено, что при выполнении некоторых дополнительных предположений задача оптимального управления (1.1) — (1.4) имеет решение.

Перейдем к безразмерным величинам при помощи линейных преобразований (см. [11])

$$t_* = \nu t, \quad \nu^2 = c / \rho l^2, \quad x_* = x / l, \quad x_* \in [0, 1]$$
$$\varphi_* = \varphi / L, \quad f_*^{0,T}(x_*) = f^{0,T}(x_* l) / L$$
$$g^{0,T}(x_*) = g^{0,T}(x_* l) / \nu L, \quad M_* = Ml / cL, \quad J_* = J\nu l^2 / c^2 L^2 \tag{1.5}$$

Здесь L — характерная величина размерности переменной φ, в частности, для упругих линейных смещений можно положить $L = l$, а для крутильных — $L = 1$. Опуская далее для сокращения записи нижний индекс $*$, получим соотношения задачи оптимального управления (1.1) — (1.4), в которых $\rho = c = l = 1$.

В силу автономности (стационарности) задачи зависимости от времени в управлении будут входить в виде разностей $t - t_0$ и $T - t_0$. Поэтому ее можно рассматривать при $t_0 = 0$, а затем совершить замену $t \to t - t_0$, $T \to T - t_0$.

Конечные условия (1.3) позволяют, в частности, рассмотреть задачу о перемещении упругой системы как целого на заданное расстояние или в фиксированную точку ξ с гашением колебаний

$$\varphi(T, x) = \xi, \quad \varphi^{\cdot}(T, x) = 0 \tag{1.6}$$

Аналогично может быть поставлена задача выделения какой-либо моды колебаний (см. п. 3).

Возможны другие постановки, имеющие определенный механический смысл. Например, приведение системы в состояние поступательного перемещения со скоростью η (без упругих колебаний):

$$\varphi(T, x) - \langle\varphi(T, x)\rangle = 0, \quad \varphi^{\cdot}(T, x) = \eta \tag{1.7}$$

Здесь угловые скобки означают среднее по x, $x \in [0, 1]$. Представляют определенный интерес конечные условия, являющиеся комбинациями (1.6), (1.7). В общем случае в качестве конечных условий, налагаемых на φ, $\varphi^{\cdot}$, может быть система (конечная или счетная) функционалов от $\varphi(T, x)$, $\varphi^{\cdot}(T, x)$.

2. Решение основной задачи. Применим метод Фурье [1, 3, 11], т. е. будем строить функцию $\varphi(t, x)$ в виде

$$\varphi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad X_n(x) = \cos \pi n x, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.1}$$

Здесь $\{X_n\}$ — ортогональная система собственных функций однородной краевой задачи (1.1), а $T_n(t)$ — неизвестные функции t, подлежащие определению. Они являются решением бесконечномерной задачи оптимального управления ($n = 0, 1, 2, \ldots$):

$$T_0^{\cdot\cdot} = M(t), \quad T_n^{\cdot\cdot} + \pi^2 n^2 T_n = 2M(t), \quad t \in [0, T] \tag{2.2}$$

$$T_n|_{t=0,\,T} = f_n^{0,\,T}, \quad T_n^{\cdot}|_{t=0,\,T} = g_n^{0,\,T}$$

$$J[M] = \int_0^T M^2(t)\,dt \to \min_M, \quad |M| < \infty$$

Постоянные $f_n^{0,T}$, $g_n^{0,T}$ — коэффициенты Фурье функций $f^{0,T}(x)$, $g^{0,T}(x)$ из (1.2), (1.3) (или (1.6) или (1.7)) по системе $\{X_n\}$. Применяя методику [2], из вида решения сопряженной задачи находим, что оптимальное управление $M(t)$ имеет вид

$$M(t) = At + v(t), \quad v(t + 2) = v(t), \quad t \in [0, T] \tag{2.3}$$

Здесь A — неизвестная постоянная, а $v(t)$ — неизвестная 2-периодическая функция t, представимая рядом Фурье. Для определения неизвестных величин воспользуемся представлениями функций $T_n(t)$ и их производных согласно (2.2)

$$T_0(t) = \int_0^t (t - \tau) M(\tau)\,d\tau + f_0^{\circ} + g_0^{\circ} t, \quad T_0^{\cdot} = \frac{dT_0}{dt} \tag{2.4}$$

$$T_n(t) = \frac{2}{\pi n} \int_0^t M(\tau) \sin \pi n (t - \tau)\,d\tau + f_n^{\circ} \cos \pi n t +$$

$$+ \frac{g_n^{\circ}}{\pi n} \sin \pi n t, \quad T_n^{\cdot} = \frac{dT_n}{dt}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Подставляя функции (2.4) в конечные условия (2.2), для определения неизвестной функции имеем проблему моментов вида

$$\int_0^T v(\tau)\,d\tau = g_0^T - g_0^\circ - \frac{1}{2}AT^2 \tag{2.5}$$

$$\int_0^T v(\tau)\cos\pi n\tau\,d\tau = \frac{\pi n}{2} f_n^T \sin\pi nT + \frac{1}{2} g_n^T\cos\pi nT - $$
$$ - \frac{1}{2} g_n^\circ - A\int_0^T \tau\cos\pi n\tau\,d\tau$$

$$\int_0^T v(\tau)\sin\pi n\tau\,d\tau = -\frac{\pi n}{2} f_n^T \cos\pi nT + \frac{1}{2} g_n^T\sin\pi nT + $$
$$ + \frac{\pi n}{2} f_n^\circ - A\int_0^T \tau\sin\pi n\tau\,d\tau$$

Так как $v(t)$ — периодическая функция, то, полагая [1] $T = 2N + \theta$, $N = 0, 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant \theta < 2$, получим для новой неизвестной функции

$$V_T(t) = \begin{cases} (N+1)v(t), & t \in [0,\theta] \\ Nv(t), & t \in (\theta, 2) \end{cases} \tag{2.6}$$

явное выражение в виде ряда Фурье

$$V_T(t) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (G_n\cos\pi nt + F_n\sin\pi nt) \tag{2.7}$$

$$G_0 = g_0^T - g_0^\circ - {}^1/{}_2 AT^2$$

$$G_n = \frac{\pi n}{2} f_n^T \sin\pi n T + \frac{1}{2} g_n^T\cos\pi nT - $$
$$ - \frac{1}{2} g_n^\circ - A\int_0^T \tau\cos\pi n\tau\,d\tau$$

$$F_n = -\frac{\pi n}{2} f_n^T\cos\pi nT + \frac{1}{2} g_n^T\sin\pi nT + $$
$$ + \frac{\pi n}{2} f_n^\circ - A\int_0^T \tau\sin\pi n\tau\,d\tau$$

На основе (1.2), (1.3), (2.2), согласно (2.7), периодическая функция $V_T(t)$ формально определяется в явном виде для всех t:

$$V_T(t) = \Phi(T,t) - A\Psi(T,t) \tag{2.8}$$

$$\Phi(T,t) = \frac{1}{2}\ G^T\left(T - t - 2\left[\frac{T-t}{2}\right]\right) + $$
$$ + F^{T'}\left(T - t - 2\left[\frac{T-t}{2}\right]\right)\Bigg\} - \frac{1}{2}\left\{G^\circ\left(t - 2\left[\frac{t}{2}\right]\right) + \right.$$
$$ \left. + F^{\circ'}\left(t - 2\left[\frac{t}{2}\right]\right)\right\}$$

$$\Psi(T,t) = t + 2\left[\frac{T-t}{2}\right]\frac{t+1}{2} + 2\left[\frac{t}{2}\right]\frac{t}{2} + $$
$$ + \frac{1}{4}\left(2\left[\frac{T-t}{2}\right]\right)^2 - \frac{1}{4}\left(2\left[\frac{t}{2}\right]\right)^2$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть числа. Отметим, что функции Φ, Ψ — периодические с периодом 2, а функции $G^{0,T}$, $F^{0,T}$ определяются при помощи исходных функций $g^{0,T}$, $f^{0,T}$ соотношениями [1]

$$G^{0,T}(t)=\begin{cases} g^{0,T}(t), & 0\leqslant t\leqslant 1\\ g^{0,T}(2-t), & 1<t\leqslant 2\end{cases} \tag{2.9}$$

$$F^{0,T}(t)=\begin{cases} f_x^{0,T'}(t), & 0\leqslant t\leqslant 1\\ -f_x^{0,T'}(2-t), & 1<t\leqslant 2\end{cases}$$

Теперь функция $v(t)$ находится непосредственно из (2.6) при $N = 1, 2, \ldots$ в виде

$$v(t)=\begin{cases} (N+1)^{-1}V_T(t), & t\in[0,\theta]\\ N^{-1}V_T(t), & t\in(\theta,2)\end{cases} \tag{2.10}$$

Если же $N=0$, т. е. $T=\theta<2$, то функция $v(t)$ существует не для всяких правых частей соотношений (2.5).

Рассмотрим сперва случай $N\geqslant 1$. Найдем неизвестную постоянную A из конечного условия (2.2) для $T_0(T)$, используя выражение (2.4), в кото рое подставляется функция $M(t)$ из (2.3), и учитывая (2.6), (2.8). Получим

$$M(t)=A\Psi^*(T,t)+\Phi^*(T,t),\quad t\in[0,T] \tag{2.11}$$

Здесь функции Ψ^* и Φ^* для $t\in[2m, 2m+\theta]$ и $t\in(2m+\theta, 2(m+1))$ соответственно равны ($m=0, 1, \ldots, N$):

$$\Psi^*=\begin{cases} t-(N+1)^{-1}\Psi\\ t-N^{-1}\Psi\end{cases},\qquad \Phi^*=\begin{cases}(N+1)^{-1}\Phi\\ N^{-1}\Phi\end{cases} \tag{2.12}$$

Подставим функцию $M(t)$ из (2.11) в неиспользованное конечное условие (2.2): $T_0(T)=f_0{}^T$. При условии

$$\Delta(T)=\int_0^T (T-\tau)\Psi^*(T,\tau)\,d\tau\neq 0 \tag{2.13}$$

постоянная A определяется однозначно. Подставляя это значение A в (2.11), получим оптимальное в смысле критерия (1.4) управление

$$M^*(t)=\left[f_0{}^T-f_0{}^\circ-g_0{}^\circ T-\int_0^T(T-\tau)\Phi^*(T,\tau)d\tau\right]\frac{\Psi^*(T,t)}{\Delta(T)}+ \tag{2.14}$$
$$+\Phi^*(T,t)$$

приводящее за время T упругую систему (1.1) из произвольного начального состояния (1.2) в заданное конечное (1.3). Оптимальное управляемое движение $\varphi^*(t, x)$ равно

$$\varphi^*(t,x)=\frac{1}{2}\int_0^t\{[x+(t-\tau)]-[x-(t-\tau)]\}M^*(\tau)\,d\tau+ \tag{2.15}$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\{g^\circ(x+\tau-[x+\tau])+g^\circ(x-\tau-[x-\tau])\}\,d\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\{f^\circ(x+t-[x+t])+f^\circ(x-t-[x-t])\}$$

Отметим, что условие (2.13) $\Delta(T) \neq 0$ выполняется при $T > 2$, так как $\Psi^*(T, t) > 0$ при $t > 0$. Если же $T = 2$, т. е. $N = 1$, $\theta = 0$, то $\Psi^* \equiv 0$ для $t \in (0, T)$ и $\Delta(T) = 0$. В этом случае правые части (2.5) — коэффициенты Фурье функции $v(t)$, а решение задачи управления существует при условии обращения в нуль выражения в квадратных скобках в (2.14).

Управление $M(t)$ (2.11) и функционал J (1.4) или (2.2) при этом от A не зависят.

Рассмотрим проблему моментов (2.5) в случае $T < 2$. Введем на полном интервале $0 \leqslant t \leqslant 2$ функцию $w(t)$, равную $v(t)$ при $t \in [0, \theta]$, и $w(t) \equiv 0$ при $t \in [\theta, 2]$. Тогда, согласно (2.8), получим $w(t) = \Phi(T, t) - A\Psi(T, t)$, где $\Psi \equiv t$; поэтому $\Psi^*(T, t) \equiv 0$ в (2.11) — (2.13), а постоянная A может быть произвольной. При этом функции $f^{\circ, T}$ $g^{\circ, T}$ должны быть такими, чтобы $w(t) \equiv 0$ для некоторого A при $t \in (\theta, 2]$.

Как указывалось в п. 1, управляющая функция $M^*(t)$ из (2.14) построена для произвольного начального распределения (1.2) в произвольный начальный момент времени t_0. Для этого нужно в (2.14) совершить замены: $t \to (t - t_0)$, $T \to (T - t_0)$. В результате управление M^* может быть представлено как функция этих аргументов и линейный оператор от $\varphi(t_0, x) = f^\circ(x)$, $\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}(t_0, x) = g^\circ(x)$ (а также от f^T, g^T; для сокращения записи эта зависимость не указывается):

$$M^* = M_0(t - t_0, T - t_0, [f^\circ(x)], [g^\circ(x)]) \tag{2.16}$$

Заменив в (2.16) начальные величины на текущие: $t_0 \to t$, $f^\circ(x) \to \varphi(t, x)$, $g^\circ(x) \to \varphi^{\boldsymbol{\cdot}}(t, x)$, получим оптимальное в смысле (1.4) управление в форме «синтеза». При этом следует иметь в виду, что представление (2.16) справедливо для $T - t > 2$. Начиная с момента $t < T - 2$ следует применять «программное» управление, построенное выше согласно (2.14). Если же $T - t_0 < 2$, то управление имеет вид (2.11).

3. Конкретные постановки задачи управления. 1°. Для задачи гашения упругих колебаний, вызванных начальными отклонениями (1.2), конечные условия (2.2) имеют вид ($T_0(T)$, $T^{\boldsymbol{\cdot}}_0(T)$ произвольны)

$$T_n(T) = 0, \quad T_n^{\boldsymbol{\cdot}}(T) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

Если упругое тело должно покоиться в произвольном положении, то условия (3.1) дополняются равенством $T_0^{\boldsymbol{\cdot}}(T) = 0$, т. е. $g^T(x) \equiv 0$; при этом $A^* = 0$. Если положение фиксируется для $t = T$, то $T_0(T) = \xi$, где ξ — заданная величина, т. е. $f^T(x) = \xi$, см. (1.6). Отметим, что при $M \equiv 0$ $(t > T)$ система (1.1) допускает решение указанного выше вида.

2°. В задаче выделения мод колебаний (см. п. 1), например одной k-й моды, конечные условия (2.2) имеют вид

$$\begin{gathered} T_n(T) = 0, \quad T_n^{\boldsymbol{\cdot}}(T) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots \\ T_k(T) = f_k^T, \quad T_k^{\boldsymbol{\cdot}}(T) = g_k^T \end{gathered} \tag{3.2}$$

Функции f^T и g^T, очевидно, равны

$$f^T(x) = f_k^T \cos \pi k x, \quad g^T(x) = g_k^T \cos \pi k x$$

Если положить далее при $t > T$ управление $M(t) \equiv 0$, то упругая система будет совершать колебания только k-й моды.

3°. Рассмотрим случай $\theta = 0$, т. е. интервала времени $T = 2N$, $N = 1, 2, \ldots$, кратного периоду собственных колебаний. При $N = 1$ задача исследована в п. 2. Для $N = 2, 3, \ldots$ построение управляющей функции $M(t)$ на основе (2.11) существенно упрощается. Функция $v(t)$ согласно (2.6) — (2.10) задается одним выражением: $v(t) = V_T(t) / N$, $t \in [0, 2N]$. Управление $M(t)$ вычисляется также однозначно при помощи (2.15). В частности, в задаче приведения упругой системы в состояние поступательного перемещения как целого с заданной скоростью η (см. (1.1), (1.2), (1.7)) оптимальное управление равно

$$M^*(t) = \frac{\eta}{2N} - \frac{1}{2N}\left\{G^\circ\left(t - 2\left[\frac{t}{2}\right]\right) + F^{\circ\cdot}\left(t - 2\left[\frac{t}{2}\right]\right)\right\} \tag{3.3}$$

Оптимальное движение описывается формулой (2.16). Аналогично строится решение задачи о приведении упругой системы в заданное положение $\varphi(T, x) = \xi$ (см. (1.1), (1.2), (1.6)) с гашением упругих колебаний.

4. Обобщения задачи управления. Методический интерес представляет исследование задачи управления более общей системой, чем (1.1). Упругая система может быть подвержена дополнительным управляющим и внешним как распределенным, так и сосредоточенным (граничным) воздействиям

$$\begin{gathered} \rho\varphi^{\cdot\cdot} = c\varphi'' + w(t, x) + W, \quad \varphi = \varphi(t, x), \quad x \in (0, l) \\ c\varphi'(t, 0) = -m_0(t) - M_0, \quad c\varphi'(t, l) = m_l(t) + M_l, \quad t \in [t_0, T] \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь w — заданное распределенное внешнее воздействие, m_0, m_l — сосредоточенные на левом и правом концах заданные силовые воздействия, W — распределенное управление, функция от t и x, M_0, M_l — сосредоточенные (граничные) управления, функции t (см. п. 2). Начальные и конечные условия для переменной $\varphi = \varphi(t, x)$ вновь имеют вид (1.2) (1.3) или более общий, см. п. 1. В качестве минимизируемого функционала можно взять взвешенную сумму величин типа (1.4)

$$\begin{gathered} J[W, M_0, M_l] = c_W^2 \int_{t_0}^{T} dt \int_0^l W^2\, dx + \\ + \int_{t_0}^{T} (c_0^2 M_0^2 + c_l^2 M_l^2)\, dt \to \min_{W,\, M_0,\, M_l} \end{gathered} \tag{4.2}$$

Здесь c_W^2, c_0^2, c_l^2 — постоянные «весовые» коэффициенты, большие нуля. Неограниченное увеличение каких-либо из них приводит к тому, что соответствующие управляющие функции стремятся к нулю, причем их вклады в функционал (4.2) также стремятся к нулю. Например, при $c_{0,l}^2 \to \infty$ получим задачу оптимального управления системой (4.1), (1.2), (1.3) с функционалом (4.2), в которых $M_0 = M_l \equiv 0$, т. е. управление осуществляется только посредством функции $W(t, x)$. Аналогично тому, как это делалось в п. 2, можно установить, что решение существует и единственно при любых достаточно гладких функциях w, m_0, m_l, $f^{0,T}$, $g^{0,T}$ и $T > t_0$. Его явное построение как в виде «программы», так и в форме «синтеза» не представляет затруднений. Действительно, полагая $s = t - t_0$, где $s \in [0, S]$, $S = T - t_0$, на основе метода Фурье получим, разрешив сопряженную систему [2], для искомой управляющей функции $W(t, x)$ выражение

$$W(t,x) = \frac{1}{2}(A_0 s + B_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \pi ns + B_n \cos \pi ns) \cos \pi nx. \tag{4.3}$$

Постоянные A_n, B_n $(n = 0, 1, \ldots)$ определяются из конечных условий типа (2.2):

$$A_n = \frac{1}{\Delta_n(S)} \left[\frac{a_n}{2} \left(S + \frac{\sin 2\pi nS}{2\pi n} \right) - b_n \frac{\sin^2 \pi nS}{2\pi n} \right] \tag{4.4}$$

$$B_n = \frac{1}{\Delta_n(S)} \left[\frac{b_n}{2} \left(S - \frac{\sin 2\pi nS}{2\pi n} \right) - a_n \frac{\sin^2 \pi nS}{2\pi n} \right]$$

$$\Delta_n(S) = (S^2 / 4)[1 - (\pi nS)^{-2} \sin^2 \pi nS]$$

Выражения для A_0, B_0 получаются из (4.4) при $n \to 0$. Коэффициенты a_n, b_n зависят от параметров t_0, S и являются функционалами начального и конечного распределений, а также заданных граничных и распределенного воздействий

$$a_n = -\int_0^S [w_n(\sigma + t_0) + 2m_0(\sigma + t_0) + 2m_l(\sigma + t_0)] \sin \pi n\sigma \, d\sigma +$$

$$+ \pi n f_n^\circ - \pi n f_n^T \cos \pi nS + g_n^T \sin \pi nS$$

$$b_n = -\int_0^S [w_n(\sigma + t_0) + 2m_0(\sigma + t_0) + 2m_l(\sigma + t_0)] \cos \pi n\sigma \, d\sigma -$$

$$- g_n^\circ + \pi n f_n^T \sin \pi nS + g_n^T \cos \pi nS$$

$$w(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \cos \pi nx, \quad t = s + t_0$$

Практическая реализация таких распределенных управлений представляется весьма затруднительной. На практике, очевидно, могут быть реализованы сосредоточенные (импульсные) воздействия на некотором, быть может довольно плотном, множестве точек распределенной упругой системы. В таких ситуациях возникают проблемы, которые были предметом обсуждения в [12]. Случай подвижного управления системами с распределенными параметрами рассматривался в [7].

Значительный прикладной интерес представляет также исследование задачи оптимального управления в случае, когда плотность ρ и жесткость c являются переменными. Например, управляемая система может содержать абсолютно жесткие тела (маховики [11]) или неравномерно распределенные массы. Для таких задач может быть применен аналогичный изложенному подход, приводящий, однако, к более сложной проблеме моментов, см. [1, 7]. Если же система близка к однородной вида (4.1), то для приближенного решения краевой задачи возможно применение метода возмущений [14], на основе которого может быть построено приближенное оптимальное управление.

Автор благодарит Болотника Н. Н. за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1974. 568 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
5. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: Физматгиз, 1961. 310 с.
6. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
7. *Бутковский А. Г., Пустыльников Л. М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980. 384 с.
8. *Троицкий В. А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л.: Машиностроение, 1976. 248 с.
9. *Комков В.* Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975. 158 с.
10. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с.
11. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Об управлении системами с упругими элементами.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 22—31.
12. *Бутковский А. Г.* Структурная теория распределенных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
13. *Book W. J.* Analysis of massless elastic chains with servo controlled joints.— Trans. ASME. J. Dyn. Syst., Measurem. and Control, 1979, v. 101, No. 3, p. 187—192.
14. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2, М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.XII.1980