Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 6, 1981

УДК 539.3

ДЕФОРМАЦИЯ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПРОИЗВОЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ ЩЕЛЕЙ

Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.,
Рывкин М. Б.

Рассматриваются задачи о периодической системе разрезов, расположенных на границе склейки двух упругих полуплоскостей и находящихся под действием непериодических нагрузок. В одной задаче предполагается, что разрезы раскрыты и к их берегам приложены нормальные и касательные напряжения, в другой задаче берега сомкнуты и нагружены касательными напряжениями. Методика решения основана на совместном использовании дискретного преобразования Фурье и теории краевых задач для автоморфных аналитических функций. Решения получены в квадратурах. Описываются другие классы задач, к которым можно применить предлагаемую методику.

В общем случае, при действии нерегулярных нагрузок решение основывается обычно на теории представлений групп симметрии [1, 2], при некоторых типах симметрии, в частности трансляционной — на дискретном преобразовании Фурье [3—6]. Однако объекты преобразования в одной и той же задаче могут быть разными, и их выбор существенно влияет на разрешимость краевой задачи для трансформант в ячейке периодов. Ниже на примере решения в квадратурах двух задач теории трещин показано, каким путем можно эффективно использовать дискретное преобразование Фурье совместно с методом Мусхелишвили.

1. Пусть упругая плоскость $z = x + iy$ склеена из полуплоскостей $y \geqslant 0$ и $y \leqslant 0$ с разными упругими постоянными и ослаблена по линии склейки периодической с периодом 2π системой открытых щелей. В k-й полосе периодов $(2k-1)\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ эта система L_k состоит из отрезков прямой $a_n + 2k\pi < x < b_n + 2k\pi$, $y = 0$, $n = 1, 2, \ldots, N$. К берегам щелей приложены произвольные, непериодические, нормальные и касательные напряжения (периодическая задача решена в [7]).

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})(x \pm i0) = g_\pm(x), \quad x \in L_k \tag{1.1}$$

Требуется найти упругие перемещения плоскости $(u + iv)(z)$, соответствующие случаю конечной энергии деформаций в окрестности точек раздела граничных условий.

Рассмотрим вспомогательную последовательность сформулированных краевых задач, в которых правая часть (1.1) принимает следующие (непериодические) значения, зависящие от параметра φ:

$$\begin{gathered}(\sigma_y - i\tau_{xy})(x + 2k\pi \pm i0) = g_\pm^s(x)\, e^{ik\varphi}, \quad x \in L_0 \\ g_\pm^s(x) = {}^1/_2\pi^{-1} g_\pm(x + 2s\pi), s = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \varphi \in [0, 2\pi]\end{gathered} \tag{1.2}$$

Решение этих задач будем искать в форме [8]:

(1.3)
$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}\left[c_j K(z) + c_{j+2} M(z)\right]$$
$$\sigma_y - i\tau_{xy} = c_j\left[K(z) + (z-\bar z)\overline{K'(z)}\right] + \delta_j K(\bar z) + c_{j+2}\left[M(z) - M(\bar z) + (z-\bar z)\overline{M'(z)}\right]$$
$$2\mu_j \frac{\partial}{\partial x}(u+iv) = c_j\left[\varkappa_j K(z) - (z-\bar z)\overline{K'(z)}\right] - \delta_j K(\bar z) + c_{j+2}\left[\varkappa_j M(z) + M(\bar z) - (z-\bar z)\overline{M'(z)}\right]$$
$$\delta_1 = c_2,\quad \delta_2 = c_1,\quad c_1 = (\varkappa_1 + m)^{-1}$$
$$c_2 = (1 + m\varkappa_2)^{-1},\quad c_3 = m(1+\varkappa_2),\quad c_4 = 1+\varkappa_1,\quad m = \mu_1\mu_2^{-1}$$
$$\lim_{y\to 0} yK'(z) = 0,\quad \lim_{y\to 0} yM'(z) = 0$$
$$z \neq a_n + 2k\pi,\quad z \neq b_n + 2k\pi,\quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

Функции $K(z)$ и $M(z)$ регулярны в комплексной плоскости z, за исключением, может быть, действительной оси; индекс $j = 1$ ($j = 2$) определяет параметры, относящиеся к полуплоскости $y \geqslant 0$ ($y \leqslant 0$); для плоской деформации $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$, для обобщенного плоского напряженного состояния $\varkappa_j = (3 - \nu_j)(1 + \nu_j)^{-1}$, μ_j — модуль сдвига, ν_j — коэффициент Пуассона.

Положим

(1.4)
$$K(z) = e^{i\alpha z} K_0(z),\quad M(z) = e^{i\alpha z} M_0(z),\quad \alpha = {}^1/_2\pi^{-1}\varphi$$

и подставим (1.4) в (1.3) и (1.2). Тогда окажется, что функции $K_0(z)$ и $M_0(z)$ должны быть кусочно-регулярными и теперь уже периодическими по x с периодом 2π решениями двух задач ($x \in L_0$, $k = 0, \pm 1, \ldots$):

(1.5)
$$K_0^+(x + 2k\pi) + gK_0^-(x + 2k\pi) = e^{-i\alpha x} l^s(x)$$
$$M_0^+(x + 2k\pi) - M_0^-(x + 2k\pi) = e^{-i\alpha x} m^s(x)$$
$$g = c_1^{-1}c_2,\quad l^s(x) = \Delta c_1^{-1}\left[c_3 g_-^s(x) + c_4 g_+^s(x)\right]$$
$$m^s(x) = \Delta\left[g_+^s(x) - g_-^s(x)\right],\quad \Delta^{-1} = c_3 + c_4$$

Такие решения на основе теории краевых задач для автоморфных функций [9] были построены в [7]. Однако здесь в связи с факторизацией (1.4) и условиями затухания функций $K(z)$, $M(z)$ при $z \to \infty$ они приобретают иной вид.

Решение задачи о скачке, исчезающее при $z \to -i\infty$, дается автоморфным аналогом интеграла типа Коши ([9], § 52) с основной автоморфной функцией e^{iz}:

$$M_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_0} \frac{e^{it - i\alpha t} m^s(t)\,dt}{e^{it} - e^{iz}}$$

Каноническое решение $X(z)$ задачи Римана (1.5) в классе функций с интегрируемой особенностью в точках a_n, b_n строится на основе решения задачи о скачке. Видоизменяя известную методику ([9], § 52) соответствующим образом, в случае разомкнутых контуров получим

$$X(z)=\prod_{n=1}^{N}(e^{iz}-e^{ib_n})\,e^{\Gamma(z)}$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_0}\frac{\ln(-g)\,e^{it}\,dt}{e^{it}-e^{iz}}=\left(\frac{1}{2}-i\gamma\right)\sum_{n=1}^{N}\ln\frac{e^{iz}-e^{ib_n}}{e^{iz}-e^{ia_n}}$$

где при вычислении $\gamma={}^1/_2\pi^{-1}\ln g$ берется главное значение логарифма. Из этих равенств следует

$$X(z)=\prod_{n=1}^{N}(e^{iz}-e^{ia_n})^{-1/2+i\gamma}(e^{iz}-e^{ib_n})^{-1/2-i\gamma}$$

причем выбранная ветвь канонического решения определяется асимптотикой $e^{iNz}X(z)\to 1,\ z\to -i\infty$. Общее решение задачи Римана, обращающееся в нуль на нижнем конце полосы периодов, находится обычным путем. Учитывая (1.4), получим

$$K(z)=X(z)\,e^{i\alpha z}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_0}\frac{e^{it-i\alpha t}\,l^s(t)\,dt}{(e^{it}-e^{iz})\,X^+(t)}+P_N^s(e^{iz})\right]\tag{1.6}$$

$$P_N^s(t)=\sum_{n=1}^{N}C_n^s t^{n-1},\quad M(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_0}\frac{\exp(it-i\alpha t+i\alpha z)\,m^s(t)\,dt}{e^{it}-e^{iz}}$$

Комплексные постоянные C_n^s определяются из условий однозначности перемещений при обходе щелей

$$\int\limits_{a_n}^{b_n}\frac{\partial}{\partial x}\left[(u+iv)(x+i0)-(u+iv)(x-i0)\right]dx=0,\quad n=1,\ldots,N\tag{1.7}$$

Вернемся к задаче (1.1). Решение (1.3) — (1.7) задачи (1.2) соответствует граничным условиям

$$\begin{aligned}&\sigma_y^{s\varphi}(x+2k\pi\pm i0)=\operatorname{Re}g_\pm^s(x)\cos k\varphi-\operatorname{Im}g_\pm^s(x)\sin k\varphi\\&\tau_{xy}^{s\varphi}(x+2k\pi\pm i0)=-\operatorname{Re}g_\pm^s(x)\sin k\varphi-\operatorname{Im}g_\pm^s(x)\cos k\varphi\\&x\in L_0,\quad k=0,\pm 1,\ldots\end{aligned}\tag{1.8}$$

Интегрирование этого решения и условий во всей плоскости z по φ от 0 до 2π дает новое решение (своего рода функцию Грина u^s+iv^s), соответствующее новым условиям

$$\begin{aligned}&{}^1/_2\pi^{-1}\sigma_y^s(x+2k\pi\pm i0)=\operatorname{Re}\ g_\pm^s(x)\delta_{k0}\\&{}^1/_2\pi^{-1}\tau_{xy}^s(x+2k\pi\pm i0)=-\operatorname{Im}g_\pm^s(x)\delta_{k0},\quad x\in L_0,\quad k=\\&=0,\pm 1,\ldots\end{aligned}\tag{1.9}$$

где δ_{ks} — символ Кронекера. Суперпозиция решений u^s, v^s, сдвинутых по x на $2\pi s$

$$u(z)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}u^{s\varphi}(z+2\pi s)\,d\varphi,\quad v(z)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}v^{s\varphi}(z+2\pi s)\,d\varphi\tag{1.10}$$

является, очевидно, решением исходной задачи, удовлетворяющим условиям (1.1) в тех точках плоскости z, где ряды (1.10) сходятся.

Пример. Пусть $N = 1$, $a_1 = -a$, $b_1 = a$, $0 < a < \pi$ — полоса периодов ослаблена одной щелью. В этом случае $P_1^s(e^{iz}) = C_1^s$, согласно (1.6), (1.7)

(1.11) $$X(z) = (e^{iz} - e^{-ia})^{-1/2+i\gamma}(e^{iz} - e^{ia})^{-1/2-i\gamma}$$

$$C_1^s = -\left\{\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \frac{e^{i\alpha x}X^+(x)\, e^{it-i\alpha t} l^s(t)\, dt\, dx}{(e^{it} - e^{ix})X^+(t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi\Delta}{c_1}\int_{-a}^{a}[(\varkappa_1 - 1)g_+^s(x) - m(\varkappa_2 - 1)g_-^s(x)]\,dx\right\}\left[2\pi\int_{-a}^{a}X^+(x)\, l^{i\alpha x}dx\right]^{-1}$$

Входящие сюда интегралы понимаются в смысле главных значений по Коши.

Найдем асимптотику напряжений, неограниченно растущих в точках $z = \pm a + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$. Учитывая, что $K^+(x) = K^-(x)$ вне L_k, в силу (1.3) для случая произвольного N получим $(\sigma_y - i\tau_{xy})(x) = (c_1 + c_2)K(x)$. Интегрируя функцию $K(x)$ по φ от 0 до 2π, при условиях (1.9) согласно (1.4), (1.6) получим

(1.12) $$(\sigma_y - i\tau_{xy})^s(x) = (c_1 + c_2)\frac{X(x)}{2\pi i}\left\{\int_{L_0}\frac{l^s(t)\,dt}{(t - x)X^+(t)} + i\int_0^{2\pi} e^{i\alpha x}P_N^s(e^{i\varphi})\,d\varphi\right\}$$

Выражение в фигурных скобках при $x = a_n + 2k\pi$ и $x = b_n + 2k\pi$ ограничено; характер особенностей в этих точках определяется поведением функции $X(z)$ в (1.6) и имеет вид

(1.13) $$(\sigma_y - i\tau_{xy})^s(x + 2k\pi) = (M_{kn}^{\mp} - iN_{kn}^{\mp})\,|x - d_n|^{-1/2 \pm i\gamma}, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

где верхние знаки берутся при $d_n = a_n$, нижние — при $d_n = b_n$.

Вернемся к случаю $N = 1$ и на этом примере покажем способ вычисления коэффициентов интенсивности при любых N и n. Представим каноническое решение (1.11) в форме

(1.14) $$X(z) = \frac{1}{2i}\exp\left(a\gamma - \frac{iz}{2}\right)\left(\sin\frac{z + a}{2}\right)^{-1/2+i\gamma}\left(\sin\frac{z - a}{2}\right)^{-1/2-i\gamma}$$

Тогда при $x \in L_0$, полагая $-1 = e^{i\pi}$, имеем

(1.15) $$X^+(x) = -\frac{\sqrt{g}}{2}\exp\left(a\gamma - \frac{ix}{2}\right)\left(\sin\frac{x + a}{2}\right)^{-1/2+i\gamma}\left(\sin\frac{a - x}{2}\right)^{-1/2-i\gamma}$$

Если $x \in (a + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, то $X(x)$ выражается формулой (1.14). Подставив (1.14), (1.15) в (1.12) и учитывая (1.13), получим

$$M_{k1}^+ - iN_{k1}^+ = \frac{(c_1 + c_2)(2\sin a)^{-1/2+i\gamma}}{\pi\exp(1/2\, ia)}\left\{\int_{L_0}\left(\sin\frac{a + t}{2}\right)^{1/2-i\gamma}\left(\sin\frac{a - t}{2}\right)^{1/2+i\gamma}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\exp(1/2\, at)\, l^s(t)\,dt}{\sqrt{g}\,(t - a - 2k\pi)} - \frac{i}{a}\int_0^{2\pi}\exp(a\gamma + ia\alpha + ik\varphi)\,C_1^s\,d\varphi\right\}$$

Замечания. 1°. Указанный метод без изменений можно применять к аналогичным задачам о совокупности L_k абсолютно жестких, тонких и слабоизогнутых включений произвольной формы, расположенных на границе раздела материалов в составной плоскости, когда вместо (1.1) должно выполняться условие $(u + iv)(x \pm i0) = g_\pm(x)$, $x \in L_k$, к задачам о давлении на полуплоскость системы L_k штампов, полностью сцепленных или соприкасающихся без трения с ее границей; следуя [7, 10], можно сводить к нормальным системам Пуанкаре — Коха те же смешанные задачи для многослойной полосы и полуплоскости.

2°. Условия (1.2) соответствуют условиям (1.1), дискретно преобразованным по индексу k с параметром φ. Действительно, введем дискретное преобразование

Фурье $f^*(\varphi)$ функции $f(k)$:

$$f^*(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, e^{-ik\varphi}$$

и вектор $U(z) = (u, v, \sigma_x, \tau_{xy})(z)$. Тогда условие

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})(x + 2k\pi \pm i0) = g_{\pm}^{s}(x)\,\delta_{k0}, \quad x \in L_0$$

в сущности совпадающее с условием (1.1) (согласно (1.8)—(1.10) оно определяет функцию Грина задачи (1.1)), и условие непрерывности

$$U(2k\pi + \pi - 0 + iy) = U(2k\pi + \pi + 0 + iy), \quad -\infty < y < \infty$$

будучи подвергнуты дискретному преобразованию Фурье, дадут следующие условия на границах упругой полосы $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$:

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^*(x \pm i0) = g_{\pm}^{s}(x), \quad x \in L_0$$

$$U^*(\pi - 0 + iy) = e^{i\varphi} U^*(-\pi + 0 + iy), \quad -\infty < y < \infty$$

Очевидно, эти краевые условия определяют ту же задачу для трансформант, что и условия (1.2) для самих напряжений во всей плоскости. В явном виде дискретное преобразование Фурье можно было бы применить к краевым задачам типа (1.5) (но не к уравнениям теории упругости, как в [6]), которые получаются при подстановке в условие (1.1) решения (1.3). Результаты обоих подходов совпадают.

2. В поле однородных на бесконечности касательных и сжимающих нормальных напряжений ненагруженные щели могут полностью закрыться, но служить при этом концентраторами напряжений, опасных с точки зрения теории разрушения. Рассмотрим задачу п. 1 для закрытых щелей, когда на их берегах вместо (1.1) имеют место условия соприкасания

$$\tau_{xy}(x \pm i0) = h_{\pm}(x), \quad v(x + i0) = v(x - i0), \quad \sigma_y(x + i0) = \sigma_y(x - i0) \tag{2.1}$$

$$x \in L_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В отличие от задач для открытых щелей [7, 8, 11] эта задача, видимо, не изучалась ранее ни в случае периодических нагрузок, ни в случае конечного числа щелей.

Пусть $h_{\pm}(x)$ — периодические и в совокупности самоуравновешенные функции: $h_{\pm}(x + 2k\pi) = h_{\pm}(x)$, $x \in L_0$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ Сохранив решение в форме (1.3) и подставив его в (2.1), получим для периодических с периодом 2π, регулярных в плоскости z с разрезами и исчезающих на бесконечности функций $M(z)$ и $\Phi(z) = -i(c_1 + c_2)K(z)$ следующие краевые задачи:

$$M^+(x) - M^-(x) = m(x), \quad x \in L_0 \tag{2.2}$$

$$\operatorname{Re} \Phi^+(x) = r^+(x), \quad x \in L_0 \tag{2.3}$$

$$\operatorname{Re} \Phi^-(x) = r^-(x), \quad x \in L_0 \tag{2.4}$$

$$m(x) = -i\Delta\,[h_+(x) - h_-(x)]$$

$$r^+(x) = c_2 q(x) + r(x), \quad r^-(x) = -c_1 q(x) + r(x)$$

$$r(x) = -\Delta\,[c_4 h_+(x) + c_3 h_-(x)]$$

$$q(x) = m\Delta\,(\varkappa_1\varkappa_2 - 1)[h_+(x) - h_-(x)]$$

Решение задачи о скачке (2.2) выписано в (1.6). Задачи Дирихле (2.3), (2.4), согласно известным результатам ([12], § 91), сводятся к двум краевым задачам Римана

$$\Psi^+(x) + \Psi^-(x) = \psi(x), \quad x \in L_0 \tag{2.5}$$

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = \omega(x), \quad x \in L_0 \tag{2.6}$$

$$\psi(x) = r^+(x) + r^-(x), \quad \omega(x) = r^+(x) - r^-(x) \tag{2.7}$$

для периодических с периодом 2π функций $\Psi(z)$ и $\Omega(z)$, определяемых равенством $\Phi(z) = \Psi(z) + \Omega(z)$ и удовлетворяющих дополнительным условиям

$$\overline{\Psi}(z) = \Psi(z), \quad \overline{\Omega}(z) = -\Omega(z) \tag{2.8}$$

Решения задач (2.5), (2.6) в классе функций, исчезающих на бесконечности и интегрируемых в окрестности точек a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, имеют вид

$$\Psi(z) = \frac{X(z)}{2\pi} \int\limits_{L_0} \frac{e^{it}\psi(t)\,dt}{(e^{it} - e^{iz})\,X^+(t)} + P_N(e^{iz})\,X(z) \tag{2.9}$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_0} \frac{e^{it}\omega(t)\,dt}{e^{it} - e^{iz}}, \quad P_N(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n t^{n-1}$$

$$X(z) = \prod_{n=1}^{N} (e^{iz} - e^{ia_n})^{-1/2} (e^{iz} - e^{ib_n})^{-1/2}$$

где C_n — комплексные постоянные, определяемые первым условием (2.8), и условием, аналогичным (1.7)

$$\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\partial}{\partial x} [u(x + i0) - u(x - i0)]\,dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N \tag{2.10}$$

Для случая конечного числа щелей в плоскости z, расположенных только на отрезках L_0, решение можно получить разложением экспоненциальных функций (1.6), (2.9) в ряды по степеням t и z [13]. Ограничиваясь первыми членами разложения, в пределе получим

$$M(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{m(t)\,dt}{t - z}, \quad \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{\omega(t)\,dt}{t - z}$$

$$\Psi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{\psi(t)\,dt}{(t - z)\,X^+(t)} + X(z)\,P_N(z)$$

$$X(z) = \prod_{n=1}^{N} (z - a_n)^{-1/2} (z - b_n)^{-1/2}$$

где C_n — вещественные постоянные, удовлетворяющие условию (2.10).

3. Для однородной плоскости задача (2.1) решается при произвольных непериодических нагрузках. Действительно, если $\mu_1 = \mu_2$ и $\nu_1 = \nu_2$, то решение разбивается на сумму: а) симметричного относительно оси x и б) кососимметричного решений.

Задача а) — это тривиальная основная задача для нижней полуплоскости $y \leqslant 0$ с граничными условиями

$$\tau_{xy}(x - i0) = -{}^1/_2\,[h_+(x) - h_-(x)], \quad v(x - i0) = 0,$$
$$x \in (-\infty, \infty)$$

Задача б) эквивалентна задаче (1.1), в которой следует положить

$$\operatorname{Re} g_\pm(x) = 0, \quad \operatorname{Im} g_\pm(x) = -{}^1/_2\,[h_+(x) + h_-(x)]$$

при этом в силу симметрии второе условие (2.1) будет выполнено.

В общем случае задача (2.1) остается нерешенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурышкин М. Л.* Обобщенная периодическая задача теории упругости.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 521—531.
2. *Бурышкин М. Л.* О функциях Колосова—Мусхелишвили в обобщенных симметричных задачах теории упругости.— Докл. АН УССР, 1979, сер. А, № 5, с. 344—348.
3. *Бакланов Е. В.* Излучение электромагнитных волн из системы полубесконечных пластин.— Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 3, с. 570—573.
4. *Galindo V.* Asimptotic behavior of the coupling coefficients for an infinite array of thin-walled rectangular waveguides.— IEEE Trans., 1966, AP14, No. 2, p. 248—259.
5. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972, 374 с.
6. *Нуллер Б. М., Рывкин М. Б.* О краевых задачах для областей периодической структуры, деформируемых произвольной нагрузкой.— Изв. ВНИИ гидротехники, 1980, т. 136, с. 49—55.
7. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения задач теории упругости для полосы, полуплоскости и плоскости, ослабленных периодическими системами щелей.— Изв. ВНИИ гидротехники, 1975, т. 107, с. 14—23.
8. *Храпков А. А.* Приведение некоторых типов воздействий на гидротехнические сооружения и их основания к поверхностным нагрузкам.— В кн.: Сб. докл. по гидротехнике. Вып. 5. М.— Л.: Госэнергоиздат, 1963, с. 140—157.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 53—61.
11. *Черепанов Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1962, № 1, с. 131—137.
12. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
13. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Периодические контактные задачи для упругой полуплоскости, подкрепленной стрингерами или балками равного сопротивления.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 81—88.

Ленинград

Поступила в редакцию
4.III.1981