

УДК 536.46 : 533.6 + 534.222.2

ЭВОЛЮЦИЯ КОНЕЧНЫХ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ГОРЕНИИ ПОРОХА

Берман В. С.

Рассматривается задача о нестационарном горении пороха в рамках модифицированной модели Зельдовича Я. Б. — Новожилова Б. В. [1,2]. Изучается развитие конечных возмущений поверхности и начального температурного профиля в предположении, что характерное расстояние, на котором возмущения существенно изменяются, значительно больше характерного размера релаксации стационарного температурного профиля. При помощи метода многих масштабов выводятся уравнения, описывающие эволюцию поверхности горения и температурного поля во времени и пространстве. Рассматривается только длинноволновая структура. Строятся разрывные, в данном приближении, решения. Внутренняя структура разрывов не исследуется.

Модель [1, 2] нестационарного горения пороха (конденсированной фазы) основана на предположении, что единственной инерционной стадией в системе газ плюс порох является тепловая релаксация конденсированной фазы. При этом предполагается, что химическая реакция, идущая в порохе у поверхности раздела газа и конденсированной фазы, квазистационарна и занимает область, значительно меньшую области, определяемой характерным размером тепловой релаксации.

Аналогичная задача возникает при рассмотрении процесса взаимодействия излучения большой мощности с веществом [3, 4]. В ряде работ [1, 2] изучался вопрос нестационарного горения пороха, горящая поверхность которого плоская. В основном исследовалась устойчивость стационарных режимов к малым возмущениям [1, 2]. Найден [5] автомодельный режим горения пороха. Численно исследовались [6] нелинейные переходные режимы горения.

В данной работе делается попытка аналитического решения задачи о горении пороха в трехмерной постановке при условии, что внешние условия, а также начальное распределение температуры и начальная форма поверхности изменяются достаточно медленно.

1. Основные уравнения. Обозначим через t_1 характерное время изменения внешних условий, а через l_1 — характерный размер, на котором изменяются начальные распределения температуры, форма поверхности и эрозионный поток. Далее полагаем, что справедливы соотношения

$$(1.1) \quad O(t_0/t_1) = O(l_0/l_1) = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

где l_0 — характерный размер, а t_0 — характерное время тепловой релаксации.

Положим, что область $X > S(Y, Z, t)$ соответствует пространству, занятому порохом, где $S(Y, Z, t)$ — горящая поверхность. Математическая формулировка задачи имеет следующий вид:

$$(1.2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2}$$

$$\begin{aligned} \Theta(X, Y, Z, 0) &= \Theta^{\circ}(X, Y, Z), \quad S(Y, Z, 0) = S^{\circ}(Y, Z) \\ \Theta(S(Y, Z, t), Y, Z, t) &= \Phi(\varphi, p(t), Q(Y, Z, t)) \\ \Theta(\infty, Y, Z, t) &= 0, \quad \varphi = \left| \frac{\partial \Theta}{\partial N} (S(Y, Z, t), Y, Z, t) \right| \\ V_n &= (\partial S / \partial t) [1 + (\partial S / \partial Y)^2 + (\partial S / \partial Z)^2]^{-1/2} = F(\varphi, P, Q) \end{aligned}$$

Здесь Θ — безразмерная температура пороха, t — время, $R = (X, Y, Z)$ — вектор пространственных переменных, $\Theta^{\circ}(R)$ — начальное распределение температуры, Φ и F — заданные функции своих аргументов, φ — нормальный к поверхности горения градиент температуры, N — нормаль к поверхности, V_n — нормальная скорость движения поверхности, $X - S(Y, Z, t) = 0$ — уравнение горячей поверхности, $P(t)$ — давление газа, $Q(Y, Z, t)$ — скорость эрозионного потока.

Результат решения задачи (1.2) — определение $\Theta(R, t)$ и $S(Y, Z, t)$ при заданных $\Theta^{\circ}(R)$, $S^{\circ}(Y, Z)$, Φ , F , P , Q .

Отметим, что нахождение функций F и Φ , которые в общем случае могут также зависеть от R , t и ε явным образом, — сложная задача, которая сводится к решению стационарных уравнений переноса в газовой фазе ($X - S(Y, Z, t) < 0$ при параметрической зависимости переменных от времени. Решение уравнений тепло- и массопереноса в газовой фазе облегчается при учете больших значений энергии активации реакции, что дает возможность применить метод сращиваемых асимптотических разложений. Для одномерного случая (поверхность горения плоская) метод определения функций F и Φ хорошо разработан [1, 2]. В двух- и трехмерных случаях до настоящего времени эта задача не решена.

В связи с тем, что в данной работе изучается случай малых значений ε , представляется допустимым использовать квазиодномерный вариант F и Φ . Таким образом, далее под F и Φ понимаются главные члены разложений их соответствующих многомерных аналогов в ряд по ε при фиксированных R_{ε} и t_{ε} .

Система (1.2) допускает стационарное одномерное решение

$$(1.3) \quad \begin{aligned} S &= Vt, \quad \Theta(X, Y, Z, t) = A \exp[-V(X - Vt)] \\ \varphi &= VA, \quad P = P^{\circ}, \quad Q = 0 \end{aligned}$$

$$(1.4) \quad V = F(AV, P^{\circ}, 0), \quad A = \Phi(AV, P^{\circ}, 0)$$

Постоянные V и A находятся из решения алгебраических уравнений (1.4).

Учитывая, что начальные распределения плавно меняются, перейдем к новым независимым величинам

$$\tau = \varepsilon t, \quad \mathbf{r} = \varepsilon \mathbf{R}, \quad \mathbf{r} = (x, y, z)$$

Тогда задача (1.2) принимает вид

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \partial \Theta / \partial r &= \varepsilon \Delta \Theta, \quad \Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2 \\ \Theta(\mathbf{r}, 0) &= A^{\circ}(\mathbf{r}) \exp(-\varepsilon^{-1} f^{\circ}(\mathbf{r})), \quad f^{\circ}(s, \mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r}_2 = (y, z) \\ \Theta(S(\mathbf{r}_2 r), \mathbf{r}_2, \tau) &= \Phi(\varphi, \mathbf{r}_2, \tau), \quad \varphi = \varepsilon \left| \frac{\partial \Theta}{\partial n} (s(\mathbf{r}_2, \tau), \mathbf{r}_2, \tau) \right| \\ \Theta(\infty, \mathbf{r}_2, \tau) &= 0 \\ \varepsilon (\partial s / \partial r) [1 + \varepsilon^2 |\nabla_2 s|^2]^{-1/2} &= F(\varphi, \mathbf{r}_2, \tau) \\ s(\mathbf{r}_2, \tau, \varepsilon) &= S(\mathbf{R}_2, t), \quad \nabla = \partial / \partial \mathbf{r}, \quad \nabla_2 = \partial^2 / \partial \mathbf{r}_2^2 \end{aligned}$$

Отметим, что стационарное решение (1.3), (1.4) получается отсюда, если положить $A^\circ(\mathbf{r}) = A = \text{const}$, $f^n(\mathbf{r}) = Vx$ и $A = O(1)$, $V = O(1)$.

В работе [7] построено методом регулярных возмущений решение одномерной задачи в предположении, что начальное распределение соответствует стационарному распределению. Однако полученное решение не равномерно по пространственной переменной.

2. Метод решения. Будем искать решение задачи (1.5) методом многих масштабов [8, 9]. Этот метод в данном случае близок к лучевому методу геометрической оптики [9—12], который используется обычно для решения линейных задач. В работе [13] этот метод применен к решению нелинейного параболического уравнения.

Следуя [9], введем быструю переменную

$$(2.1) \quad \eta = \xi(\mathbf{r}, t, \varepsilon) \varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1} [\xi_0(\mathbf{r}, \tau) + \varepsilon \xi_1(\mathbf{r}, \tau) + \varepsilon^2 \xi_2(\mathbf{r}, \tau) + \dots] \\ |\xi_i / \xi_{i-1}| = O(1)$$

Здесь $\xi_i(\mathbf{r}, \tau)$ — неизвестные функции, которые определяются в процессе решения задачи. Будем искать решение задачи (1.5) в виде равномерно-пригодного разложения

$$(2.2) \quad \Theta = \Theta_0(\eta, \tau, \mathbf{r}) + \varepsilon \Theta_1(\eta, \mathbf{r}, \tau) + \varepsilon^2 \Theta_2(\eta, \mathbf{r}, \tau) + \dots, \\ |\Theta_i / \Theta_{i-1}| = O(1)$$

$$(2.3) \quad s(\mathbf{r}_2, \tau) = \varepsilon^{-1} [s_0(\mathbf{r}_2, \tau) + \varepsilon s_1(\mathbf{r}_2, \tau) + \dots]$$

с учетом (2.1) имеем при переходе от (τ, \mathbf{r}) к (τ, \mathbf{r}, η) :

$$(2.4) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \Delta = \varepsilon^{-2} |\nabla \xi|^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \varepsilon^{-1} \left(\Delta \xi \frac{\partial}{\partial \eta} + 2(\nabla \xi \nabla) \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \Delta$$

Подставляя разложение (2.2) в первое соотношение (1.5), с учетом (2.4) имеем

$$(2.5) \quad |\nabla \xi_0|^2 \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \xi_0}{\partial \tau} \frac{\partial \Theta_0}{\partial \eta} = 0$$

Решая (2.5), получим

$$(2.6) \quad \Theta_0(\eta, \mathbf{r}, \tau) = a(\mathbf{r}, \tau) \exp(g \cdot \eta) + b(\mathbf{r}, \tau), \quad g(\mathbf{r}, \tau) = \\ = (\partial \xi_0 / \partial \tau) |\nabla \xi_0|^{-2}$$

Функции $a(\mathbf{r}, \tau)$ и $b(\mathbf{r}, \tau)$ определяются из уравнений для следующих членов разложений (2.2). Отметим, что без ограничений общности можно положить $\xi_1(\mathbf{r}, \tau) = 0$, это следует из вида (2.6). Проводя разложение по ε , далее имеем

$$(2.7) \quad |\nabla \xi_0|^2 \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \xi_0}{\partial \tau} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \Theta_0}{\partial \tau} - \left(\Delta \xi_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial \eta} + 2 \nabla \xi_0 \nabla \frac{\partial \Theta_0}{\partial \eta} \right)$$

$$(2.8) \quad |\nabla \xi_0|^2 \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \xi_0}{\partial \tau} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \eta} = \frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} - \left(\Delta \xi_0 \frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} + 2 \nabla \xi_0 \nabla \frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} \right) - \\ - 2(\nabla \xi_0 \cdot \nabla \xi_2) \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \eta^2} - \Delta \Theta_0$$

Для построения равномерно-пригодного разложения (2.2) необходимо, как видно из (2.6), чтобы в решении $\Theta_j(\eta, \mathbf{r}, \tau)$ ($j = 1, 2$) отсутство-

вали члены вида η и $\eta^i e^{g\eta}$ ($i \geq 1$). Для устранения в решении (2.7) подобных членов необходимо выполнение следующих равенств:

$$(2.9) \quad \partial b / \partial \tau = 0, \quad b(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad b(\mathbf{r}, \tau) = 0$$

$$(2.10) \quad \partial g / \partial \tau - 2g(\nabla \xi_0 \cdot \nabla) g = 0$$

$$(2.11) \quad \partial a / \partial \tau - 2\nabla \xi_0 \cdot \nabla(ag) - ag\Delta \xi_0 = 0$$

Аналогично рассматривая правую часть (2.8), видим, что член $\Delta \Theta_0$ дает слагаемые вида $|\nabla g|^2 \eta^2 \exp(g\eta)$. Поэтому необходимо положить $|\nabla g|^2 = 0$. Отсюда с учетом (2.10) $g = \text{const}$. Без ограничения общности выбираем $\text{const} = -1$, тогда для $\xi_0(\mathbf{r}, \tau)$ получим уравнение Гамильтона — Якоби

$$(2.12) \quad \partial \xi_0 / \partial \tau + |\nabla \xi_0|^2 = 0$$

а для $a(\mathbf{r}, \tau)$ из (2.11) следует

$$(2.13) \quad \partial a / \partial \tau + 2(\nabla \xi_0 \cdot \nabla) a + a\Delta \xi_0 = 0$$

Уравнения (2.12), (2.13) могут быть решены методом характеристик [14]. Введем для этого функции $\mathbf{p} = \nabla \xi_0$, $q = \partial \xi_0 / \partial \tau$. Тогда (2.12) принимает вид $q = -|\mathbf{p}|^2$.

Характеристические уравнения (ζ — параметр, описывающий движение вдоль характеристики):

$$(2.14) \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = 2\mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\zeta} = 0, \quad \frac{d\tau}{d\zeta} = 1, \quad \frac{dq}{d\zeta} = 0$$

$$d\xi_0/d\zeta = q + 2|\mathbf{p}|^2 = |\mathbf{p}|^2$$

С учетом (2.14) имеем

$$d/d\zeta = \partial/\partial \tau + 2\mathbf{p} \cdot \nabla$$

и уравнение (2.13) принимает вид

$$(2.15) \quad da/d\zeta + a\nabla \cdot \mathbf{p} = 0$$

Интегрируя (2.14) и (2.15), получаем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + 2\mathbf{p}_0\zeta, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0, \quad q = q_0$$

$$\tau - \tau_0 = \zeta; \quad \xi_0 - \xi_0^0 = |\mathbf{p}_0|^2 \zeta$$

$$a = a_0 \exp\left(-\int_0^\zeta \nabla \cdot \mathbf{p} d\zeta'\right)$$

где $\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, q_0, \tau_0, \xi_0^0, a_0$ — значения соответствующих величин при $\zeta = 0$.

Для $\xi_0(\mathbf{r}, \tau)$ и $a(\mathbf{r}, \tau)$ ставится задача с краевыми условиями, а именно

$$(2.16) \quad \xi_0(x = s_0(\mathbf{r}_2, \tau)) = 0, \quad a(x = s_0(\mathbf{r}_2, \tau), \mathbf{r}_2, \tau) = \Phi$$

$$\xi_0(\mathbf{r}, 0) = f^0(\mathbf{r}), \quad a(\mathbf{r}, 0) = A^0(\mathbf{r})$$

Решение уравнения (2.12) может быть, вообще говоря, разрывно. Это видно хотя бы из того, что если ввести $u(\mathbf{r}, \tau) = \nabla \xi_0$ и взять градиент от (2.12), то

$$\partial u / \partial \tau + 2u \cdot \nabla u = 0$$

Это известное в газодинамике уравнение [15], приводящее к разрывным решениям.

При согласовании начальных и граничных условий (2.19), т. е. при

$$f^\circ(s_0(r_2, 0), r_2, 0) = 0, A^\circ(s_0(r_2, 0), 0) = \Phi$$

решение (2.12), (2.13) может иметь разрывы производных.

Возникновение разрывов указывает на то, что в асимптотическом решении (2.2) существуют узкие зоны в пространстве (r, τ) , в которых данный подход не применим. Такие разрывы подобны ударным волнам в газодинамике [15]. Для исследования их структуры необходимо исходить из полных уравнений (1.5) и строить соответственно новые разложения.

Уравнение, описывающее эволюцию поверхности горения

$$(2.17) \quad \partial s_0 / \partial r [1 + |\nabla_2 s_0|^2]^{-1/2} = F(\varphi_0, \tau, r_2) s_0(r_2, 0) = s_0^\circ(r_2)$$

будет исследовано ниже. Отметим, что величина φ_0 равна величине

$$\varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial x} (a(r, \tau) \exp(-\eta)) \right|_{x=s^\circ(r_2, \tau)} = \left| \frac{\partial \xi_0}{\partial x} a \right|_{x=s^\circ(r_2, \tau)} + o(1)$$

деленной на косинус угла между нормалью и осью x .

Чтобы найти решение уравнения (2.12) в окрестности $s^\circ(r_2, \tau)$, разложим $\xi_0(r, \tau)$ в ряд по $(x - s^\circ(r_2, \tau))$:

$$(2.18) \quad \xi_0(r, \tau) = \alpha(r_2, \tau) (x - s^\circ) + o((x - s^\circ))$$

Подставляя (2.18) в (2.12), при $x \rightarrow s^\circ$ имеем

$$(2.19) \quad \alpha(r_2, \tau) = \frac{\partial s_0}{\partial \tau} [1 + |\nabla_2 s_0|^2]^{-1}$$

Вычисляя проекцию на нормаль к поверхности, получим

$$(2.20) \quad \varphi_0(r_2, \tau) = a(s^\circ, r_2, \tau) \frac{\partial s_0}{\partial \tau} [1 + |\nabla_2 s_0|^2]^{-1/2}$$

Отметим, что градиент температуры в каждой точке поверхности связан тем же соотношением, что в стационарном решении (1.3). Действительно

$$(2.21) \quad \varphi_0(r, \tau) = a(s^\circ, r_2, \tau) V_n^\circ(s_0, r_2, \tau)$$

Таким образом, разрешая алгебраические уравнения, входящие в (1.5), относительно a и $V_n^\circ = (\partial s_0 / \partial \tau) [1 + |\nabla_2 s_0|^2]^{-1/2}$, получаем два уравнения для определения формы поверхности и ее температуры. Отсутствие действительных корней этих уравнений указывает на отсутствие горения — погасания.

Таким образом, для определения $a(r_2, \tau)$ и $s_0(r_2, \tau)$ имеем

$$(2.22) \quad \frac{\partial s_0}{\partial \tau} [1 + |\nabla_2 s_0|^2]^{-1/2} = \beta(r_2, \tau) > 0, \quad s_0(r_2, 0) = s_0^\circ(r_2)$$

$$(2.23) \quad a(r_2, \tau) = \gamma(s_0(r_2, \tau), r_2, \tau) > 0$$

где β и γ — известные функции своих аргументов.

Задача Коши (2.22) может быть решена методом характеристик

$$(2.24) \quad \begin{aligned} d r_2 / d \tau &= -\beta(r_2, \tau) \cdot p_2 (1 + |p_2|^2)^{-1/2} \\ \frac{d s_0}{d \tau} &= \beta(r_2, \tau) (1 + |p_2|^2)^{-1/2}, \quad \frac{d p_2}{d \tau} = \nabla_2 \beta, \quad p_2 = \nabla s_0(r_2, \tau) \end{aligned}$$

В случае, если $\beta(r_2, \tau) = \beta(\tau)$, из характеристических уравнений (2.24) имеем (η — параметр)

$$(2.25) \quad r_2 - \eta = G(\eta) T, \quad s_0 - s_0^\circ(\eta) = B(\eta) T$$

$$T = \int_0^\tau \beta(s) ds, \quad G(\eta) = -\nabla_2 s_0^\circ [(1 + |\nabla_2 s_0^\circ|^2)^{-1/2}]_{r_2=\eta}$$

$$B(\eta) = (1 + |\nabla s_0^\circ|^2)^{-1/2}|_{r_2=\eta}$$

3. Плоская поверхность горения. Рассмотрим частный случай $s_0(r_2, 0) = 0$; $a(r) = a(x)$ и $f^\circ(r) = f^\circ(x)$, $\Phi(\varphi, \tau, r_2) = \Phi(\varphi, \tau)$, $F = F(\varphi, \tau)$. Вследствие произвольности граничных и начальных условий решение (2.12) и (2.13) и уравнения поверхности

$$(3.1) \quad ds_0/d\tau = F(\varphi, \tau), \quad s_0(0) = 0$$

не зависят от координат y и z .

Существуют два семейства характеристик, одно начинается на оси $\tau = 0$ ($0 \leq x \leq \infty$), другое — на $x = s_0(\tau)$. Для первого семейства $\tau_0 = 0$, $\xi = \tau$ имеем из (2.5)

$$(3.2) \quad x - x_0 = 2 \frac{df^\circ}{dx}(x_0) \tau, \quad \xi_0 - f^\circ(x_0) = \left(\frac{df^\circ}{dx}(x_0)\right)^2 \tau$$

$$a(x, \tau) = A^\circ(x_0) \exp \left[- \int_0^\tau \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0(\tau')) \right] \times \\ \times \left[1 + 2 \frac{d^2 f_0}{dx^2}(x_0(\tau')) \tau' \right]^{-1} d\tau'$$

Другое семейство имеет вид (γ — параметр)

$$(3.3) \quad x = s_0(\gamma) + 2 \frac{ds_0}{d\tau}(\gamma) (\tau - \gamma)$$

$$\xi_0(x, \tau) = \left[\frac{ds_0}{d\tau}(\gamma) \right]^2 (\tau - \gamma)$$

Поверхности $x = s_0(\tau)$ соответствует значение параметра $\gamma = \tau$. В случае, если начальное распределение было стационарно, из (3.2) имеем при $A^\circ = 1$, $f^\circ(x) = x$:

$$x_0 = x - 2\tau, \quad \xi_0(x, \tau) = x - \tau$$

$$a(x, \tau) = 1 \text{ при } x \geq 2\tau$$

4. Двумерная поверхность горения. Рассмотрим в рамках модели [1, 2] горение пороха. Пусть в начальный момент времени поверхность горения имела форму $x = s_0^\circ(y, 0) = \omega(y)$. Пусть также отсутствует эрозивный поток. Тогда уравнение, описывающее эволюцию поверхности, имеет вид

$$(4.1) \quad \frac{\partial s_0}{\partial \tau} = V(\tau) \sqrt{1 + (\partial s_0 / \partial y)^2}, \quad s_0(y, 0) = \omega(y)$$

где $V(\tau)$ — локальная нормальная скорость движения поверхности. Удобно ввести новую времениподобную переменную

$$T = \int_0^\tau V(\tau') d\tau'$$

Тогда из (4.1) имеем

$$(4.2) \quad \partial s_0 / \partial T = \sqrt{1 + (\partial s_0 / \partial y)^2}, \quad s_0(y, T=0) = \omega(y)$$

Из (2.25) имеем для уравнения (4.2) (η — параметр)

$$(4.3) \quad y - \eta = - \frac{d\omega}{d\eta} \left[1 + \left(\frac{d\omega}{d\eta} \right)^2 \right]^{-1/2} T$$

$$s_0 - \omega(\eta) = \left[1 + \left(\frac{d\omega}{d\eta} \right)^2 \right]^{-1/2} T$$

Рассмотрим случай, когда $\omega(y)$ — периодическая функция. Тогда $d\omega/d\eta = 0$ при $\eta = \eta_n$, где η_n — корень уравнения $d\omega/d\eta(\eta = \eta_n) = 0$. Имеем

$$s_0 = T + \omega(\eta_n), \quad y = \eta_n$$

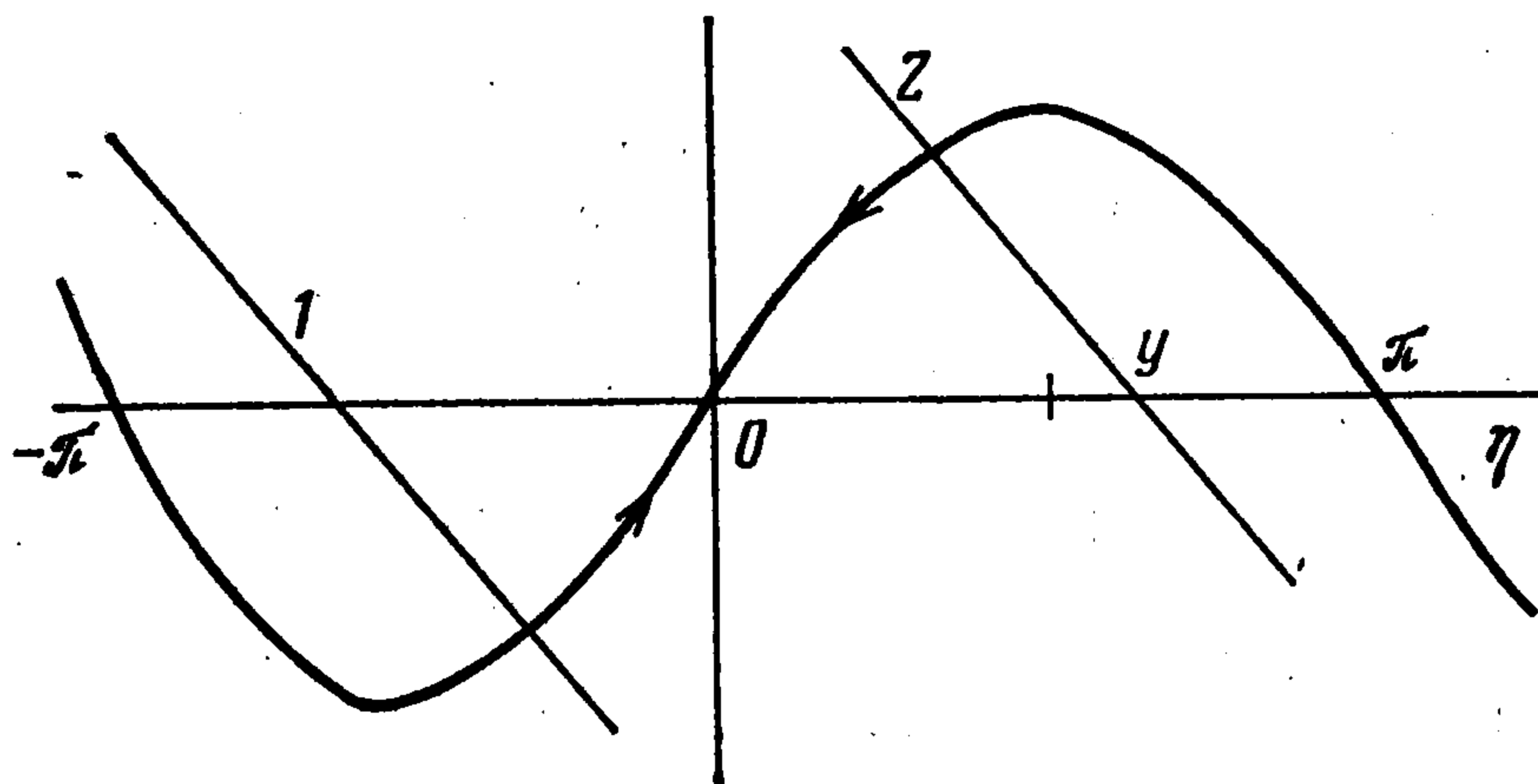
Положим для конкретности, что

$$\omega(y) = \delta \cos y, \quad \delta > 0, \quad \eta_n = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда $\eta_n = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Из первого уравнения имеем

$$(4.4) \quad (y - \eta)/T = \delta \sin \eta [1 + \delta \sin^2 \eta]^{-1/2} = G(\eta)$$

Вследствие периодичности $\omega(y)$ достаточно рассмотреть случай $-\pi \leq y \leq \pi$. Решим уравнение (4.4) графически. На фиг. 1 представлен график правой части (4.4). При $-\pi < y < 0$ проведем прямую 1 ($y - \eta) T^{-1}$,



Фиг. 1

при росте T точка пересечения прямой 1 и $G(\eta)$ стремится к точке $\eta = 0$, и при $T \rightarrow \infty$ из (4.4) и второго уравнения (4.3) имеем

$$(4.5) \quad \eta = \frac{y}{T} + o(T^{-1}), \quad -\pi < y < 0$$

$$s_0 = T + \delta + \frac{y^2}{2T} + o(T^{-1}) \quad \text{при } T \rightarrow \infty$$

В точках $\eta = -\pi$ и $\eta = 0$ и $\eta = \pi$ из первого уравнения (4.4) имеем

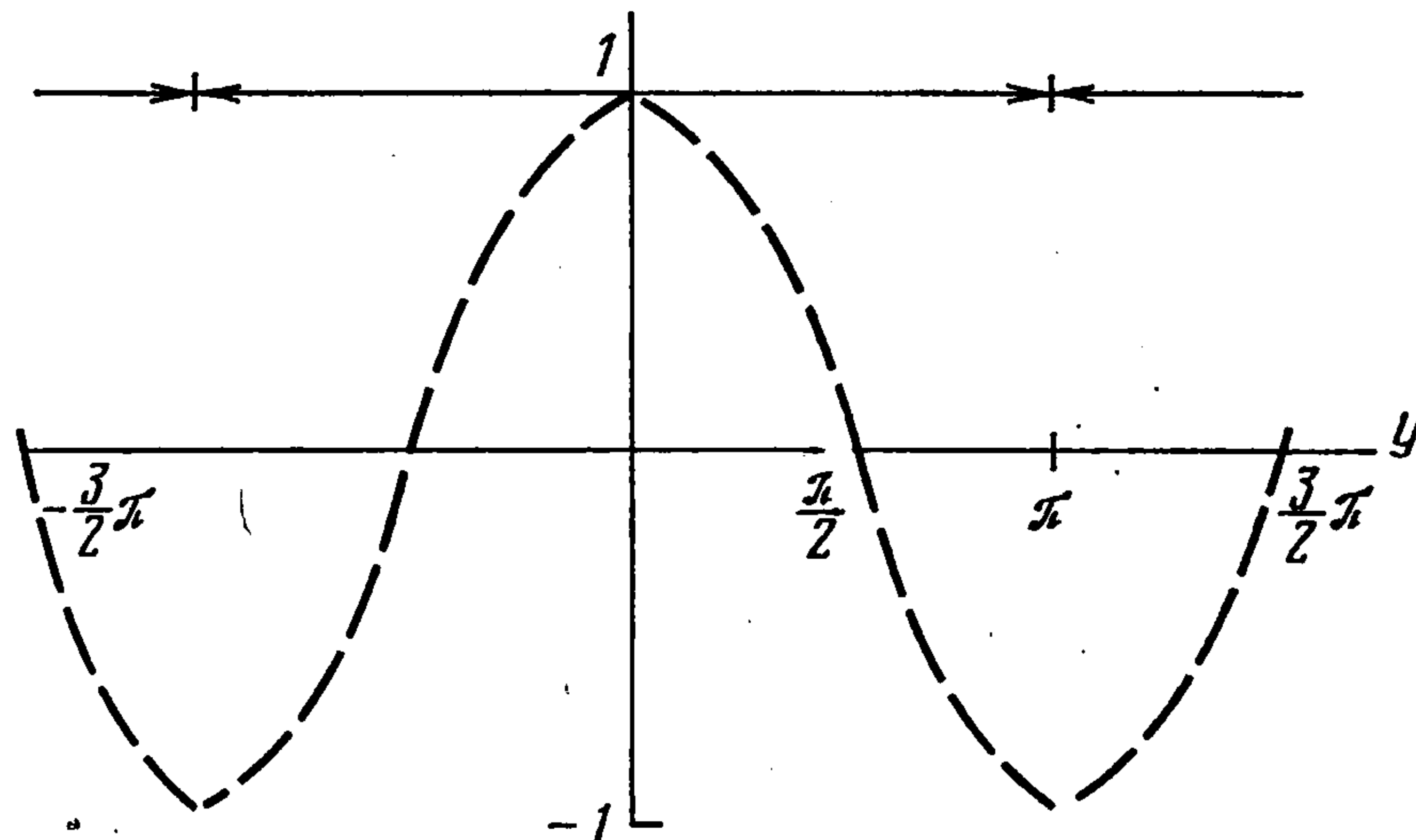
$$(4.6) \quad s_0 = \begin{cases} -\delta + T, & y = -\pi \\ +\delta + T, & y = 0 \\ -\delta + T, & y = \pi \end{cases}$$

При $0 < y < \pi$ точка пересечения $G(\eta)$ и прямой при $T \rightarrow \infty$ также стремится к $\eta = 0$. Таким образом

$$(4.7) \quad \eta = y/(\delta T) + o(T^{-1}), \quad 0 < y < \pi$$

$$s_0 = \delta + T + \frac{y^2}{2T} + o(T^{-1})$$

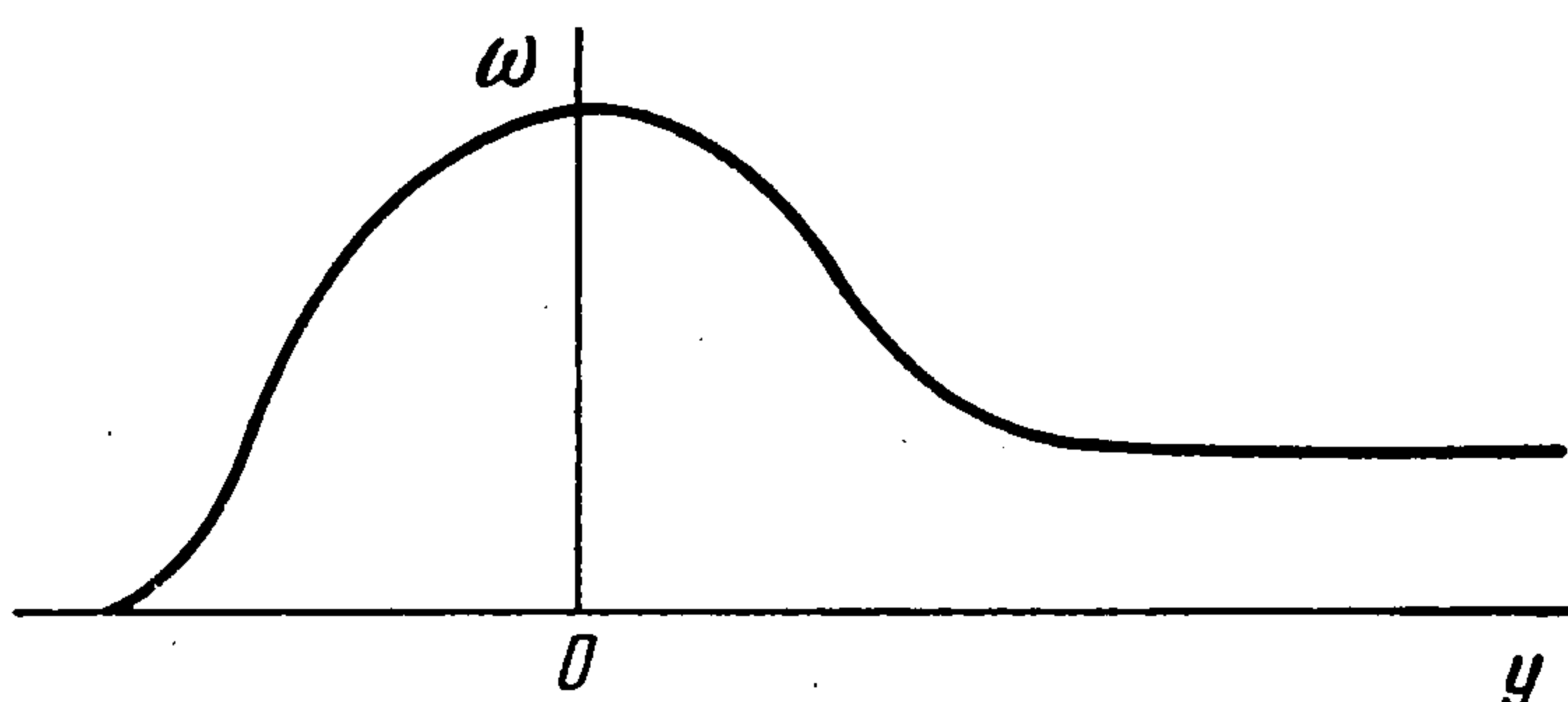
Подобное построение можно провести и для других значений y . В соответствии с (4.5) — (4.7) при $T \rightarrow \infty$ форма поверхности приобретает вид, представленный на фиг. 2 ($s_0 = T$). Таким образом, в масштабе ε^{-1}



Фиг. 2

поверхность горения стремится к плоскости, за исключением счетного числа точек, таких, как в случае $\cos(y) = -1$; $y = (2k + 1)\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2$.

Вообще говоря, при «укручении» профиля поверхности в окрестности точек с большой кривизной предлагаемый асимптотический метод становится несправедливым и решение, построенное в данной работе, следует рассматривать в виде внешнего



Фиг. 3

[8, 9] решения, а структура «выступов» на поверхности горения у точек должна быть рассмотрена переходом к пространственным переменным R .

Отметим, что построения поверхности горения можно провести с помощью метода, аналогичного принципу Гюйгенса [16], используемого в ряде работ для описания распространения газового пламени, например в [17, 18].

Рассмотрим теперь случай $d\omega/dy (\pm \infty) = 0$. Без ограничения общности можно положить $\omega(-\infty) = 0$. Введем в рассмотрение функцию $u(y, T)$:

$$s_0(y, T) = T - \int_{-\infty}^y u(\zeta, T) d\zeta$$

Вместо (4.2) имеем

$$(4.8) \quad \frac{\partial u}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1 + u^2} = 0, \quad u(y, 0) = -\frac{d\omega}{dy}$$

Пусть теперь $\omega(y)$ — монотонно убывающая достаточно гладкая функция, $\omega(+\infty) = \omega_+ < 0$ с производной, отличной от нуля на конечном интервале $(0, L)$. При $|d\omega/dy| < 1$ радикал в (4.8) можно разложить в ряд и в первом приближении рассматривать только два члена разложения. Тогда при $T \rightarrow \infty$ решение можно выпи-

сать в явном виде [19]:

$$s_0(y, T) = \begin{cases} T, & y < 0 \\ T - y^2/(2T), & 0 < y < \sqrt{\alpha T} \\ T + \omega_+, & \sqrt{\alpha T} < y \end{cases}$$

$$\alpha = -2\omega_+$$

Отметим, что разложение радикала допустимо при $\epsilon \ll |d\omega/dy|$, иначе эти члены должны появиться только в следующих порядках разложения $s(x, y, t; a)$. При помощи (4.9) получаем уравнение поверхности горения при $T \rightarrow \infty$ в виде $x - s_0(y, T) = 0$.

Если же функция $\omega(y)$ достаточно гладкая и имеет вид, представленный на фиг. 3 ($\omega(0) = \max \omega(y)$) и $d\omega/dy \neq 0$ на конечном отрезке, то в том же приближении, в котором получена формула (4.9), имеем при $T \rightarrow \infty$:

$$s_0(y, T) = \begin{cases} T, & y < -\sqrt{\beta T} \\ T - y^2/(2T) + \beta/2, & -\sqrt{\beta T} < y < \sqrt{\alpha T} \\ T - (\alpha - \beta)/2, & \sqrt{\alpha T} < y \end{cases}$$

$$\beta = 2\omega(0), \quad \alpha = 2(\omega(0) - \omega_+), \quad \omega_+ \geq 0$$

Автор благодарит Рязанцева Ю. С. за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожиллов В. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973. 176 с.
2. Зельдович Я. Б., Лейпунский О. И., Либрович В. Б. Теория нестационарного горения пороха. М.: Наука, 1975. 132 с.
3. Анисимов С. И., Имас Я. А., Романов Г. С., Ходько Ю. В. Действие излучения большой мощности на металлы. М.: Наука, 1970. 417 с.
4. Любов Б. Я. Теория кристаллизации в больших объемах. М.: Наука, 1975. 256 с.
5. Либрович В. Б., Новожиллов В. В. Автомодельные решения в теории нестационарной скорости горения пороха.— ПМТФ, 1971, № 4, с. 31.
6. Фрост В. А., Юмашев В. Л. Исследование погасания пороха в модели горения с переменной температурой поверхности.— ПМТФ, 1973, № 3, с. 92.
7. Krier H. Solid propellant burning rate during a pressure transient.— Comb. Sci. and Techn., 1972, v. 5, p. 69—73.
8. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
9. Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
10. Keller J. V., Lewis R. M., Seckler B. F. Asymptotic solution of some diffraction problems.— Commun Pure and Appl. Math., 1956, v. 9, No. 2, p. 212.
11. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
12. Cohen J. K., Lewis R. M. A Ray method for the asymptotic solution of the diffusion equation.— J. Inst. Math. Appl., 1967, v. 3, p. 266.
13. Берман В. С. Нестационарное распространение волны горения в среде с медленно меняющимися свойствами.— ПММ, 1978, т. 42, № 2, с. 450—457.
14. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964, 830 с.
15. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 427 с.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
17. Карловиц Б. Пламя в турбулентном потоке газа.— В сб.: Процессы горения. М.: Физматгиз, 1961, с. 288.
18. Зельдович Я. Б. Об одном эффекте, стабилизирующем искривленный фронт ламинарного пламени.— ПМТФ, 1966, № 1, с. 102.
19. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.