

УДК 533.6.013.42

## О СОПРОТИВЛЕНИИ ТРЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ АЭРОСТАТИЧЕСКОЙ ОПОРЫ С ЭЛАСТИЧНОЙ ДИАФРАГМОЙ

Дворянинов В. Г., Свешникова Е. И.,  
Сибгатуллин Н. Р.

Рассматривается движение эластичной гладкой диафрагмы аэростатической опоры по шероховатой опорной поверхности. На основе теоретического исследования влияния изгибной жесткости на размеры участка соприкосновения и результатов экспериментальных исследований получена полуэмпирическая зависимость коэффициента трения от шероховатости опорной поверхности, расхода воздуха, нагрузки, габаритов опоры и упругих свойств материала диафрагмы.

Аэростатическая опора (АСО), применяемая в транспортных устройствах [1—5], имеет в качестве основного элемента эластичную диафрагму, которая приспособляется к локальным неровностям опорной поверхности, сохраняя постоянную величину зазора между поверхностью и диафрагмой и тем самым препятствуя дополнительной утечке воздуха из зоны воздушной подушки. Однако из-за малой величины этого зазора (0,03—0,1 мм) диафрагма касается отдельных выступов микрорельефа опорной поверхности, в результате чего при перемещении ее возникает сухое трение. Участок, на котором происходит трение об опорную поверхность, имеет порядок толщины диафрагмы. Поэтому для расчета длины этого участка необходимо учитывать изгибную жесткость диафрагмы. Экспериментальные данные обнаруживают сложную зависимость коэффициента сопротивления от нагрузки, расхода воздуха и параметров АСО.

Отметим, что такого рода исследования необходимы не только для инженерных расчетов тяговых усилий, но и для исследования устойчивости устройств на воздушной подушке на шероховатых поверхностях.

1. Асимптотический анализ вязкого течения в слое с упругой границей с учетом изгибной жесткости. Рассмотрим уравнения Кармана больших прогибов круглых пластинок:

$$(1.1) \quad D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} \right] \right\} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r N_r \frac{dw}{dr} \right) = \Delta p$$

$$r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) \right] + \frac{E \delta}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 = 0, \quad D = \frac{E \delta^3}{12}$$

Здесь касательные силы считаются равными нулю,  $w$  и  $\delta$  — вертикальный прогиб и толщина диафрагмы соответственно,  $E$  — модуль Юнга,  $D$  — изгибная жесткость,  $\Delta p$  — разность давлений с разных сторон диафрагмы,  $N_r$  — радиальное натяжение,  $r$  — расстояние до оси симметрии  $z$  (фиг. 1),  $a, b$  — радиусы внутренней и внешней жесткой заделки диафрагмы соответственно.

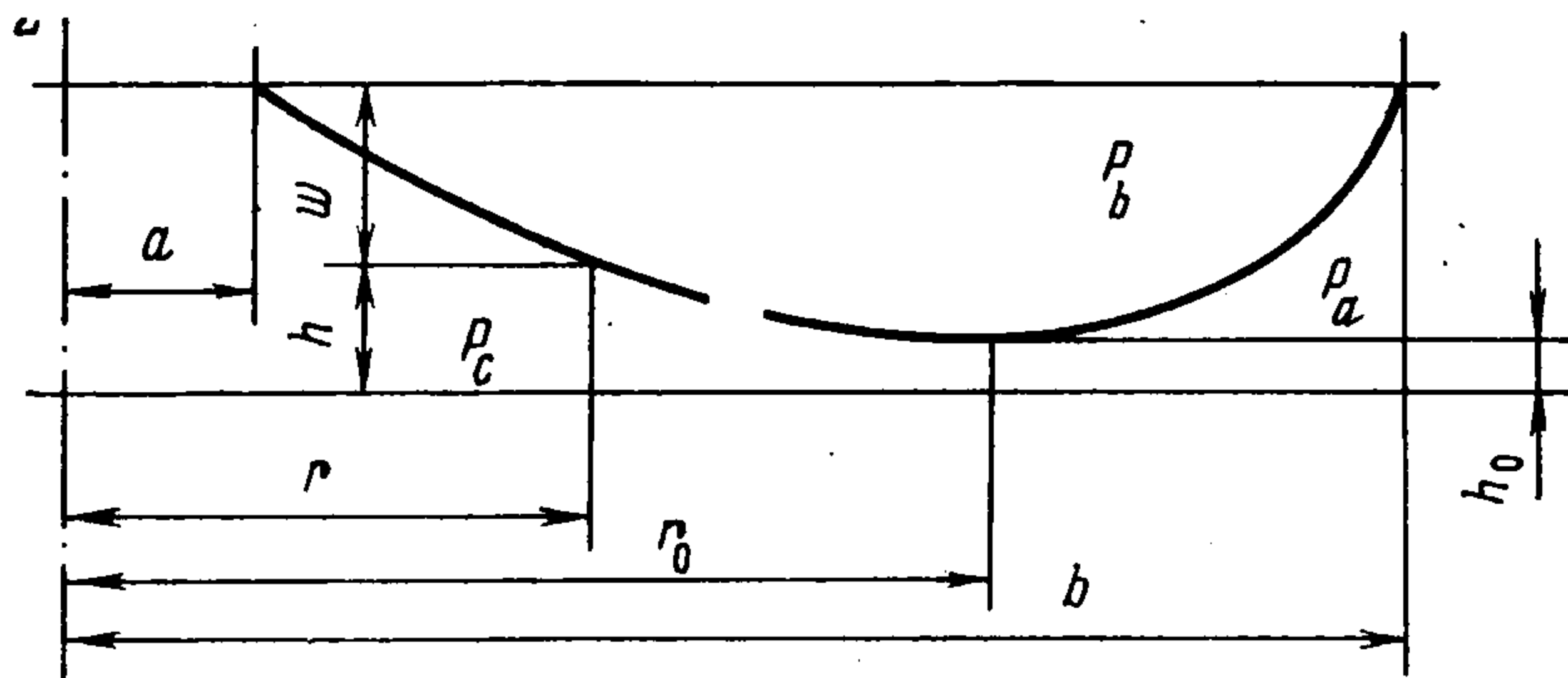
На фиг. 1 изображено сечение диафрагмы вертикальной плоскостью, проходящей через ось симметрии; здесь  $p_a$  — атмосферное давление,  $p_b$  — давление в баллоне,  $p_c$  — давление в воздушной подушке,  $r_0$  — расстояние минимального зазора до оси симметрии,  $h_0$  — величина минимального зазора,  $h(r)$  — высота диафрагмы над опорной поверхностью.

К этим уравнениям необходимо добавить уравнение Рейнольдса, описывающее течение вязкой жидкости в зоне минимального зазора:

$$(1.2) \quad \partial p / \partial r = 6\mu Q / (\pi r h^3)$$

Здесь  $p$  — давление,  $\mu$  — динамическая вязкость газа (для воздуха  $\mu = 1,8 \cdot 10^{-6}$  кг/м<sup>2</sup>с),  $Q$  — объемный расход воздуха,  $h$  — вертикальная высота точки на диафрагме над опорной поверхностью.

В смазочном слое вблизи максимального прогиба диафрагмы натяжение меняется незначительно, а протяженность вязкого слоя мала по сравнению с  $r_0$ , где  $r_0$  — радиус максимального прогиба диафрагмы. Поэтому



Фиг. 1

так же, как и в работе [4], заменим в уравнениях (1.1) и (1.2)  $N_r$  на  $N_0$  и  $r$  на  $r_0$ , где  $N_0$  — значение натяжения в этом месте. Учтем, что  $h + w = \text{const}$ , и исключим из уравнений (1.1) и (1.2) давление.

Переходя к безразмерным переменным  $x = (r - r_0) / \lambda$ ,  $y = h / h_0$ , где  $h_0$  — величина минимального зазора между диафрагмой и опорной поверхностью в точке максимального прогиба диафрагмы,  $\lambda^3 \equiv \pi r_0 N_0 h_0^4 / (6\mu Q)$ , получим уравнение для прогибов в виде

$$(1.3) \quad -\alpha^2 \frac{d^5 y}{dx^5} + \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{y^3}, \quad \alpha^2 \equiv \frac{E\delta^3}{12N_0\lambda^2}$$

Величина  $\lambda$  характеризует длину участка действия вязких сил, на котором происходит резкое падение давления [4, 5]. Кроме этой характерной длины имеется характерная длина действия изгибающих моментов  $l = \delta \sqrt{E\delta / N_0}$ . Коэффициент  $\alpha$  в уравнении (1.3) равен отношению этих длин  $\alpha = l / \lambda$ .

Переменная  $x$  играет роль внутренней переменной в вязком слое. При внутреннем разложении, в котором относительное изменение натяжения  $\Delta N_r / N_0$  и радиуса  $\Delta r_0 / r_0$  внутри вязкого слоя являются малыми параметрами, часть граничных условий выставляется асимптотически при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ . В качестве граничных условий примем, что при  $x \rightarrow -\infty$  давление асимптотически приближается к давлению в подушке  $p_c$ , а при  $x \rightarrow +\infty$  — к давлению в атмосфере  $p_a$  [4].

В уравнении (1.1)  $\Delta p = -(p_b - p)$ , где  $p_b$  есть давление в баллоне (над диафрагмой),  $p$  — текущее давление в воздушной подушке (под диафрагмой). На основании первого уравнения (1.1) имеем

$$(1.4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\alpha^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \theta_2, \quad \theta_2 \equiv \frac{p_b - p_c}{N_0 h_0} \lambda^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\alpha^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \theta_1, \quad \theta_1 \equiv \frac{p_b - p_a}{N_0 h_0} \lambda^2$$

При  $x = 0$  имеем следующие условия:

$$(1.5) \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Действие изгибающих моментов является экспоненциально малым при  $|r - r_0| \gg l$ . Поэтому, при  $x \rightarrow \pm\infty$  дополнительно примем условие исчезновения экспоненциально растущих решений:

$$(1.6) \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad d^4y/dx^4 \rightarrow 0$$

Уравнение (1.3) имеет пятый порядок, а количество условий (1.4), (1.5), (1.6) равно шести. Поэтому эти условия при произвольных значениях правых частей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в (1.4) несовместны, за исключением случая, когда  $\theta_1$  и  $\theta_2$  принимает вполне определенные значения, зависящие только от отношения  $(p_b - p_c)/(p_b - p_a) = q$  и коэффициента  $\alpha$ . Последнее дает возможность установить зависимость минимального зазора от параметров АСО.

Проинтегрируем уравнение (1.3). Тогда из условия (1.4) при  $x \rightarrow +\infty$  следует

$$(1.7) \quad -\alpha^2 y^{(4)} + y'' = \theta_1 - \int_x^{\infty} \frac{dt}{y^3}$$

Аналогично из условия (1.4) при  $x \rightarrow -\infty$  следует, что

$$(1.8) \quad -\alpha^2 y^{(4)} + y'' = \theta_2 + \int_{-\infty}^x \frac{dt}{y^3}$$

Для совместности уравнения (1.7) и (1.8) необходимо выполнение равенства

$$(1.9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{y^3} = \theta_1 - \theta_2$$

Это и есть недостающее условие для определения констант  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , так как их отношение, согласно (1.4), предполагается известным.

Отбрасывая экспоненциально растущие решения при  $x = \pm\infty$ , из (1.7) и (1.8) имеем

$$(1.10) \quad y'' = \frac{1}{2} \left\{ (\theta_1 + \theta_2) - \int_x^{\infty} \frac{dt}{y^3} (1 - e^{(x-t)/\alpha}) + \int_{-\infty}^x \frac{dt}{y^3} (1 - e^{(t-x)/\alpha}) \right\}$$

Дифференцируя (1.10), для  $y'''$  получим

$$(1.11) \quad y''' = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \int_x^{\infty} \frac{dt}{y^3(t)} e^{(x-t)/\alpha} + \int_{-\infty}^x \frac{dt}{y^3(t)} e^{(t-x)/\alpha} \right\}$$

Рассмотрим случаи  $\alpha \gg 1$  и  $\alpha \ll 1$  по отдельности.

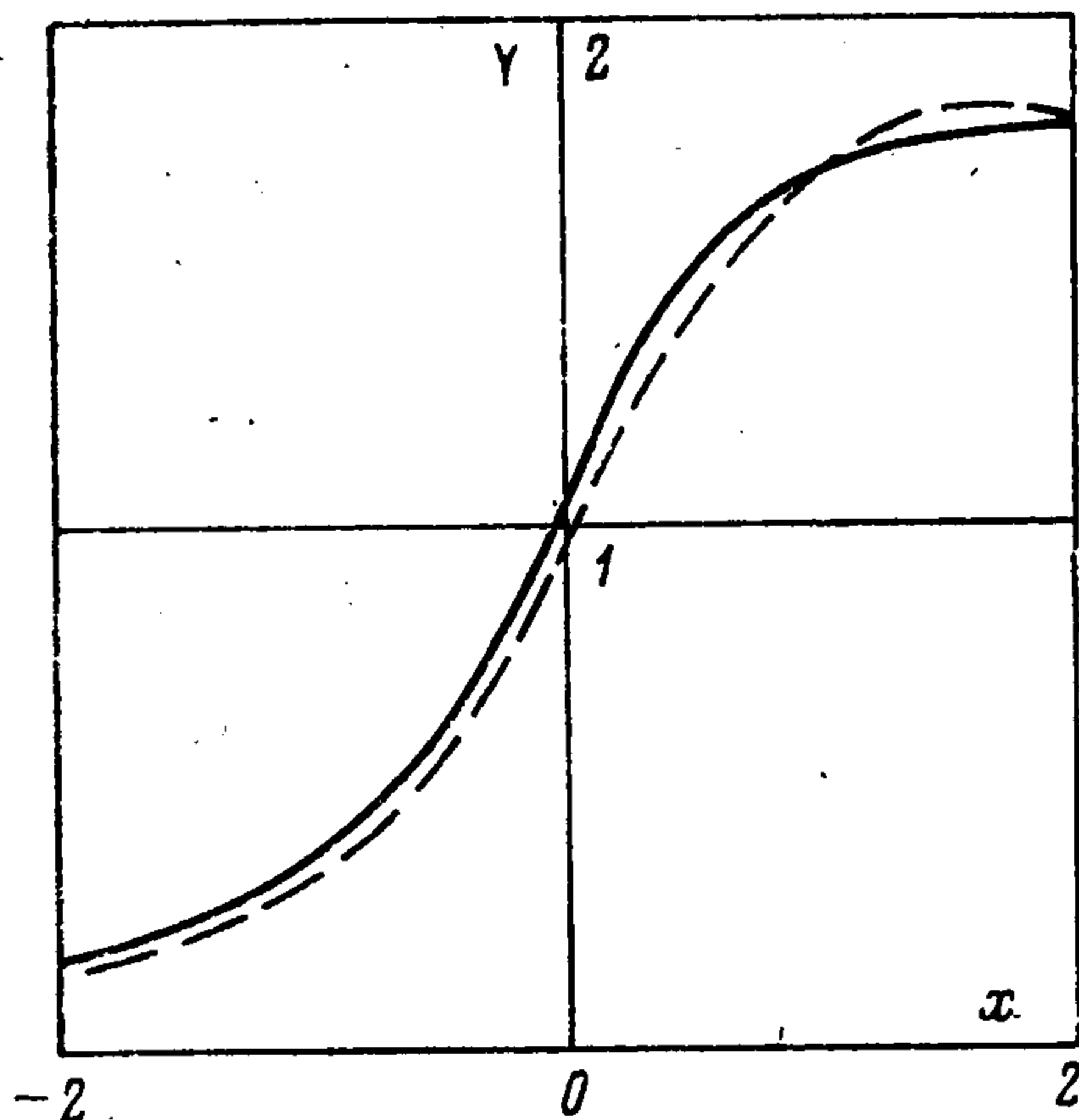
При  $\alpha \ll 1$  для вычисления интегралов в правой части (1.11) воспользуемся леммой Ватсона [6], согласно которой с точностью до экспоненциально малых слагаемых имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} e^{-t/\alpha} f(t) dt \approx \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \alpha^{n+1} (-1)^n$$

Здесь правая часть есть разложение Маклорена функции  $f(t)$  внутри ее радиуса сходимости. Поэтому из (1.11) с точностью до членов порядка  $O(\alpha^4)$  имеем

$$(1.12) \quad y''' = y^{-3} + \alpha^2 d^2 y^{-3} / dx^2$$

Полученная с учетом изгибной жесткости зависимость  $Y = (p_b - p) \lambda^2 / (N_0 h_0)$  приведена на фиг. 2 штриховой линией; сплошная кривая соответствует результатам расчета без учета изгибной жесткости. Учет



Фиг. 2

изгибных напряжений как малого параметра в гидроупругой задаче показывает, что на внешнем участке вязкого слоя теоретически рассчитанное давление становится меньше атмосферного.

Ранее этот факт, известный из эксперимента, объяснялся только влиянием сил инерции потока [1]. Характерная длина участка, на котором происходит трение, имеет порядок  $\lambda$ . На основе численных расчетов при  $l \ll \lambda$  можно считать, что характерная длина участка соприкосновения имеет величину  $l + \lambda$ ,

причем значение  $\theta_1$  для малых  $q$  изменяется в интервале 1,8 — 2.

Рассмотрим теперь случай  $\alpha \gg 1$ . В этом случае характерная длина  $\lambda$  падения давления много меньше длины  $l$ . В первом приближении можно принять давление кусочно-постоянным. Тогда из (1.7) и (1.8) следует

$$(1.13) \quad -\alpha^2 y^{(4)} + y'' = \begin{cases} \theta_1 & \text{при } x > 0 \\ \theta_2 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Из условия непрерывности  $y''$  и  $y'''$  при  $x = 0$  получим

$$(1.14) \quad \begin{aligned} x > 0, \quad y'' &= \theta_1 - (\theta_1 - \theta_2) e^{-x/\alpha/2} \\ x < 0, \quad y'' &= \theta_2 + (\theta_1 - \theta_2) e^{x/\alpha/2} \end{aligned}$$

Из (1.14) и условий при  $x = 0$  (1.6) следует, что

$$(1.15) \quad x > 0, \quad y = 1 + \frac{1}{2} \theta_1 x^2 - \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2) (\alpha x - \alpha^2 + \alpha^2 e^{-x/\alpha})$$

$$(1.16) \quad x < 0, \quad y = 1 + \frac{1}{2} \theta_2 x^2 + \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2) (-\alpha x - \alpha^2 + \alpha^2 e^{x/\alpha})$$

Осталось определить  $\theta_1, \theta_2$  с помощью равенства (1.9). Входящий в (1.9) интеграл вычислим асимптотически, разделив область интегрирования  $(-\infty, +\infty)$  на три:  $(-\infty, -\alpha)$ ,  $(-\alpha, \alpha)$  и  $(\alpha, \infty)$ . Основываясь на экспериментальных данных, предположим, что  $q \equiv \theta_2/\theta_1 \ll 1$ .

При интегрировании от  $-\infty$  до  $\alpha$  в интеграле (1.16) отбросим экспоненту и положим  $\theta_2 = 0$ . В области  $(-\alpha, \alpha)$  разложим экспоненты в выражениях (1.15), (1.16) и учтем в этих разложениях первые три члена. Интеграл от  $\alpha$  до  $\infty$  имеет порядок  $\alpha^{-5}$  и его вкладом пренебрежем. Окончательно для определения  $\theta_1$  получим уравнение

$$\frac{3}{4} \pi \theta_1^{-1/2} (1 - q/2) + (\theta_1 \alpha)^{-1} = \theta_1 (1 - q)$$

Отсюда с точностью до членов порядка  $q^2$  и  $1/\alpha^2$  следует

$$(4.17) \quad \theta_1 = \theta_1(\alpha, q) = \left( \frac{3}{4} \pi + \frac{2}{\alpha \sqrt{3\pi}} + \frac{3}{4} \pi q \right)^{2/3}$$

Вычисления по формуле (4.17) незначительно расходятся с численными решениями уравнения (1.9) при подстановке в него выражений (1.15), (4.16) для  $y$ .

Используя выражение (1.4) для  $\theta_1$ , для минимального зазора  $h_0$  получим

$$(4.18) \quad h_0 = \left( \frac{6\mu Q}{\pi r_0 N_0} \right)^{2/3} \left( \frac{\theta_1 N_0}{p_b - p_a} \right)^{3/2}$$

Таким образом учет изгибной жесткости слабо влияет на величину минимального зазора. Однако характерная длина участка, на котором происходит сухое трение диафрагмы об опорную поверхность, определяется квадратным корнем из отношения изгибной жесткости к натяжению в точке минимального зазора при условии  $l \geq \lambda$ .

2. Определение зависимости коэффициента трения от параметров АСО при ее движении. Обозначим через  $\chi$  коэффициент трения на единицу площади соприкасающихся поверхностей. Этот коэффициент зависит только от отношения местного зазора  $h$  к характерной величине зубца шероховатой поверхности пола. Тогда величина силы сопротивления на единицу площади равна  $(p_b - p)\chi$ . Интегрируя это выражение по всей поверхности соприкосновения пола и диафрагмы, получим при учете, что  $l \ll r_0$ , следующее выражение для тягового усилия:

$$2\pi r_0 \int_{r_0-l/2}^{r_0+l/2} (p_b - p) \chi dr$$

Коэффициент трения  $k$  для опоры в целом равен отношению тягового усилия к весу аэростатической опоры  $G$  (включая вес нагрузки):

$$(2.1) \quad k = 2\pi r_0 G^{-1} \int (p_b - p) \chi dr \sim 2\pi r_0 G^{-1} (p_b - p_a) \chi l = 2l\chi_0/r_0$$

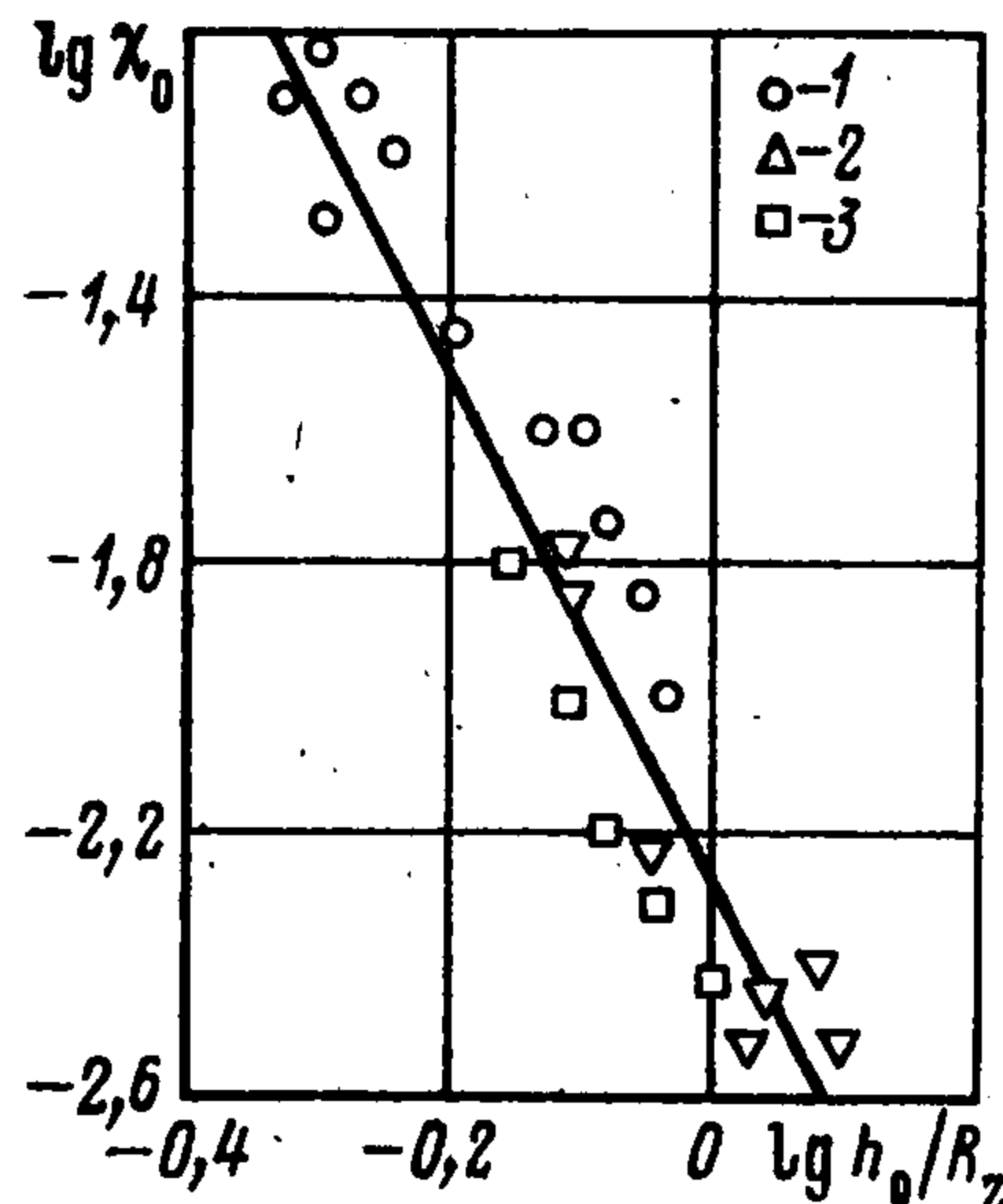
Здесь  $\chi_0$  — значение  $\chi$  при  $h = h_0$  ( $h_0$  — величина минимального зазора).

Для определения коэффициента трения из (2.1) необходимо определить зависимость  $\chi_0$  от шероховатости опорной поверхности. Теоретическое определение этой зависимости затруднительно, поэтому последняя выявлялась по результатам экспериментальных исследований. Исследования проводились с устройствами, включающими в себя систему из трех и четырех аэростатических опор. Размеры опор  $b$  менялись от 0,18 до 0,4 м, где  $b$  — радиус внешней заделки диафрагмы. Суммарная нагрузка на устройство составляла от 0,7 до 30 т, объемный расход воздуха менялся в пределах 0,3—6 м<sup>3</sup>/мин. Шероховатость опорной поверхности замерялась с помощью специального устройства и менялась в пределах  $R_z = 0,02$ —0,08 мм.

По результатам эксперимента построена зависимость  $\chi_0$  от  $h_0/R_z$  (фиг. 3). Точками отмечены экспериментальные значения  $\chi_0$ , полученные при исследовании АСО различных размеров (точки 1—3 соответствуют значениям  $b = 0,182$ , 0,308 и 0,46 м).

Заметим, что экспериментальные точки группируются около прямой, уравнение которой

$$(2.2) \quad \lg \chi_0 = a - \kappa \lg (h_0/R_z); \quad a = -2, \quad \kappa = 3,5$$



Фиг. 3

Здесь  $R_z$  — шероховатость пола.

Согласно экспериментальным данным, величина  $\chi_0$ , определяемая по формуле (2.1), зависит только от отношения  $h_0/R_z$  и не зависит от внешней нагрузки, расхода воздуха, радиуса внешней заделки, толщины и материала диафрагмы.

Используя выражение (2.1) для коэффициента трения, эмпирическую зависимость (2.2), ранее приведенную зависимость  $l = \delta \sqrt{E\delta/N_0}$  и выражение из работы [1]  $N_0 = n^3 \sqrt{G^2 E \delta / b^2}$ , где  $0,11 < n < 0,15$ , получим формулу для определения коэффициента трения

$$k = s \frac{\delta}{r_0} \left( \frac{E\delta b}{G} \right)^{1/2} \left( \frac{R_z}{h_0} \right)^x$$

Для определения отношения  $h_0/R_z$  используем формулу (1.18), которую запишем в виде

$$\frac{h_0}{R_z} = t \frac{r_0}{R_z} \left( \frac{\mu E \delta Q}{G^2} \right)^{2/3} \left( \frac{G}{E \delta b} \right)^{1/3}$$

Значения коэффициентов  $s$  и  $t$  находятся в пределах  $0,11 < s < 0,13$ ,  $2,7 < t < 3$ . Для определения  $r_0$  следует использовать результаты работы [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Levy S. B., Coogan C. H. Flexible membrane hydrostatic air bearing.— Trans. ASME. Ser. F. J. Lubricat. Technol., 1968, v. 90, No. 1, p. 184.
2. Croix Marie F. De la theorie à la pratique des coussins d'air pour le transports en usine de charges lourdes.— Entropie, 1972, t. 47, p. 13.
3. Дворянинов В. Г., Сибгатуллин Н. Р. Теоретическое и экспериментальное исследование больших прогибов кольцевых эластичных мембран.— Проблемы прочности, 1977, № 3, с. 63.
4. Дворянинов В. Г., Сибгатуллин Н. Р., Слезкин Н. А. О движении вязкого газа в слое с гибкой границей.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 298.
5. Дворянинов В. Г. Исследование аэростатической опоры с эластичной диафрагмой при установившемся режиме работы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 3, с. 155.
6. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Т. 3, М.: Мир, 1970. 343 с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.VII.1980