Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 6, 1981

УДК 533.6.011

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗОВОЙ СМЕСИ В КАНАЛЕ ПРИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

Жданов В. М., Зазноба В. А.

Рассматривается решение задачи о течении газовой смеси в плоском канале при промежуточных числах Кнудсена на основе 20-моментного приближения к функции распределения. Используемый метод основывается на усреднении моментных уравнений, справедливых во всей области течения (включая кнудсеновские слои), с определением граничных значений макроскопических параметров на стенке с помощью приближенного метода Лоялки [1, 2]. Для бинарной смеси получены выражения для усредненных по сечению канала среднемолярной скорости смеси, разности скоростей компонент и относительного теплового потока при наличии продольных градиентов парциальных давлений и градиента температуры. Вычислены соответствующие кинетические коэффициенты матрицы Онзагера. Детально анализируется зависимость этих коэффициентов от числа Кнудсена и характера рассеяния молекул на стенке канала для случая однокомпонентного газа и бинарной смеси с малой относительной разницей масс и поперечников рассеяния молекул.

1. Рассмотрим медленное течение газовой смеси в плоском канале, ограниченном при $x = \pm d/2$ двумя бесконечными параллельными плоскостями. Пусть в направлении z существуют малые относительные градиенты парциального давления $k_\alpha = p_{\alpha 0}^{-1} dp_\alpha/dz$ и температуры $\tau = T_0^{-1} dT/dz$. Решение для функции распределения можно при этом искать в виде

$$f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, x, z) = f_{\alpha 0}\left[1 + k_\alpha z + \tau z\left(\beta_\alpha v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right) + \Phi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, x)\right] \tag{1.1}$$

$$f_{\alpha 0} = n_{\alpha 0}(m_\alpha/2\pi k T_0)^{3/2} \exp(-\beta_\alpha v_\alpha^2), \quad n_{\alpha 0} = \frac{p_{\alpha 0}}{kT_0}, \quad \beta_\alpha = \frac{m_\alpha}{2kT_0}$$

Индекс 0 соответствует параметрам абсолютного максвелловского распределения, а Φ_α — неравновесная добавка к функции распределения, определяемая из линеаризованного кинетического уравнения Больцмана [3]:

$$v_{\alpha x}\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} + v_{\alpha z} k_\alpha + v_{\alpha z}\tau\left(\beta_\alpha v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right) = \sum_\beta L_{\alpha\beta}\Phi_\alpha \tag{1.2}$$

$$L_{\alpha\beta}\Phi_\alpha = \int f_{\beta 0}(\Phi_\alpha' + \Phi_\beta' - \Phi_\alpha - \Phi_\beta)\,|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|\, b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_\beta$$

(штрих относится к скоростям молекул после столкновения).

Ниже будут использоваться уравнения для моментов функции распределения, следующие из (1.2). Ограничимся совокупностью моментных уравнений, которые при переходе к пределу сплошной среды (область течения вдали от стенок) соответствуют 20-моментному приближению Грэда [4]. В связи с этим правая часть уравнений записывается в виде, аналогичном по структуре правым частям уравнений моментов, получаемых в методе Грэда [5]. Фактически, принятая форма записи основывается на эквивалентности моментов интеграла столкновений от точного $L_{\alpha\beta}\Phi_\alpha$ и модельного $L_{\alpha\beta}^{(N)}\Phi_\alpha$ представлений с точностью до N первых моментных уравнений [6—8]. Поскольку описание на уровне уравнений моментов оказывается практически достаточным для получения нужных результатов, такой подход соответствует по точности использованию истинного линеаризованного больцмановского оператора столкновений.

Умножая (1.2) последовательно на $\psi_\alpha(c_\alpha)\exp(-c_\alpha^2)$, где $\psi_\alpha = c_{\alpha i}$, $c_{\alpha i}c_{\alpha j} - {}^1/_3 c_\alpha^2\delta_{ij}$, $c_{\alpha i}(c_\alpha^2 - {}^5/_2)$ и $c_{\alpha i}c_{\alpha j}c_{\alpha k} - {}^1/_5 c_\alpha^2(c_{\alpha i}\delta_{jk} + c_{\alpha j}\delta_{ik} + c_{\alpha k}\delta_{ij})$, а $\mathbf{c}_\alpha = \beta_\alpha^{1/2}\mathbf{v}_\alpha$, и интегрируя по скоростям, приходим для рассматриваемой плоской геометрии задачи к уравнениям моментов вида

$$\frac{\partial}{\partial x}p_{\alpha xz} + p_{\alpha 0}k_\alpha = -\sum_\beta\left[\frac{kT_0n_{\alpha 0}n_{\beta 0}}{n_0[D_{\alpha\beta}]_1}(u_{\alpha z} - u_{\beta z}) + \right. \tag{1.3}$$

$$\left. + \xi_{\alpha\beta}\left[\frac{h_{\alpha z}}{m_\alpha n_{\alpha 0}} - \frac{h_{\beta z}}{m_\beta n_{\beta 0}}\right]\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(m_\alpha s_{\alpha zxx} + \frac{2}{5}h_{\alpha z} + p_{\alpha 0}u_{\alpha z}\right) = -p_0^2\sum_\beta\frac{a_{\alpha\beta}p_{\beta xz}}{p_{\beta 0}} \tag{1.4}$$

$$\frac{2}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Pi_{\alpha zxxx} + \Pi_{\alpha zxyy} + \Pi_{\alpha zxzz} - \frac{5}{2}p_{\alpha xz}\right) + p_{\alpha 0}\tau = \tag{1.5}$$

$$= -\frac{kT_0}{m_\alpha}\sum_\beta\xi_{\alpha\beta}(u_{\alpha z} - u_{\beta z}) - \frac{p_0^2}{T_0}\sum_\beta\frac{b_{\alpha\beta}h_{\beta z}}{p_{\beta 0}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(4\Pi_{\alpha zxxx} - \Pi_{\alpha zxyy} - \Pi_{\alpha zxzz}) = -\frac{25}{4}\frac{p_0^2}{T_0}\sum_\beta\frac{d_{\alpha\beta}m_\beta s_{\beta zxx}}{p_{\beta 0}} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(4\Pi_{\alpha zxyy} - \Pi_{\alpha zxxx} - \Pi_{\alpha zxzz}) = -\frac{25}{4}\frac{p_0^2}{T_0}\sum_\beta\frac{d_{\alpha\beta}m_\beta s_{\beta zyy}}{p_{\beta 0}} \tag{1.7}$$

$$s_{\alpha zxx} + s_{\alpha zyy} + s_{\alpha zzz} = 0 \tag{1.8}$$

Здесь $u_{\alpha z}$ — средняя скорость компоненты α смеси, $p_{\alpha xz}$ — парциальный тензор вязких напряжений, $h_{\alpha z}$ — парциальный относительный тепловой поток. Выражения для них, а также для моментов третьего $s_{\alpha ijk}$ и четвертого порядка $\Pi_{\alpha ijkl}$ записываются как

$$\left\|\begin{matrix} u_{\alpha i} \\ p_{\alpha ij} \\ h_{\alpha i} \\ m_\alpha s_{\alpha ijk} \\ \Pi_{\alpha ijkl}\end{matrix}\right\| = \tag{1.9}$$

$$= 2p_{\alpha 0}\beta_\alpha^{-1/2}\pi^{-3/2}\int\left\|\begin{matrix} (2p_{\alpha 0})^{-1}c_{\alpha i} \\ \beta_\alpha^{1/2}\left(c_{\alpha i}c_{\alpha j} - \frac{1}{3}c_\alpha^2\delta_{ij}\right) \\ \frac{1}{2}c_{\alpha i}\left(c_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right) \\ c_{\alpha i}c_{\alpha j}c_{\alpha k} - \frac{1}{5}c_\alpha^2(c_{\alpha i}\delta_{jk} + \\ + c_{\alpha j}\delta_{ik} + c_{\alpha k}\delta_{ij}) \\ \beta_\alpha^{1/2}c_{\alpha i}c_{\alpha j}c_{\alpha k}c_{\alpha l}\end{matrix}\right\|\Phi_\alpha\exp(-c_\alpha^2)\,d\mathbf{c}_\alpha$$

В уравнениях (1.3) — (1.7) $[D_{\alpha\beta}]_1 = 3kT_0/(16n_0\mu_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}^{11})$ соответствует первому приближению к коэффициенту взаимной диффузии бинарной смеси α- и β- молекул [9], коэффициенты $\xi_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ вычислены в работе [5], где уравнения моментов записывались в приближении 13-моментов, а для новых коэффициентов, появляющихся при переходе к 20-моментному приближению, соответствующие вычисления дают

$$d_{\alpha\alpha} = \frac{9}{4}\frac{y_\alpha^2}{[\lambda_{\alpha\alpha}]_1} + \frac{4}{25}\frac{T_0}{p_0}\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{y_\alpha y_\beta}{(m_\alpha+m_\beta)^2[D_{\alpha\beta}]_1}\left(\frac{15}{2}m_\alpha^2 + \right.$$
$$\left. + 9m_\alpha m_\beta A_{\alpha\beta}^* + \frac{24}{7}m_\beta^2 D_{\alpha\beta}^*\right)$$
$$d_{\alpha\beta} = -\frac{4}{25}\frac{T_0}{p_0}\frac{m_\alpha m_\beta y_\alpha y_\beta}{(m_\alpha+m_\beta)^2[D_{\alpha\beta}]_1}\left(\frac{15}{2} - 9A_{\alpha\beta}^* + \frac{24}{7}D_{\alpha\beta}^*\right),\ \beta\neq\alpha$$
$$y_\alpha = \frac{n_\alpha}{n},\quad A_{\alpha\beta}^* = \frac{\Omega_{\alpha\beta}^{22}}{2\Omega_{\alpha\beta}^{11}},\quad D_{\alpha\beta}^* = \frac{5\Omega_{\alpha\beta}^{33} - 3\Omega_{\alpha\beta}^{13}}{24\Omega_{\alpha\beta}^{11}}$$

где y_α — относительная молярная концентрация α-компоненты смеси, а $\Omega_{\alpha\beta}{}^{lq}$ соответствуют известным интегралам Чемпена — Каулинга [9].

Вдали от стенок система уравнений должна соответствовать обычному 20-моментному приближению Грэда [4]. Для неравновесной добавки к функции распределения в этой области с учетом малости величин $\overset{a}{u}_{\alpha z}$, $\overset{a}{p}_{\alpha xz}$, $\overset{a}{h}_{\alpha z}$, $\overset{a}{s}_{\alpha ijk}$ приходим к выражению

$$\Phi_\alpha{}^a(\mathbf{c}_\alpha, x) = 2\beta_\alpha^{1/2}(u_z{}^a + \overset{a}{w}_{\alpha z})c_{\alpha z} + 2p_{\alpha 0}^{-1}\overset{a}{p}_{\alpha xz}c_{\alpha x}c_{\alpha z} + \tag{1.10}$$
$$+ \frac{4}{5}\beta_\alpha^{1/2}p_{\alpha 0}^{-1}\overset{a}{h}_{\alpha z}c_{\alpha z}\left(c_\alpha{}^2 - \frac{5}{2}\right) + 2\beta_\alpha^{1/2}p_{\alpha 0}^{-1}m_\alpha(\overset{a}{s}_{\alpha zxx}c_{\alpha x}^2 +$$
$$+ \overset{a}{s}_{\alpha zyy}c_{\alpha y}^2 + {}^1/_3\overset{a}{s}_{\alpha zzz}c_{\alpha z}^2),\quad \overset{a}{w}_{\alpha z} = \overset{a}{u}_{\alpha z} - u_z{}^a$$

где u_z — среднемассовая скорость смеси, индексом a обозначены асимптотические значения соответствующих величин, т. е. значения вне слоя Кнудсена.

Подставляя (1.10) в $\Pi_{\alpha ijkl}$ из (1.9) и интегрируя по скоростям, имеем

$$\overset{a}{\Pi}_{\alpha zxxx} = {}^3/_2\overset{a}{p}_{\alpha xz},\quad \overset{a}{\Pi}_{\alpha zxyy} = {}^1/_2\overset{a}{p}_{\alpha xz},\quad \overset{a}{\Pi}_{\alpha zxzz} = {}^3/_2\overset{a}{p}_{\alpha xz} \tag{1.11}$$

Решение системы уравнений (1.3)—(1.8) с учетом (1.11) и симметрии задачи относительно продольной оси канала ($\Phi_\alpha(x,\ c_{\alpha x},\ c_{\alpha y},\ c_{\alpha z}) = \Phi_\alpha(-x,\ -c_{\alpha x},\ c_{\alpha y},\ c_{\alpha z})$) позволяет получить явные выражения для $\overset{a}{w}_{\alpha z}$, $\overset{a}{p}_{\alpha xz}$, $\overset{a}{h}_{\alpha z}$, $\overset{a}{s}_{\alpha ijk}$.

В случае бинарной смеси (α, β = 1,2) соответствующие решения имеют вид

$$\overset{a}{w}_{\alpha z} = (-1)^\alpha\frac{[D_{\alpha\beta}]_2\rho_{\beta 0}}{\rho_0 y_\alpha y_\beta}\left(\frac{d}{dz}y_1 + y_\alpha y_\beta[\alpha_p]_2 p_0^{-1}\frac{dp}{dz} + \right. \tag{1.12}$$
$$\left. + y_\alpha y_\beta[\alpha_T]_1 T_0^{-1}\frac{dT}{dz}\right),\quad \beta\neq\alpha;\quad \overset{a}{p}_{\alpha xz}(x) = -x\frac{\eta_\alpha}{\eta}\frac{dp}{dz}$$
$$\overset{a}{h}_{\alpha z} = -\frac{5}{2}\frac{a_\alpha p_0}{y_\beta}[D_{\alpha\beta}]_2\frac{d}{dz}y_1 + \frac{2T_0 y_\alpha}{5p_0|b|}\alpha_{p\alpha}'\frac{dp}{dz} - \lambda_\alpha'\frac{dT}{dz},\quad \beta\neq\alpha$$
$$\overset{a}{s}_{\alpha zxx} = \frac{16y_\alpha T_0}{25p_0 m_\alpha}\delta_\alpha\frac{dp}{dz},\quad \overset{a}{s}_{\alpha zyy} = -\frac{1}{4}\overset{a}{s}_{\alpha zxx},\quad \overset{a}{s}_{\alpha zzz} = -\frac{3}{4}\overset{a}{s}_{\alpha zxx}$$

$$\rho_0 = \sum_\alpha \rho_{\alpha 0}, \quad \rho_{\alpha 0} = m_\alpha n_{\alpha 0}, \quad |b| = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

$$\lambda_1' = \lambda_1 + {}^5/_2 a_1 y_1 n_0 k\, [D_{12}]_2\, [\alpha_T]_1$$

$$\lambda_2' = \lambda_2 + {}^5/_2 a_2 y_2 n_0 k\, [D_{12}]_2\, [\alpha_T]_1$$

$$\alpha_{p1}' = (b_{22}\eta_1 - b_{12}\eta_2)\,\eta^{-1} - \frac{25}{4} a_1 n_0 k\, |b|\, [D_{12}]_2\, [\alpha_p]_2$$

$$\alpha_{p2}' = (b_{11}\eta_2 - b_{21}\eta_1)\,\eta^{-1} - \frac{25}{4} a_2 n_0 k\, |b|\, [D_{12}]_2\, [\alpha_p]_2$$

$$\delta_1 = (d_{22}\eta_1 - d_{21}\eta_2)\,(\eta\,|\,d\,|)^{-1}, \quad \delta_2 = (d_{11}\eta_2 - d_{12}\eta_1)\,(\eta\,|\,d\,|)^{-1}$$

$$a_1 = -\frac{2\xi_{12}}{5n_0^2 k\,|b|}\left(\frac{b_{22}}{m_1} + \frac{b_{21}}{m_2}\right), \quad a_2 = \frac{2\xi_{12}}{5n_0^2 k\,|b|}\left(\frac{b_{11}}{m_2} + \frac{b_{12}}{m_1}\right)$$

$$\xi_{12} = \frac{n_{10}n_{20}}{n_0 [D_{12}]_1}\,\mu_{12}\left(\frac{6}{5}C_{12}^* - 1\right), \quad C_{12}^* = \frac{\Omega_{12}^{12}}{3\Omega_{12}^{11}}, \quad \mu_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Выражения для парциальных коэффициентов вязкости η_α и теплопроводности λ_α, а также для коэффициента взаимной диффузии второго порядка $[D_{12}]_2$ и постоянных баро- и темодиффузии $[\alpha_p]_2$ и $[\alpha_T]_1$ приведены в работе [5].

2. Обратимся к получению усредненных по сечению канала выражений для относительного теплового потока, разности скоростей компонент смеси и среднемолярной скорости смеси.

Суммируя (1.3) по α и интегрируя по x, приходим к выражению для $p_{xz}(x)$, справедливому во всей области течения

$$p_{xz}(x) = -x\frac{dp}{dz}; \quad p_{xz} = \sum_\alpha p_{\alpha xz}, \quad p = \sum_\alpha p_\alpha \tag{2.1}$$

Значения $p_{\alpha xz}(x)$ находятся из решения уравнений (1.4). Подставляя эти значения в (2.1) и интегрируя полученное соотношение по x, получаем

$$p_0^{-1}\sum_\alpha \eta_\alpha y_\alpha^{-1}\left\{m_\alpha\left[s_{\alpha zxx}(x) - s_{\alpha zxx}\left(\frac{d}{2}\right)\right] + \frac{2}{5}\left[h_{\alpha z}(x) - h_{\alpha z}\left(\frac{d}{2}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + p_{\alpha 0}\left[u_{\alpha z}(x) - u_{\alpha z}\left(\frac{d}{2}\right)\right]\right\} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{d^2}{4}\right)\frac{dp}{dz} \tag{2.2}$$

Усредним уравнения (1.3), (1.5), (1.6) и (2.2) по сечению канала. В результате имеем

$$-\sum_\beta [y_\alpha y_\beta p_0 [D_{\alpha\beta}]_1^{-1}(\langle u_{\alpha z}\rangle - \langle u_{\beta z}\rangle) +$$
$$+ \xi_{\alpha\beta}\left(\frac{\langle h_{\alpha z}\rangle}{m_\alpha n_{\alpha 0}} - \frac{\langle h_{\beta z}\rangle}{m_\beta n_{\beta 0}}\right)\Bigg] = K_{\alpha 1} \tag{2.3}$$

$$-\frac{kT_0}{m_\alpha}\sum_\beta \xi_{\alpha\beta}(\langle u_{\alpha z}\rangle - \langle u_{\beta z}\rangle) - \frac{p_0^2}{T_0}\sum_\beta \frac{b_{\alpha\beta}\langle h_{\beta z}\rangle}{p_{\beta 0}} = K_{\alpha 2} \tag{2.4}$$

$$-\frac{5}{4}\frac{p_0^2}{T_0}\sum_\beta \frac{d_{\alpha\beta} m_\beta \langle s_{\beta zxx}\rangle}{p_{\beta 0}} = K_{\alpha 3} \tag{2.5}$$

$$p_0^{-1}\sum_\beta \eta_\beta y_\beta^{-1}\left(m_\beta\langle s_{\beta zxx}\rangle + \frac{2}{5}\langle h_{\beta z}\rangle + p_{\beta 0}\langle u_{\beta z}\rangle\right) = K_4 \tag{2.6}$$

$$K_{\alpha 1} = \frac{2}{d} p_{\alpha xz}\left(\frac{d}{2}\right) + p_{\alpha 0}k_\alpha, \quad K_{\alpha 2} = \frac{4}{5d}\left[\Pi_{\alpha zxxx}\left(\frac{d}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \Pi_{\alpha zxyy}\left(\frac{d}{2}\right) + \Pi_{\alpha zxzz}\left(\frac{d}{2}\right) - \frac{5}{2} p_{\alpha xz}\left(\frac{d}{2}\right)\right] + p_{\alpha 0}\tau$$
$$K_{\alpha 3} = \frac{2}{5d}\left[4\Pi_{\alpha zxxx}\left(\frac{d}{2}\right) - \Pi_{\alpha zxyy}\left(\frac{d}{2}\right) - \Pi_{\alpha zxzz}\left(\frac{d}{2}\right)\right]$$
$$K_4 = p_0^{-1}\sum_\beta \eta_\beta y_\beta^{-1}\left[m_\beta s_{\beta zxx}\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{2}{5} h_{\beta z}\left(\frac{d}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + p_{\beta 0} u_{\beta z}\left(\frac{d}{2}\right)\right] - \frac{d^2}{12}\frac{dp}{dz}$$

При этом

$$\langle Q_\alpha\rangle = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} Q_\alpha(x)\,dx$$

Для бинарной смеси решение системы (2.3) — (2.6) приводит к результатам

$$(2.7) \qquad \langle h_z\rangle = \langle h_{1z}\rangle + \langle h_{2z}\rangle = -[K_{11}[D_{12}]_2[\alpha_T]_1 +$$
$$+ T_0 p_0^{-1}(K_{12}\lambda_1' y_1^{-1} + K_{22}\lambda_2' y_2^{-1})]$$
$$\langle u_{1z}\rangle - \langle u_{2z}\rangle = -\frac{[D_{12}]_2}{p_0 y_1 y_2}\left[K_{11} + \frac{5}{2}(K_{12}a_1 + K_{22}a_2)\right]$$
$$\langle u_{mz}\rangle = y_1\langle u_{1z}\rangle + y_2\langle u_{2z}\rangle = -K_{11}p_0^{-1}[D_{12}]_2[\alpha_p]_2 +$$
$$+ \frac{2T_0}{5p_0^2|b|}(K_{12}\alpha_{p1}' + K_{22}\alpha_{p2}') + \frac{4T_0}{5p_0^2}(K_{13}\delta_1 + K_{23}\delta_2) + K_4\eta^{-1}$$

3. Для определения неизвестных величин на стенке канала воспользуемся приближенным методом [1]. Как было показано [1, 2], применение этого метода соответствует простейшему выбору пробной функции в рамках более общего вариационного подхода, развитого в [10].

Введем функции распределения падающих и отраженных молекул, так что $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha^+$ для $c_{\alpha x} > 0$ и $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha^-$ для $c_{\alpha x} < 0$ ($c_{\alpha x} > 0$ соответствует положительному направлению оси x). Согласно (1.10), для функций $\Phi_\alpha^\pm$ при $x = d/2$ с учетом обычного максвелловского условия отражения молекул на стенку имеем

$$(3.1) \qquad \Phi_\alpha^+(\mathbf{c}_\alpha, d/2) = 2\beta_\alpha^{1/2}(a + w_{\alpha z}^a)c_{\alpha z} + 2p_{\alpha 0}^{-1}p_{\alpha xz}^a(d/2)c_{\alpha x}c_{\alpha z} +$$
$$+ {}^4/_5\beta_\alpha^{1/2}p_{\alpha 0}^{-1}h_{\alpha z}^a c_{\alpha z}(c_\alpha^2 - {}^5/_2) + 2\beta_\alpha^{1/2}p_{\alpha 0}^{-1}m_\alpha(s_{\alpha zxx}^a c_{\alpha x}^2 +$$
$$+ s_{\alpha zyy}^a c_{\alpha y}^2 + {}^1/_3 s_{\alpha zzz}^a c_{\alpha z}^2)$$
$$\Phi_\alpha^-(\mathbf{c}_\alpha, d/2) = (1 - \varkappa_\alpha)\Phi_\alpha^+(-c_{\alpha x}, c_{\alpha y}, c_{\alpha z}, d/2)$$

где $\varkappa_\alpha$ — доля молекул, испытавших диффузное отражение на стенке, а вместо $u_z^a(d/2)$ вводится произвольная постоянная a.

Используя условие (2.1) и определение $p_{\alpha xz}$ (1.9) на стенке канала, после вычисления соответствующих интегралов с учетом (3.1) находим постоянную a. Она оказывается выраженной через градиенты концентрации, давления и температуры

$$a = -\left(\sum_\alpha \varkappa_\alpha \beta_\alpha^{1/2} p_{\alpha 0}\right)^{-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} d\left(1-\frac{1}{2\eta}\sum_\alpha \varkappa_\alpha \eta_\alpha\right)\frac{dp}{dz} + \right. \tag{3.2}$$

$$\left. + \sum_\alpha \varkappa_\alpha \beta_\alpha^{1/2}\left(p_{\alpha 0} w_{\alpha z}^a + \frac{1}{5} h_{\alpha z}^a + \frac{m_\alpha}{2} s_{\alpha z x x}^a\right)\right]$$

Подставляя ее в (3.1), находим неизвестные величины на стенке канала, входящие в K_{ik}. В результате рассматриваемые величины потоков записываются в виде линейных комбинаций градиентов соответствующих термодинамических величин.

Согласно термодинамике необратимых процессов для прерывных систем [11], связь между потоками и градиентами можно представить как

$$\left\|\begin{matrix} \langle h_z\rangle \\ \langle u_{1z}\rangle - \langle u_{2z}\rangle \\ \langle u_{mz}\rangle \end{matrix}\right\| = -\left\|\begin{matrix} \Lambda_{qq} & \Lambda_{q1} & \Lambda_{qm} \\ \Lambda_{1q} & \Lambda_{11} & \Lambda_{1m} \\ \Lambda_{mq} & \Lambda_{m1} & \Lambda_{mm}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} T^{-2}\dfrac{dT}{dz} \\ pT^{-1}\dfrac{d}{dz} y_1 \\ T^{-1}\dfrac{dp}{dz}\end{matrix}\right\| \tag{3.3}$$

Общие выражения для кинетических коэффициентов Λ_{ik}, получаемых при сравнении (3.3) с (2.7), имеют вид

$$\Lambda_{11} = \frac{[D_{12}]_2 T_0}{p_0 y_1 y_2}\left[1 - \frac{B[D_{12}]_2}{2\sqrt{\pi} d p_0 y_1 y_2}(T_1 T_2 t^2 + 12 T_1 a_1^2 + 12 T_2 a_2^2)\right] \tag{3.4}$$

$$\Lambda_{1m} = \Lambda_{m1} = \frac{[D_{12}]_2 T_0}{p_0}\left\{[\alpha_p]_2 + \frac{1}{4\eta y_1 y_2}[\eta_1(2-\varkappa_1)F_1 - \right.$$

$$\left. - \eta_2(2-\varkappa_2)F_2]\right\} - \frac{BT_1T_2}{\sqrt{\pi} p_0 d y_1 y_2}[D_{12}]_2[\alpha_p]_2 t +$$

$$+ \frac{2BT_0}{25\sqrt{\pi} d p_0^2 |b| y_1 y_2}(T_1 \alpha_{p1}' F_3 - T_2 \alpha_{p2}' F_4) +$$

$$+ \frac{8BT_0}{25\sqrt{\pi} d p_0^2 y_1 y_2}(\delta_1 T_1 F_5 - \delta_2 T_2 F_6)$$

$$\Lambda_{1q} = \Lambda_{q1} = [D_{12}]_2 T_0\left[[\alpha_T]_1 - \frac{BT_1T_2}{\sqrt{\pi} d p_0 y_1 y_2}[D_{12}]_2[\alpha_T]_1 t - \right.$$

$$\left. - \frac{BT_0}{5\sqrt{\pi} d p_0^2 y_1^2 y_2^2}(T_1 y_2 \lambda_1' F_3 - T_2 y_1 \lambda_2' F_4)\right]$$

$$\Lambda_{qq} = T_0^2 \lambda' - \frac{2BT_1T_2T_0}{\sqrt{\pi} d}[D_{12}]_2^2 [\alpha_T]_1^2 - \tag{3.5}$$

$$- \frac{4BT_1T_2T_0^2}{5\sqrt{\pi} d p_0 y_1 y_2}[D_{12}]_2[\alpha_T]_1(\lambda_1' y_2 - \lambda_2' y_1) -$$

$$- \frac{2BT_0^3}{25\sqrt{\pi} d p_0^2 y_1^2 y_2^2}[(13 - T_1) T_1 y_2^2 (\lambda_1')^2 - 2T_1T_2 y_1 y_2 \lambda_1' \lambda_2' +$$

$$+ (13 - T_2) T_2 y_1^2 (\lambda_2')^2]$$

$$\Lambda_{mm} = \frac{T_0 d^2}{12\eta} + \frac{T_0 d}{2p_0}\left[\frac{\sqrt{\pi}\varepsilon^2 p_0}{B} + \sum_\alpha \beta_\alpha^{-1/2}\frac{(2-\varkappa_\alpha)}{\sqrt{\pi} y_\alpha}\left(\frac{\eta_\alpha}{\eta}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{4T_0^2}{25 p_0^2}\sum_\alpha\left\{\left(\frac{\alpha_{p\alpha}'}{|b|} + 4\delta_\alpha\right)\left[\varepsilon T_\alpha - (1-\varkappa_\alpha)\frac{\eta_\alpha}{\eta}\right]\right\} +$$

$$+\frac{8BT_0^2T_1T_2}{25\sqrt{\pi}dp_0^3}[D_{12}]_2[\alpha_p]_2\left[\frac{1}{|b|}(\alpha'_{p1}-\alpha'_{p2})+4(\delta_1-\delta_2)-\right.$$

$$\left.-\frac{25p_0}{4T_0}[D_{12}]_2[\alpha_p]_2\right]+\frac{T_0}{p_0}[D_{12}]_2[\alpha_p]_2\left[y_1-2\varepsilon T_1+\right.$$

$$\left.+\frac{\eta_1}{\eta}(1-\varkappa_1)\right]-\frac{8T_0^3B}{625\sqrt{\pi}dp_0^4}\sum_\alpha\left\{T_\alpha\left[(13-T_\alpha)\left(\frac{\alpha'_{p\alpha}}{|b|}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+8\frac{\alpha'_{p\alpha}}{|b|}\delta_\alpha(3-T_\alpha)+8\delta_\alpha^2(11-2T_\alpha)\right]\right\}+$$

$$+\frac{16T_0^3BT_1T_2}{625\sqrt{\pi}dp_0^4}\left[\frac{\alpha'_{p1}\alpha'_{p2}}{|b|^2}+\frac{4}{|b|}(\alpha'_{p1}\delta_2+\alpha'_{p2}\delta_1)+16\delta_1\delta_2\right]$$

$$\Lambda_{mq}=\Lambda_{qm}=[D_{12}]_2[\alpha_T]_1T_0\left(y_1-T_1\varepsilon-\frac{\varkappa_1\eta_1}{2\eta}\right)-$$

$$-\frac{T_0^2}{5p_0}\sum_\alpha\left[\lambda_\alpha'y_\alpha^{-1}\left(T_\alpha\varepsilon+\frac{\varkappa_\alpha\eta_\alpha}{\eta}\right)\right]+\frac{4T_0^3B}{125\sqrt{\pi}p_0^2d}\left\{\frac{\lambda_1'T_1}{y_1p_0}\left[(13-\right.\right.$$

$$\left.-T_1)\frac{\alpha'_{p1}}{|b|}-T_2\frac{\alpha'_{p2}}{|b|}+4\delta_1(3-T_1)-4T_2\delta_2-\frac{25T_2p_0}{2T_0}[D_{12}]_2[\alpha_p]_2\right]+$$

$$+\frac{\lambda_2'T_2}{y_2p_0}\left[(13-T_2)\frac{\alpha'_{p2}}{|b|}-T_1\frac{\alpha'_{p1}}{|b|}+4\delta_2(3-T_2)-4T_1\delta_1+\right.$$

$$\left.+\frac{25T_1p_0}{2T_0}[D_{12}]_2[\alpha_p]_2\right]+\frac{5T_1T_2}{T_0}[D_{12}]_2[\alpha_T]_1\left[\frac{1}{|b|}(\alpha'_{p1}-\alpha'_{p2})+\right.$$

$$\left.\left.+4(\delta_1-\delta_2)-\frac{25p_0}{2T_0}[D_{12}]_2[\alpha_p]_2\right]\right\}$$

$F_1=T_2t+a_1$, $F_2=T_1t-a_2$, $F_3=T_2t+12a_1$, $F_4=T_1t-$ $-12a_2$, $F_5=T_2t+2a_1$, $F_6=T_1t-2a_2$, $t=2+a_1-a_2$, $\lambda'=\lambda_1'+\lambda_2'$, $\varepsilon=1-(\varkappa_1\eta_1+\varkappa_2\eta_2)(2\eta)^{-1}$

$$B=\sum_\alpha\beta_\alpha^{1/2}\varkappa_\alpha p_{\alpha0},\quad T_\alpha=\beta_\alpha^{1/2}\varkappa_\alpha p_{\alpha0}B^{-1};\quad \alpha=1,2$$

4. Рассмотрим случай однокомпонентного газа ($y_1=1$). При этом

$$\langle h_z\rangle=-\Lambda_{qq}T^{-2}\frac{dT}{dz}-\Lambda_{qm}T^{-1}\frac{dp}{dz}$$

$$\langle u_z\rangle=-\Lambda_{mq}T^{-2}\frac{dT}{dz}-\Lambda_{mm}T^{-1}\frac{dp}{dz}$$

Используя (3.5), находим

$$\Lambda_{mm}=\beta^{-1/2}\frac{dT_0}{p_0}\left[\frac{\mathrm{Kn}^{-1}}{12}+\frac{(2-\varkappa)}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}+\frac{2-\varkappa}{\varkappa}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{5\varkappa\,\mathrm{Kn}}{12}-\frac{3\varkappa\,\mathrm{Kn}^2}{2\sqrt{\pi}}\right]$$

$$\Lambda_{qm}=\Lambda_{mq}=\beta^{-1/2}dT_0\left[-\frac{3}{16}(2+\varkappa)\mathrm{Kn}+\frac{7\varkappa}{4\sqrt{\pi}}\mathrm{Kn}^2\right]$$

$$\Lambda_{qq}=\beta^{-1/2}dT_0p_0\left(\frac{15}{8}\mathrm{Kn}-\frac{27\varkappa}{8\sqrt{\pi}}\mathrm{Kn}^2\right),\quad \mathrm{Kn}=\frac{[\eta_1]}{p_0\beta^{1/2}d}$$

где $[\eta]_1$ — коэффициент вязкости, соответствующий первому приближению в разложении по полиномам Сонина в методе Чепмена — Энскога [9].

Введем безразмерные величины

$$J_m^*=J_m/(mJ_0)=2\beta^{1/2}\langle u_z\rangle,\quad J_q^*=J_q/(kT_0J_0)=2\beta^{1/2}p_0^{-1}\langle h_z\rangle$$

где J_m и J_q — соответствующие усредненные потоки массы и тепла, отнесенные к единице площади сечения канала, а $J_0 = n_0/(2\beta^{1/2})$. При этом

$$J_m^* = -L_{mm}kd - L_{mq}\tau d, \quad J_q^* = -L_{qm}kd - L_{qq}\tau d$$

Для случая полностью диффузного отражения ($\varkappa = 1$) эти коэффициенты принимают вид

$$L_{mm} = \frac{1}{6}\mathrm{Kn}^{-1} + \sigma + \frac{5}{6}\mathrm{Kn} - \frac{3}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Kn}^2$$

$$L_{mq} = L_{qm} = -a_T\,\mathrm{Kn} + \frac{7}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{Kn}^2, \quad L_{qq} = \frac{15}{4}\mathrm{Kn} - \frac{27}{4\sqrt{\pi}}\mathrm{Kn}^2$$

где $\sigma = 1/\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi}/4 = 1{,}0073$ и $a_T = {}^9/_8$ — коэффициенты вязкого и теплового скольжения, значения которых совпадают с результатами, полученными вариационным методом в [10].

Для сравнения приведем соответствующие значения кинетических коэффициентов, йденные в работе [12], где учитывались эффекты скольжения второго порядка (что соответствует использованию барнеттовского члена в разложении функции распределения). При $\varkappa = 1$ имеем

$$L_{mm} = \frac{1}{6}\mathrm{Kn}^{-1} + \sigma + \frac{3}{2}\mathrm{Kn} - \frac{9}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Kn}^2$$

$$L_{mq} = L_{qm} = -a_T\,\mathrm{Kn} + \frac{9}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{Kn}^2, \quad L_{qq} = \frac{15}{4}\mathrm{Kn} - \frac{27}{4\sqrt{\pi}}\mathrm{Kn}^2$$

Как видно, в коэффициенте L_{mm}, описывающем изотермический пуазейлевский перенос газа в канале, различие в результатах проявляется начиная с члена $\sim \mathrm{Kn}$ (или $\sim\mathrm{Kn}^2$ по отношению к обычному пуазейлевскому члену, имеющему порядок Kn^{-1}). В перекрестных коэффициентах разница обнаруживается уже в члене, имеющем порядок Kn по отношению к члену, описывающему тепловое скольжение газа в канале. Анализ показывает, что отмеченная разница целиком связана с некорректным выбором в [12] структуры барнеттовского члена, который записывался на основании простой аналогии с видом его для частного случая БГК-модели (заменой числа Прандтля, равного 1, на ${}^2/_3$). Между тем, как следует, например, из [13], даже для максвелловских молекул вид этого члена оказывается более сложным. При произвольном законе взаимодействия соответствующая структура барнеттовского члена выявляется на основе разложения (1.10) с учетом вида $h_{\alpha z}^{a}$ и $s_{\alpha ijk}^{a}$ для однокомпонентного газа.

Из-за громоздкости выражений для Λ_{ik} в случае смеси ограничимся ниже анализом лишь тех коэффициентов, которые входят в выражение для диффузионного потока (или разности усредненных по сечению скоростей компонент) в канале, поскольку именно эти коэффициенты (и равные им перекрестные коэффициенты в выражениях для $\langle h_z\rangle$ и $\langle u_{mz}\rangle$) определяют в основном специфику явлений, возникающих при рассмотрении газовых смесей.

Представим $\langle u_{1z}\rangle - \langle u_{2z}\rangle$ в виде

$$\langle u_{1z}\rangle - \langle u_{2z}\rangle = -\frac{D_{12}}{y_1y_2}\left(\frac{d}{dz}y_1 + y_1y_2\alpha_p p_0^{-1}\frac{dp}{dz} + y_1y_2\alpha_T T_0^{-1}\frac{dT}{dz}\right)$$

Коэффициенты диффузии, баро- и термодиффузии связаны при этом с соответствующими коэффициентами Λ_{ik} соотношениями

$$D_{12} = \Lambda_{11}y_1y_2p_0T_0^{-1}, \quad D_{12}\alpha_p = \Lambda_{1m}p_0T_0^{-1}, \quad D_{12}\alpha_T = \Lambda_{1q}T_0^{-1}$$

Заметим, что члены в Λ_{ik} ((3.4), (3.5)), содержащие d^{-1} (d — ширина канала), имеют порядок числа Кнудсена. При этом для $\mathrm{Kn} \to 0$ коэффициенты D_{12} и α_T совпадают с $[D_{12}]_2$ и $[\alpha_T]_1$. Выражение для постоянной бародиффузии α_p при $\mathrm{Kn} \to 0$ отличается от величины $[\alpha_p]_2$, полученной в [5], дополнительным слагаемым, зависящим, в частности, от характера рассеяния молекул на стенке. Для случая $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$ (полностью диффузное рассеяние) выражение для α_p можно привести к виду [14]:

$$\alpha_p = {}^1/_2\,([\alpha_p]_2 + \alpha_p{}^k)$$

$$\alpha_p{}^k = \frac{(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}) - 0{,}5\,(a_1\sqrt{m_1}y_2^{-1} + a_2\sqrt{m_2}y_1^{-1})}{\sqrt{m_1}y_1 + \sqrt{m_2}y_2}$$

Для иллюстрации зависимости D_{12}, α_p, α_T от свойств молекул смеси, числа Кнудсена и характера рассеяния молекул на стенке рассмотрим смесь с малой относительной разницей масс и поперечников рассеяния молекул компонент $((m_2 - m_1)/(m_2 + m_1) \ll 1$ и $(\sigma_2 - \sigma_1)/(\sigma_2 + \sigma_1) \ll 1)$, используя модель молекул — твердых шариков с диаметрами σ_1 и σ_2. Учитывая также возможность небольшого различия в коэффициентах отражения молекул на стенке, после упрощения соответствующих выражений (для смеси с $y_1 = y_2 = 0{,}5$) получаем

$$D_{12} = [D_{12}]_2(1 - 0{,}6523\varkappa\,\mathrm{Kn})$$

$$D_{12}\alpha_p = [D_{12}]_2\left\{[1{,}1441 + \varkappa\,(0{,}1303 - 1{,}3152\,\mathrm{Kn})]\,\frac{\Delta m}{2m} + \right.$$

$$+ [0{,}0678 - \varkappa\,(0{,}6653 - 1{,}6794\,\mathrm{Kn})]\,\frac{\Delta\sigma}{2\sigma} +$$

$$\left. + [1{,}9322 - \varkappa\,(0{,}0339 - 0{,}1785\,\mathrm{Kn})]\,\frac{\Delta\varkappa}{2\varkappa}\right\}$$

$$D_{12}\alpha_T = -[D_{12}]_2\left[(0{,}8898 - 1{,}1114\,\varkappa\mathrm{Kn})\,\frac{\Delta m}{2m} + \right.$$

$$\left. + (0{,}3390 - 0{,}3086\varkappa\,\mathrm{Kn})\,\frac{\Delta\sigma}{2\sigma} + 0{,}3443\varkappa\mathrm{Kn}\,\frac{\Delta\varkappa}{2\varkappa}\right]$$

$$\frac{\Delta m}{2m} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}, \quad \frac{\Delta\sigma}{2\sigma} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}, \quad \frac{\Delta\varkappa}{2\varkappa} = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_2 + \varkappa_1}$$

$$\mathrm{Kn} = \frac{5\sqrt{\pi}}{8}\,(\sqrt{2}\,\pi n_0\sigma^2 d)^{-1}$$

Как уже отмечалось при $\mathrm{Kn} \to 0$ будет $D_{12} \to [D_{12}]_2$, $\alpha_T \to [\alpha_T]_1$. Что касается α_p при $\mathrm{Kn} \to 0$, то для $\varkappa = 1$ получаем [14]:

$$\alpha_p = 1{,}2744\,\frac{\Delta m}{2m} - 0{,}5975\,\frac{\Delta\sigma}{2\sigma}$$

Заметим, что в выражении для $[\alpha_p]_2$, полученном в [5], соответствующие коэффициенты равны 1,405 и 1,263. Таким образом, учет кнудсеновских слоев в канале при вычислении α_p для $\mathrm{Kn} \to 0$ дает вдвое более слабую зависимость от относительной разницы в поперечниках столкновений молекул и практически мало меняющуюся зависимость от различия в массах молекул компонент.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Loyalka S. K.* Approximate method in the kinetic theory.— Phys. Fluids, 1971, v. 14, No. 11, p. 2291—2294.
2. *Lang H., Loyalka S. K.* Diffusion slip velocity: theory and experiment.— Z. Naturforsch., 1972, B. 27a, No. 8/9, S. 1307—1319.
3. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
4. *Grad H.* On the kinetic theory of rarefied gases.— Communs Pure and Appl. Math., 1949, v. 2, No. 4, p. 331—407.— Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей, 1952, 4 (14), с. 71—97; 5 (15), с. 61—96.

5. *Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А.* Влияние вязкого переноса импульса на диффузию в газовой смеси.— Ж. эксперим. и теор. физики, 1962, т. 42, вып. 3, с. 856—867.
6. *Sirovich L.* Kinetic modelling of gas mixtures.— Phys. Fluids, 1962, v. 5, No. 8, p. 908.
7. *McCormack F. J.* Construction of linearized kinetic models for gaseous mixtures and molecular gases.— Phys. Fluids, 1973, v. 16, No. 12, p. 2095.
8. *Шахов Е. М.* О приближенных кинетических уравнениях в теории разреженных газов.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1, с. 156.
9. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
10. *Loyalka S. K.* The slip problem for a simple gas.— Z. Naturforsch., 1971, v. 26a, No. 6, p. 964.
11. *Гроот С. де, Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
12. *Lang H.* Second-order slip effects in Poiseuille flow.— Phys. Fluids, 1976, v. 19, No. 3, p. 366.
13. *Шавалиев М. Ш.* Барнеттовское приближение к функции распределения и супербарнеттовские вклады в тензор напряжений и тепловой поток.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 4, с. 656.
14. *Жданов В. М.*— В кн.: Баро- и термодиффузия газовой смеси в условиях внутренней задачи. Тезисы докл. VI Всес. конференции по теплофизическим свойствам веществ. Минск, 1978, с. 158—160.

Москва

Поступила в редакцию
4.I.1981