

УДК 533.95

К РАЗЛЕТУ В ВАКУУМ ГАЗОВОГО ЭЛЛИПСОИДА С ОТТАЛКИВАНИЕМ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ

Лысыков Ю. И.

Методами качественной теории дифференциальных уравнений, а также численно исследуется задача об адиабатическом разлете в вакуум однородного облака идеального газа при линейной зависимости между декартовыми и лагранжевыми координатами газовых частиц, которые обладают зарядом, создающим макроскопическое поле облака, но не приводящим к неидеальности газа.

Задача о разлете невязкого газового облака с эллипсоидальными поверхностями уровня хорошо известна и имеет ряд решений, таких, как решение Седова Л. И. [1], решение задачи о движении гравитирующего газа [2], решение частной задачи об адиабатическом разлете облака при наличии связи типа

$$x_i = \sum_k F_{ik} a_k$$

между лагранжевыми a_i и декартовыми x_i координатами частиц [3]. Метод [3] приводит к простой системе обыкновенных дифференциальных уравнений для величин F_{ik} , которая решена аналитически для ряда нетривиальных случаев [4]. Задача в формулировке [3] может быть обобщена на случай наличия между частицами гравитационного притяжения при постоянстве плотности газа по объему облака [5]. В этой работе методами качественной теории дифференциальных уравнений проведено подробное исследование возможных переходов эллипсоида между состояниями, определяемыми набором особых точек соответствующей системы уравнений. Так, в указанной работе при помощи решения [6] задачи о движении пылевого гравитирующего облака и решений на подмногообразиях с фиксированными значениями некоторых переменных исследованы движения, соответствующие колебательному разлету эллипсоида, представляющему интерес для астрофизики. Случай, когда между частицами имеется не притяжение, а отталкивание, соответствует движению облака газа, частицы которого заряжены одноименно. Такая задача возникает в плазмифизике, а также в соответствующих разделах астрофизики, в частности при рассмотрении процессов вблизи ядер активных космических объектов — сейфертовских галактик, квазаров.

Исходными при рассмотрении движения газа являются уравнения неразрывности и импульса

$$(1) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho \frac{q}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

и соотношение для потенциала, создаваемого равномерно заряженным по объему эллипсоидом, во внутренних точках эллипсоида

$$(2) \quad \Phi = \frac{\alpha_2 m}{2q} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x_1'^2}{d_1^2 + s} - \frac{x_2'^2}{d_2^2 + s} - \frac{x_3'^2}{d_3^2 + s} \right) \times \\ \times \frac{ds}{[(d_1^2 + s)(d_2^2 + s)(d_3^2 + s)]^{1/2}}$$

Здесь d_i — полуоси газового эллипсоида, α_2 — коэффициент, зависящий от плотности заряда облака, q , m — заряд и масса частиц газа соответственно, x_i' — координаты точки в системе координат, оси которой совпадают с направлением полуосей.

Предположим, что плотность газа постоянна по объему облака вплоть до его границы, а температура и давление являются квадратичными функциями координат с максимумом в центре облака. Газ считаем идеальным, процесс расширения (сжатия) — адиабатическим с показателем адиабаты γ , т. е. $d(P/\rho^\gamma)/dt = 0$. Газовые частицы обладают одноименным зарядом равной величины, создающим макроскопическое поле облака; будем считать, что это не приводит к необходимости учета в локальном термодинамическом описании отклонения газа от идеальности, т. е. выполняется условие $n \ll (kT/q^2)^3$, где n — плотность числа частиц, k — постоянная Больцмана, T — температура газа. Предполагается, что при движении газа справедливо соотношение

$$(3) \quad x_i = \sum_k F_{ik} a_k$$

Здесь x_i — декартовы координаты участков газа, a_k — лагранжевы координаты, F_{ik} — функции времени. Из (1) — (3) получаем систему уравнений

$$(4) \quad \begin{aligned} F_{ik}'' &= \alpha_1 (\gamma - 1) F_{ki}^{-1} + \\ &+ \alpha_2 \int_0^\infty \sum_n \left(\frac{L_{1i} L_{1n}}{d_1^2 + s} + \frac{L_{2i} L_{2n}}{d_2^2 + s} + \frac{L_{3i} L_{3n}}{d_3^2 + s} \right) \times \\ &\times \frac{F_{nk} ds}{[(d_1^2 + s)(d_2^2 + s)(d_3^2 + s)]^{1/2}} \\ P &= \frac{3M(\gamma - 1)(1 - a^2/a_0^2) W \varphi_0^{\gamma-1}}{4\pi a_0^3 \varphi^\gamma}, \quad \varphi = \det \| F_{ik} \| \\ \varphi_0 &= \varphi(t=0), \quad \rho = \frac{3M}{4\pi a_0^3 \varphi}, \quad \alpha_1 = \frac{2W \varphi_0^{\gamma-1}}{a_0^2}, \\ \alpha_2 &= 2\pi \rho_0 \varphi_0 a_0^3 \left(\frac{q}{m} \right)^2 \end{aligned}$$

Здесь L_{ik} — матрица поворота, совмещающего оси системы координат с направлением полуосей эллипсоида, M — масса газового облака, W — удельная энергия газа в начальный момент времени в центре облака. При выводе уравнений (4) использовано первое начало термодинамики и они могут быть записаны в форме уравнений Гамильтона — Якоби, где гамильтониан определен выражением

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_i p_i^2 + \alpha_1 V(q)^{1-\gamma} + \alpha_2 U(q) \\ \{p_i\} &= \{F_{ik}\}, \quad \{q_i\} = \{F_{ik}\}, \quad V(q) = \varphi(F_{ik}) \\ U(q) &= \int_0^\infty \frac{ds}{[(d_1^2 + s)(d_2^2 + s)(d_3^2 + s)]^{1/2}} \end{aligned}$$

Для анализа решений полученной системы уравнений (4) применим метод качественной теории дифференциальных уравнений. Гамильтониан рассматриваемой системы всегда положителен и не существует решений поставленной задачи с отрицательной энергией. В координатах W_1 :

$$p_i^* = \frac{p_i}{(\alpha_1 V(q)^{1-\gamma} + \alpha_2 U(q))^{1/2}}, \quad u = \frac{U(q)}{\alpha_1 \alpha_2^{-1} V(q)^{1-\gamma} + U(q)}$$

$$y_i = \frac{q_i}{q_0}, \quad \frac{d\tau_1}{dt} = \frac{(\alpha_1 V(q)^{1-\gamma} + \alpha_2 U(q))^{1/2}}{q_0 V(q)}, \quad q_0 = \left(\sum_k q_k^2 \right)^{1/2}$$

система уравнений (4) принимает вид

$$5) \quad \frac{dy_i}{d\tau_1} = V \left(p_i^* - y_i \sum_k y_k p_k^* \right)$$

$$\frac{du}{d\tau_1} = u(1-u) \sum_i p_i^* \left[\frac{V}{U} \frac{\partial U}{\partial y_i} + (\gamma - 1) \frac{\partial V}{\partial y_i} \right]$$

$$\frac{dp_i^*}{d\tau_1} = \sum_k \left(\delta_{ik} + \frac{p_i^* p_k^*}{2} \right) \left[(\gamma - 1)(1-u) \frac{\partial V}{\partial y_k} - u \frac{V}{U} \frac{\partial U}{\partial y_k} \right]$$

В координатах W_2 :

$$P_i = \frac{p_i}{p_0}, \quad u = \frac{U(q)}{\alpha_1 \alpha_2^{-1} V(q)^{1-\gamma} + U(q)}, \quad y_i = \frac{q_i}{q_0}$$

$$w = \frac{\alpha_1 V(q)^{1-\gamma} + \alpha_2 U(q)}{p_0^2}, \quad \frac{d\tau_2}{dt} = \frac{p_0}{q_0 V(y)}, \quad p_0 = \left(\sum_k p_k^2 \right)^{1/2}$$

система уравнений (4) приобретает вид

$$6) \quad \frac{dy_i}{d\tau_2} = V \left(P_i - y_i \sum_k y_k P_k \right)$$

$$\frac{du}{d\tau_2} = u(1-u) \sum_k P_k \left[\frac{V}{U} \frac{\partial U}{\partial y_k} + (\gamma - 1) \frac{\partial V}{\partial y_k} \right]$$

$$\frac{dw}{d\tau_2} = w(1+2w) \sum_k P_k \left[(1-\gamma)(1-u) \frac{\partial V}{\partial y_k} + u \frac{V}{U} \frac{\partial U}{\partial y_k} \right]$$

$$\frac{dP_i}{d\tau_2} = w \sum_k (\delta_{ik} - P_i P_k) \left[(\gamma - 1)(1-u) \frac{\partial V}{\partial y_k} - u \frac{V}{U} \frac{\partial U}{\partial y_k} \right]$$

Введем обозначения

$$V_p^* = \sum_i p_i^* \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad \varepsilon = \text{sgn}(V_p^*)$$

Проанализируем особые точки систем (5) и (6), сохранив для них обозначения¹. Условие $V = 0$, $u = 1$ определяет особые точки K_ε . При $V = 0$ имеется значительное различие размеров осей эллипсоида. Условие $u = 1$ соответствует большому объему облака или значительному превышению потенциальной энергии в электрическом поле над энергией теплового движения частиц. Случай положительного знака ε

¹ Богоявленский О. И. Колебательный режим расширения газового облака в вакуум.— Препринт Ин-та теоретической физики АН СССР, Черноголовка, 1975. 21 с.

соответствует увеличению объема облака, а при отрицательном знаке ε происходит уменьшение объема. Точки K_{-1} имеют входящую сепаратрису, для которой $u = 1$, и выходящую, для которой $V = 0$. Изменение знака ε приводит к превращению входящей сепаратрисы в выходящую и наоборот. Физически очевидно, что рассматриваемая система с отталкиванием не может перейти от расширения к сжатию, поэтому возможно только одно звено переходов $K_{-1} \rightarrow K_1$, которое после первого своего появления больше не повторяется. Рассмотрим только ненулевые собственные значения особых точек. Для точек K_ε имеются два собственных числа вида V_p^* , $(1 - \gamma) V_p^*$, которым и соответствуют указанные сепаратрисы.

Введем обозначения:

$$V_p = \sum_i P_i \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad \beta = \text{sgn}(V_p)$$

В координатах W_2 имеются физически интересные особые точки $M_{0,\beta}$, $M_{1,\beta}$, $N_{0,\beta}$, $N_{1,\beta}$. Особые точки $N_{1,\beta}$ ($V = 0$, $u = 1$, $w = 0$) имеют два отличных от нуля собственных числа: $(1 - \gamma) V_p$, V_p . Случай $w = 0$ соответствует значительному превышению кинетической энергии движения газа над потенциальной энергией в электрическом поле и энергией теплового движения частиц, что возможно при инерционном бесконечном разлете или при начальном движении газа с отличной от нуля скоростью к центру из бесконечности. Знаки этих собственных чисел противоположны. Для $\beta = 1$ имеем входящую сепаратрису с λ_1 и выходящую сепаратрису с λ_2 . При $\beta = -1$ входящая и выходящая сепаратрисы меняются местами. При λ_1 имеем $V = 0$, $w = 0$, при λ_2 — $u = 1$, $w = 0$.

Особые точки $N_{0,\beta}$ ($w = 0$, $u = 0$, $V = 0$) имеют собственные значения $(\gamma - 1) V_p$, $(1 - \gamma) V_p$, V_p . При $\beta > 0$ это дает одну входящую сепаратрису и две выходящих, при $\beta < 0$ наоборот. Условие $u = 0$ соответствует значительному превышению энергии теплового движения частиц над их энергией в электрическом поле либо очень малому значению объема облака. Для сепаратрисы с первым собственным значением $w = 0$, $V = 0$, для второй $u = 0$, $V = 0$, для третьей $w = 0$, $u = 0$.

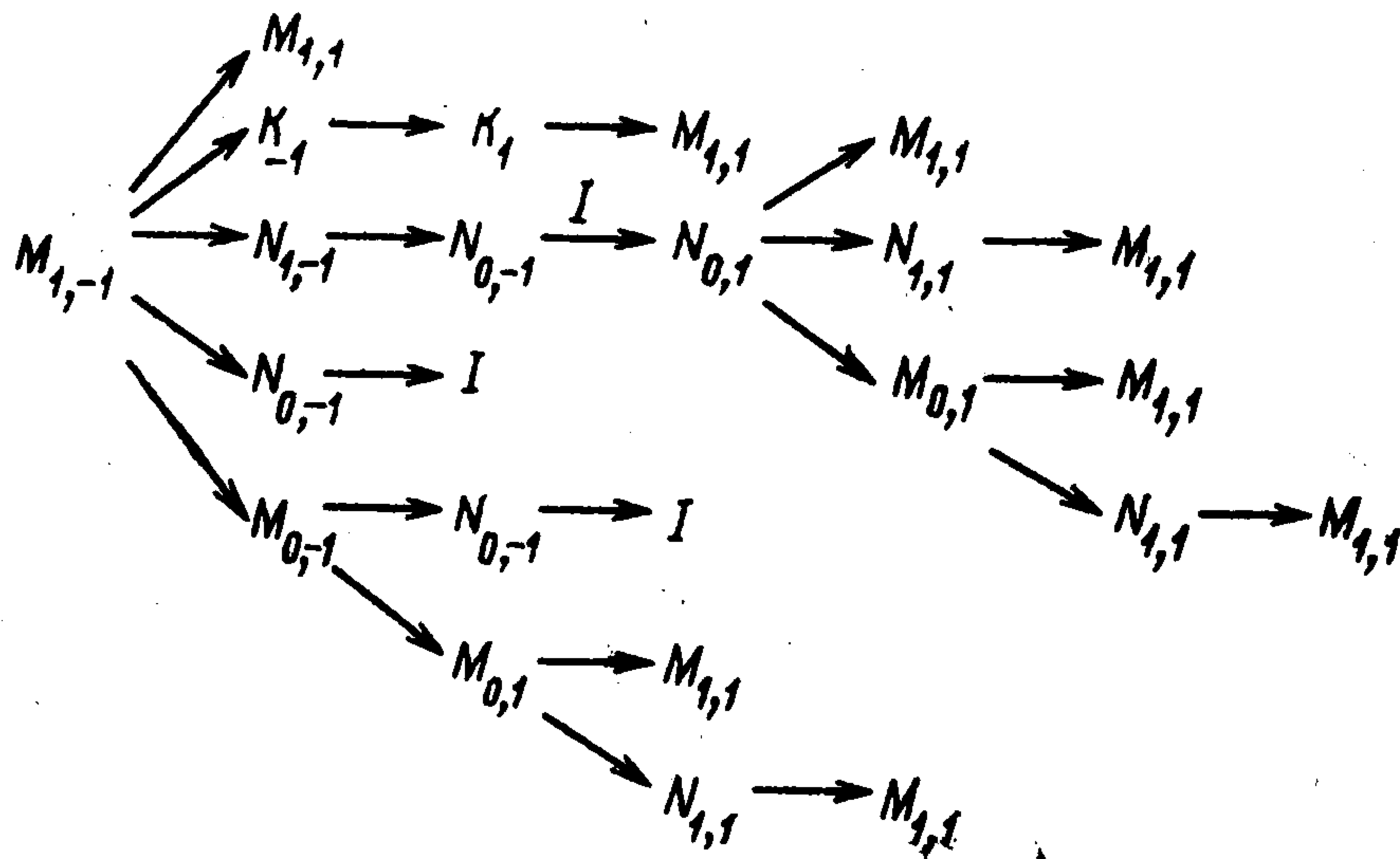
Особые точки $M_{0,\beta}$ ($P_i = \beta y_i$, $w = 0$, $u = 0$) имеют собственные значения: $-3(\gamma - 1)\beta V$, $(3\gamma - 4)\beta V$, $-\beta V$, $-2\beta V$. При условии $P_i = \beta y_i$ макроскопическое вращательное движение газа отсутствует. Набор собственных значений таков, что имеются как входящие, так и выходящие сепаратрисы. При $\gamma > 4/3$ $M_{0,1}$ имеет одну входящую сепаратрису, а $M_{0,-1}$ — одну выходящую. При $\gamma < 4/3$ $M_{0,1}$ не имеет выходящих сепаратрис и является притягивающей, а $M_{0,-1}$ не имеет входящих сепаратрис и является отталкивающей. Имеющаяся входящая сепаратрису точки $M_{0,1}$ при $\gamma > 4/3$ осуществляется при $P_i = \beta y_i$, $w = 0$.

Особые точки $M_{1,\beta}$ ($P_i = \beta y_i$, $w = 0$, $u = 1$) имеют собственные значения $\beta V(4 - 3\gamma)$, $-\beta V$, $-2\beta V$. При $\gamma > 4/3$ точка $M_{1,1}$ не имеет выходящих сепаратрис и является притягивающей, а $M_{1,-1}$ не имеет входящих сепаратрис и является отталкивающей. При $\gamma < 4/3$ точка $M_{1,1}$

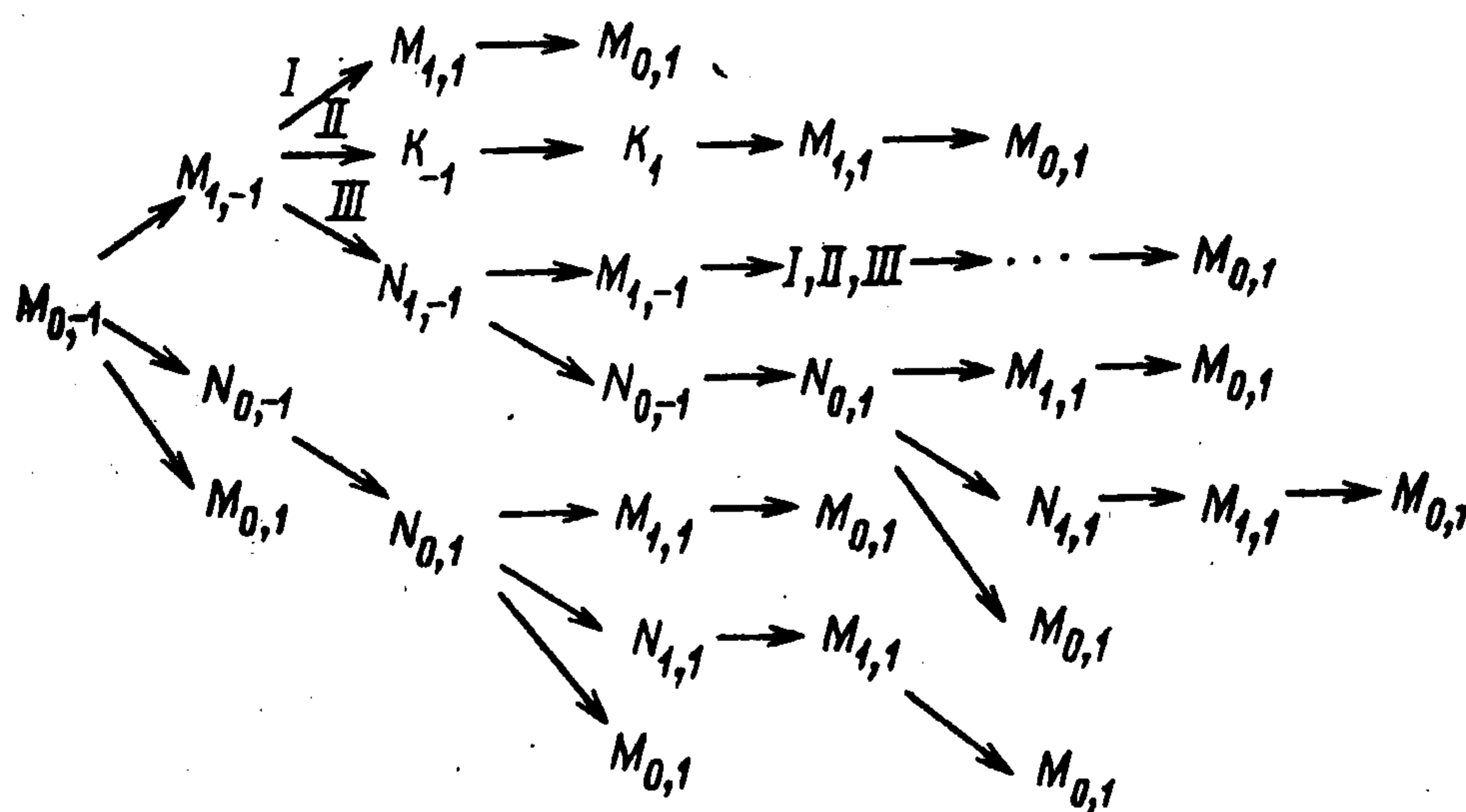
имеет одну выходящую, а точка $M_{1,-1}$ одну входящую сепаратрисы. Для этих сепаратрис $w = 0$, $P_i = \beta y_i$. Таким образом при переходе через значение $\gamma = 4/3$ роль точек $M_{1,\beta}$ и $M_{0,\beta}$ взаимно меняется. Точки $M_{1,1}$ соответствуют более или менее равномерному разлету по всем трем осям, а точки $M_{0,1}$ отвечают разлету со значительной эллипсностью.

Решение систем уравнений на подмногообразиях $V = 0$, $w = 0$ ($u = 0$, $V = 0$) может быть проведено аналогично². Решение на подмногообразии $u = 1$ должно соответствовать разлету пылевого заряженного облака. Для такой системы справедливо свойство невозможности перехода от расширения к сжатию, поскольку нет сил, которые приводили бы газ к повторному движению к центру.

Приведем возможные переходы между особыми точками системы по сепаратрисам. Схема переходов в случае $\gamma > 4/3$ приведена на фиг. 1.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для этой схемы характерно то, что она не содержит повторяющихся звеньев. Движение может начаться с любого места схемы, но заканчивается всегда в точках $M_{1,1}$.

При $\gamma < 4/3$ схема возможных переходов приведена на фиг. 2. В этом случае возможно циклическое повторение звена $M_{1,-1} \rightarrow N_{1,-1}$ схемы, т. е.

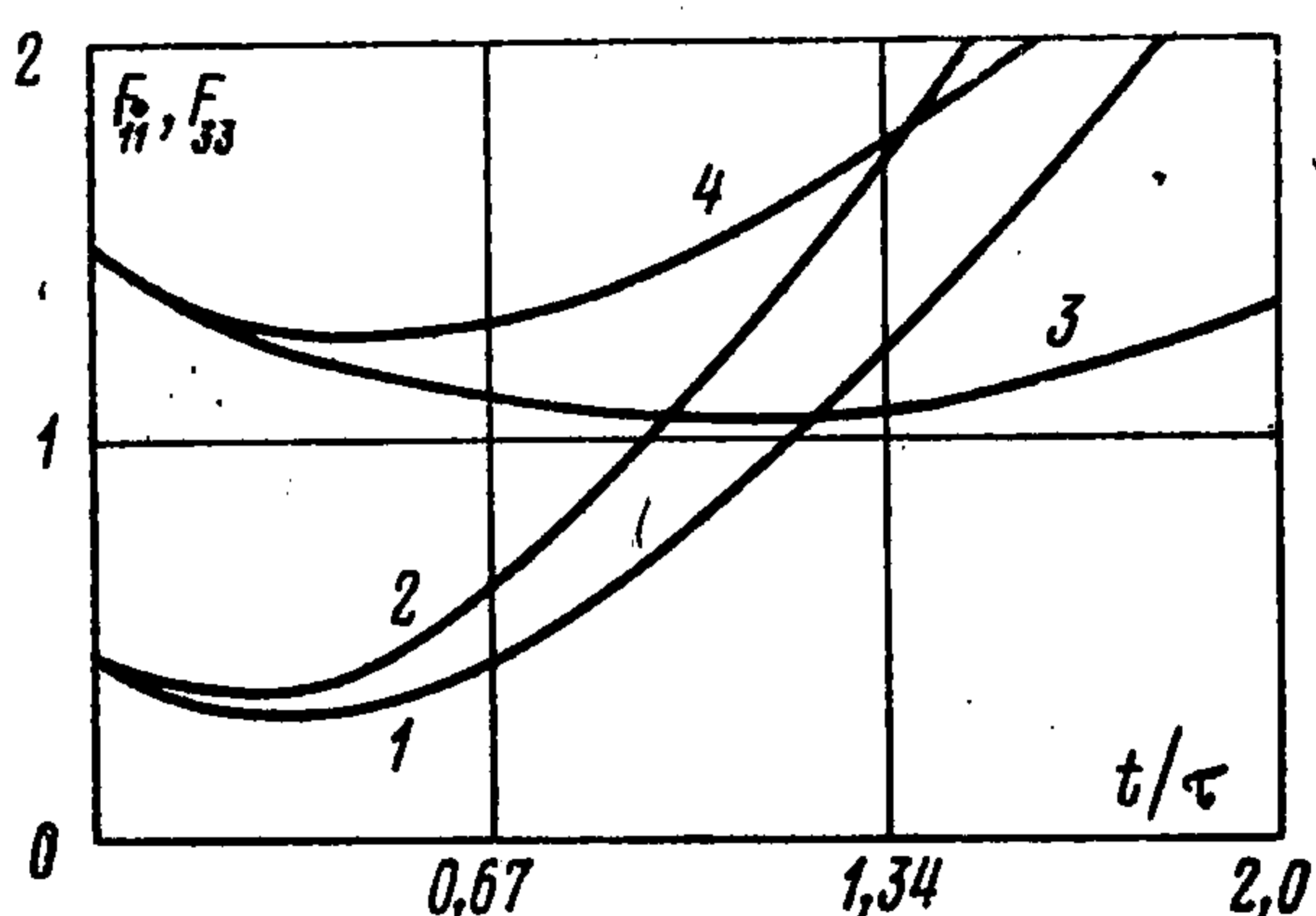
² Богоявленский О. И. См. указ. раб. с. 1058.

возможен квазипериодический процесс переходов между ситуациями с малой и большой эллипсностью при сжатии.

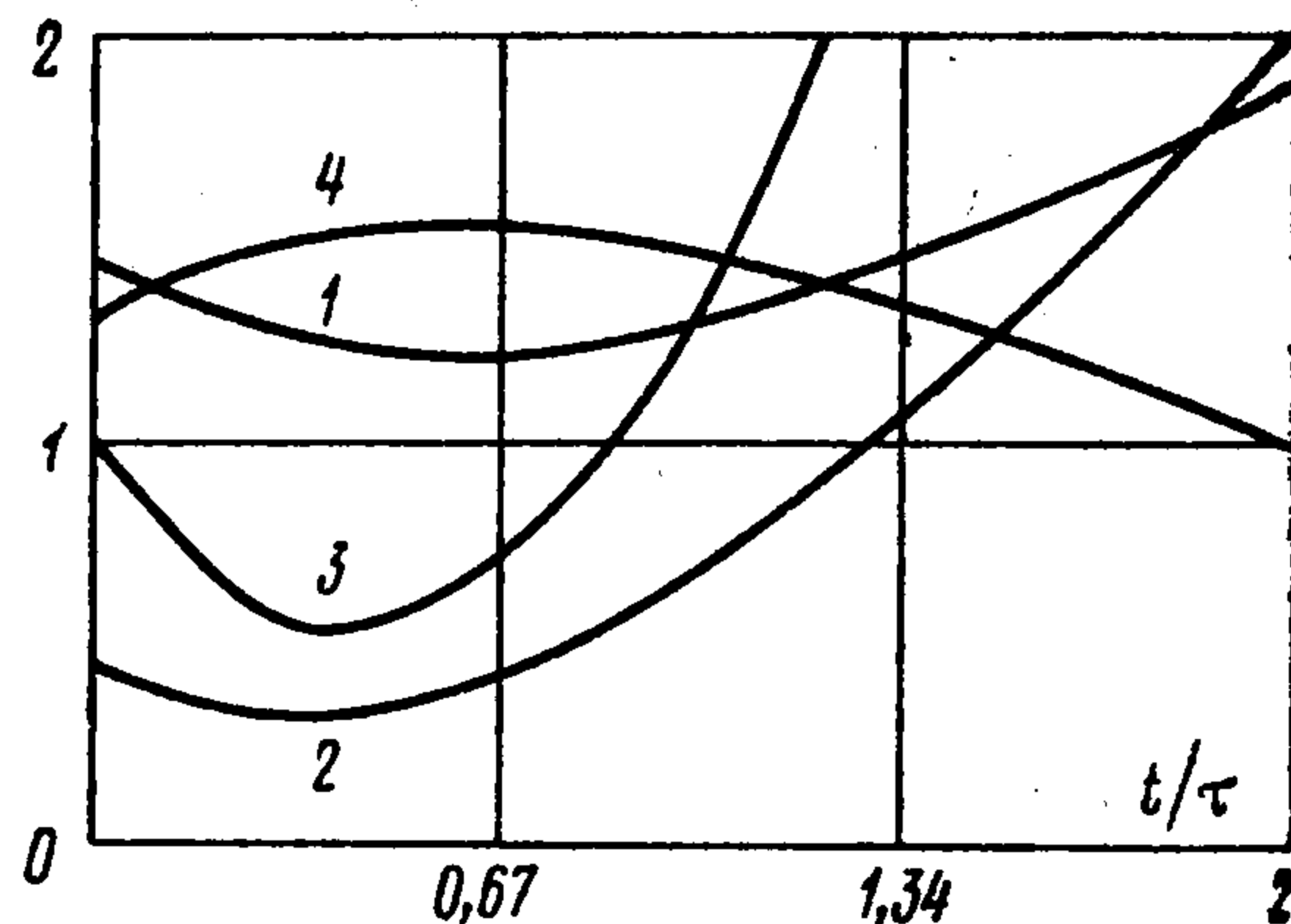
Поведение решений рассматриваемой модели проиллюстрируем на численных примерах. Рассмотрим эллипсоид вращения, не вращающийся или вращающийся вокруг одной из осей (продольная ось эллипсоида). В этом случае матрица содержит только три различных элемента: $F_{11} = F_{22}$, F_{33} , $F_{12} = -F_{21}$. Для этих элементов систему дифференциальных уравнений запишем в виде

$$(7) \quad \begin{aligned} F_{11}'' &= \alpha_1 \frac{F_{22}F_{33}}{\varphi^\gamma} + \alpha_2 \int_0^\infty \frac{F_{11}ds}{(F_{11}^2 + F_{12}^2 + s)\psi} \\ F_{33}'' &= \alpha_1 \frac{F_{11}F_{22} + F_{12}^2}{\varphi^\gamma} + \alpha_2 \int_0^\infty \frac{F_{33}ds}{(F_{33}^2 + s)\psi} \\ F_{12}'' &= \alpha_1 \frac{F_{11}F_{33}}{\varphi^\gamma} + \alpha_2 \int_0^\infty \frac{F_{12}ds}{(F_{11}^2 + F_{12}^2 + s)\psi} \\ \varphi &= F_{33}(F_{11}F_{22} + F_{12}^2), \quad \psi = [(F_{11}^2 + F_{12}^2 + s)(F_{22}^2 + \\ &+ F_{12}^2 + s)(F_{33}^2 + s)]^{1/2} \end{aligned}$$

Когда вращение отсутствует, при заданном начальном толчке к центру и двух разных значениях плотности заряда (величина α_2/α_1 изменяется при этом в 10 раз) поведение облака (зависимость полуосей от времени) изображено на фиг. 3. Здесь $\gamma = 5/3$, поэтому рассмотренный случай соответствует первой из двух приведенных диаграмм переходов. Фигура



Фиг. 3



Фиг. 4

3 демонстрирует уход системы в притягивающую точку $M_{1,1}$. По вертикальной оси откладываются значения величин F_{33} (кривые 1, 2) и F_{11} (кривые 3, 4), характеризующих размер продольной и поперечной полуосей соответственно. Переход от кривых 1, 3 к кривым 2, 4 происходит при 10-кратном увеличении плотности заряда. Видим, что при меньших плотностях заряда скорость расхождения размеров осей более велика (более интенсивный рост эллипсности наряду с общим ростом объема облака).

Поведение газа при вращении изображено на фиг. 4, параметры соответствуют кривым 1 и 3 на фиг. 3. По вертикальной оси откладываются в безразмерных величинах значения поперечной и продольной полуосей

(кривые 1, 2), отношение текущего объема эллипсоида к первоначальному (кривая 3), угловая скорость вращения (кривая 4). Переходы фиг. 4 также принадлежат первой из приведенных диаграмм. (близкой к рассматриваемой является цепочка переходов $K_{-1} \rightarrow K_1 \rightarrow M_{1,1}$). Отметим замедление роста эллипсности по сравнению со случаем без вращения.

Указанные свойства и приведенные схемы переходов представляют интерес при рассмотрении задачи об инерционном сжатии плазмы. Осуществление того или иного звена переходов определяется выбором начальных условий, что дает возможность варьировать ход превращений формы эллипсоида, причем наличие заряда приводит к большей сферичности газового облака. Интересным является свойство перехода от разлета с малой эллипсностью к разлету с большой эллипсностью при переходе от значений показателя адиабаты больших $4/3$ к значениям меньшим $4/3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. — Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 5, с. 735.
2. Лидов М. Л. Точные решения уравнений одномерных неустановившихся движений газа с учетом сил ньютоновского тяготения. — Докл. АН СССР, 1954, т. 97, № 3, с. 409.
3. Овсянников Л. В. Новое решение уравнений гидродинамики. — Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 1, с. 47.
4. Анисимов С. И., Лысков Ю. И. О расширении газового облака в вакуум. — ПММ, 1970, т. 34, вып. 5, с. 926.
5. Богоявленский О. И. Динамика гравитирующего газового эллипсоида. — ПММ, 1976, т. 40, вып. 2, с. 270.
6. Зельдович Я. Б. Ньютоновское и эйнштейновское движение однородного вещества. — Астрон. ж., 1964, т. 41, № 5, с. 873.

Ворошиловград

Поступила в редакцию
7.VII.1979