

УДК 533.6.12

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ВИБРАТОРЕ В ДОЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Терентьев Е. Д.

Изучается задача обтекания дозвуковым потоком плоской пластины с установленным на ней треугольным вибратором, совершающим гармонические колебания. Пластина и вибратор предполагаются теплоизолированными, размеры вибратора и частота колебаний таковы, что течение можно описать уравнениями пограничного слоя с самоиндуцированным давлением. Амплитуда колебаний предполагается малой, что позволяет линеаризовать эти уравнения. Для построения решения используется двойное преобразование Фурье по времени и продольной координате. Обратное преобразование находится с помощью численных методов. Проведено изучение для частот колебаний вибратора ω , меньших критической частоты ω_* , предсказываемой классической теорией устойчивости. Показано, что возмущения, вызванные вибратором, всегда быстро затухают вверх по потоку. Вниз по потоку быстрое затухание имеет место для ω , заметно меньших ω_* , чем ближе ω к ω_* , тем затухание происходит медленнее.

Рассмотрим обтекание теплоизолированного тела, состоящего из покоящейся пластины, переходящей в колеблющийся участок — вибратор и оканчивающегося неподвижной плоской пластиной. Пусть передняя часть имеет длину L^* , а задняя — длину $O(L^*)$ (звездочка означает размерные величины). Пусть невозмущенный набегающий поток — дозвуковой, с числом Маха M_∞ , меньшим единицы на конечную величину, и скоростью U_∞^* , направленной вдоль неподвижных частей тела. Индексами ∞ и w отметим параметры газа в невозмущенном стационарном потоке и на стенке. Используем декартову систему координат x, y с началом в точке соединения передней неподвижной части с колеблющейся частью. Обозначим через t^* время, v_x^*, v_y^* — составляющие вектора скорости, ρ^* — плотность, p^* — давление, T^* — температура, κ — отношение удельных теплоемкостей. Для простоты примем зависимость первого коэффициента вязкости от температуры локально линейной (для $T^* \sim T_w^*$); $\lambda_1^*/\lambda_{1\infty}^* = CT'$, где $T' = T^*/T_\infty^*$, а число Прандтля, равным единице. Вместо обратной величины числа Рейнольдса используем малый параметр $\varepsilon = Re_1^{-1/2}$ ($Re_1 = \rho_\infty^* U_\infty^* L^*/\lambda_{1\infty}^*$).

Выберем продольный размер вибратора $O(L^*\varepsilon^3)$, амплитуду колебаний $O(L^*\varepsilon^5)$, частоту $O(U_\infty^*/L^*\varepsilon^2)$. Для описания движения, вызванного таким вибратором, удобно выделить три характерные области [1, 2]: верхнюю, или внешнюю, — область дозвукового невязкого течения ($y_1^* = O(L^*\varepsilon^3)$), среднюю — обыкновенный пограничный слой ($y_2^* = O(L^*\varepsilon^4)$) и нижнюю — пограничный слой с самоиндуцированным

давлением ($y_3^* = O(L^*\varepsilon^5)$). Основные трудности в такой схеме связаны с построением решения в нижней области. Используя это решение, параметры течения в средней и верхней областях можно выписать в явном виде [1—5]. Ниже остановимся лишь на нижней области, где введем следующие зависимые и независимые переменные [4, 5]:

$$(1) \quad \begin{aligned} t^* &= L^* U_\infty^{*-1} \varepsilon^2 C^{1/4} \lambda^{-3/2} (1 - M_\infty^2)^{-1/4} T_w' t \\ x^* &= L^* \varepsilon^3 C^{3/8} \lambda^{-5/4} (1 - M_\infty^2)^{-3/8} T_w'^{3/2} x \\ y^* &= L^* \varepsilon^5 C^{5/8} \lambda^{-3/4} (1 - M_\infty^2)^{-1/8} T_w'^{3/2} y \\ v_x^* &= U_\infty^* \varepsilon C^{1/8} \lambda^{1/4} (1 - M_\infty^2)^{-1/8} T_w'^{1/2} u \\ v_y^* &= U_\infty^* \varepsilon^3 C^{3/8} \lambda^{3/4} (1 - M_\infty^2)^{1/8} T_w'^{1/2} v \\ p^* &= p_\infty^* + \rho_\infty^* U_\infty^{*2} \varepsilon^2 C^{1/4} \lambda^{1/2} (1 - M_\infty^2)^{-1/4} p \\ \rho^* &= \rho_\infty^* T_w' \rho. \end{aligned}$$

Используемая в формулах (1) постоянная $\lambda = 0,3321$ определяется равенством $L^* \text{Re}_1^{-1/2} \partial (v_x^* (L^*, 0) / U_\infty^*) / \partial y^* = \lambda C^{-1/2} T_w'$ по решению Блазиуса для невозмущенного пограничного слоя. Подставляя соотношения (1) в систему уравнений Навье — Стокса, сохраняя главные члены по ε и требуя выполнения условий сращивания при $x \rightarrow -\infty$ и $y \rightarrow \infty$, получим систему уравнений и предельные условия для нестационарного дозвукового пограничного слоя с самоиндуцированным давлением [4—5]:

$$(2) \quad \begin{aligned} \rho &= 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ x \rightarrow -\infty, \quad u &\rightarrow y, \quad p \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \infty, \quad u &\rightarrow y + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{x_1 - x_0} dx_1 dx_0 \end{aligned}$$

В последнем условии при $y \rightarrow \infty$ внутренний интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши. Будем также искать решение, стремящееся к решению для невозмущенного пограничного слоя при $x \rightarrow \infty$, что, как будет видно дальше, связано с ограничениями, накладываемыми на частоту колебаний вибратора.

На теле зададим условия прилипания

$$(3) \quad u(t, x, y_w(t, x)) = u_w, \quad v(t, x, y_w(t, x)) = v_w$$

Пусть колеблющаяся часть стенки, как и в задаче о вибраторе в сверхзвуковом пограничном слое [6], задана уравнением

$$(4) \quad y_w = \sigma f(t, x) = \sigma f_1(x) \cos \omega t, \quad \sigma \ll 1, \quad \omega > 0$$

где ω — безразмерная частота, а функция $f_1(x)$ задает треугольную форму с параметрами a и b ($f_1(x) = 0$ при $x \leq 0$, $2x$ при $0 \leq x \leq b$, $2b(a-x)/(a-b)$ при $b \leq x \leq a$, 0 при $x \geq a$). Малость параметра σ позволяет линеаризовать задачу (2), (3), разложив решение в ряд по степеням σ :

$$u = y + \sigma u_1 + \dots, \quad v = \sigma v_1 + \dots, \quad p = \sigma p_1 + \dots$$

Уравнения и предельные условия, определяемые из (2) и из условия при $x \rightarrow \infty$, имеют вид

$$(5) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + y \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$$

$$x_1 \rightarrow -\infty, \quad u_1 \rightarrow 0, \quad p_1 \rightarrow 0; \quad x \rightarrow \infty, \quad u_1 \rightarrow 0, \quad p_1 \rightarrow 0$$

$$y \rightarrow \infty, \quad u_1 \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_1(t, x_1)}{x_1 - x_0} dx_1 dx_0$$

Из условий прилипания (3) на стенке (4) при сохранении главных членов имеем

$$(6) \quad u_1(t, x, 0) = -f_1(x) \cos \omega t, \quad v_1(t, x, 0) = -f_1(x) \omega \sin \omega t$$

Для решения задачи (5), (6) используем преобразование Фурье

$$\bar{u}_1(\omega_1, \omega_2, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 t - i\omega_2 x} u_1(t, x, y) dt dx$$

Исключая из системы (5) v_1 и p_1 и переходя от u_1 к \bar{u}_1 , получим

$$\frac{\partial^3 \bar{u}_1}{\partial y^3} = (i\omega_2 y + i\omega_1) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию ограниченности \bar{u}_1 при $y \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} = B(\omega_1, \omega_2) \text{Ai}[(i\omega_2)^{1/3} y + i^{1/3} \omega_1 \omega_2^{-2/3}]$$

Здесь Ai — функция Эйри [7], $i = \exp(i\pi/2)$, $B(\omega_1, \omega_2)$ — произвольная функция своих аргументов. Предельные условия (5) и граничные условия (6) позволяют выразить $B(\omega_1, \omega_2)$ через $\bar{f}(\omega_1, \omega_2)$ и найти $\bar{p}_1(\omega_1, \omega_2)$, где \bar{f} и \bar{p} — фурье-преобразования $f(t, x)$ и $p_1(t, x)$ соответственно. Имеем (штрих означает производную от функции Эйри)

$$(7) \quad \bar{p}_1 = |\omega_2| \text{Ai}'(\Omega) \bar{f}(\omega_1, \omega_2) / Q(\Omega, \omega_2)$$

$$\Omega = \frac{i^{1/3} \omega_1}{\omega_2^{2/3}}, \quad I_0 = \int_0^{\infty} \text{Ai}(x) dx = \frac{1}{3}, \quad I_1(\Omega) = \int_0^{\Omega} \text{Ai}(z) dz$$

$$Q(\Omega, \omega_2) = -\text{Ai}'(\Omega) + i^{1/3} \omega_2^{1/3} |\omega_2| [I_0 - I_1(\Omega)]$$

Остановимся на вычислении давления. Выражение для p_1 определяется при помощи обратного преобразования Фурье. Проводя вычисления, аналогичные вычислениям в [6], получим

$$(8) \quad p_1 = \frac{1}{\pi} \cos \omega t \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re } \Phi d\omega_2 - \frac{1}{\pi} \sin \omega t \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im } \Phi d\omega_2$$

$$\Omega_1 = \frac{i^{1/3} \omega}{\omega_2^{2/3}}, \quad \Phi = -\frac{e^{i\omega_2 x}}{|\omega_2|} \left(1 - \frac{a}{a-b} e^{-i\omega_2 b} + \frac{b}{a-b} e^{-i\omega_2 a} \right) \text{Ai}'(\Omega_1) / Q(\Omega_1, \omega_2)$$

Для выделения однозначной ветви Φ на комплексной плоскости ω_2 проведем разрез от точки O вдоль мнимой оси (фиг. 1), т. е. $\pi/2 > \arg \omega_2 > -3\pi/2$. Если в формулах (8) устремить ω к нулю, а параметры a и b взять значительно большими единицы, то для $|x| = O(1)$ давление будет совпадать с давлением около покоящегося угла [8].

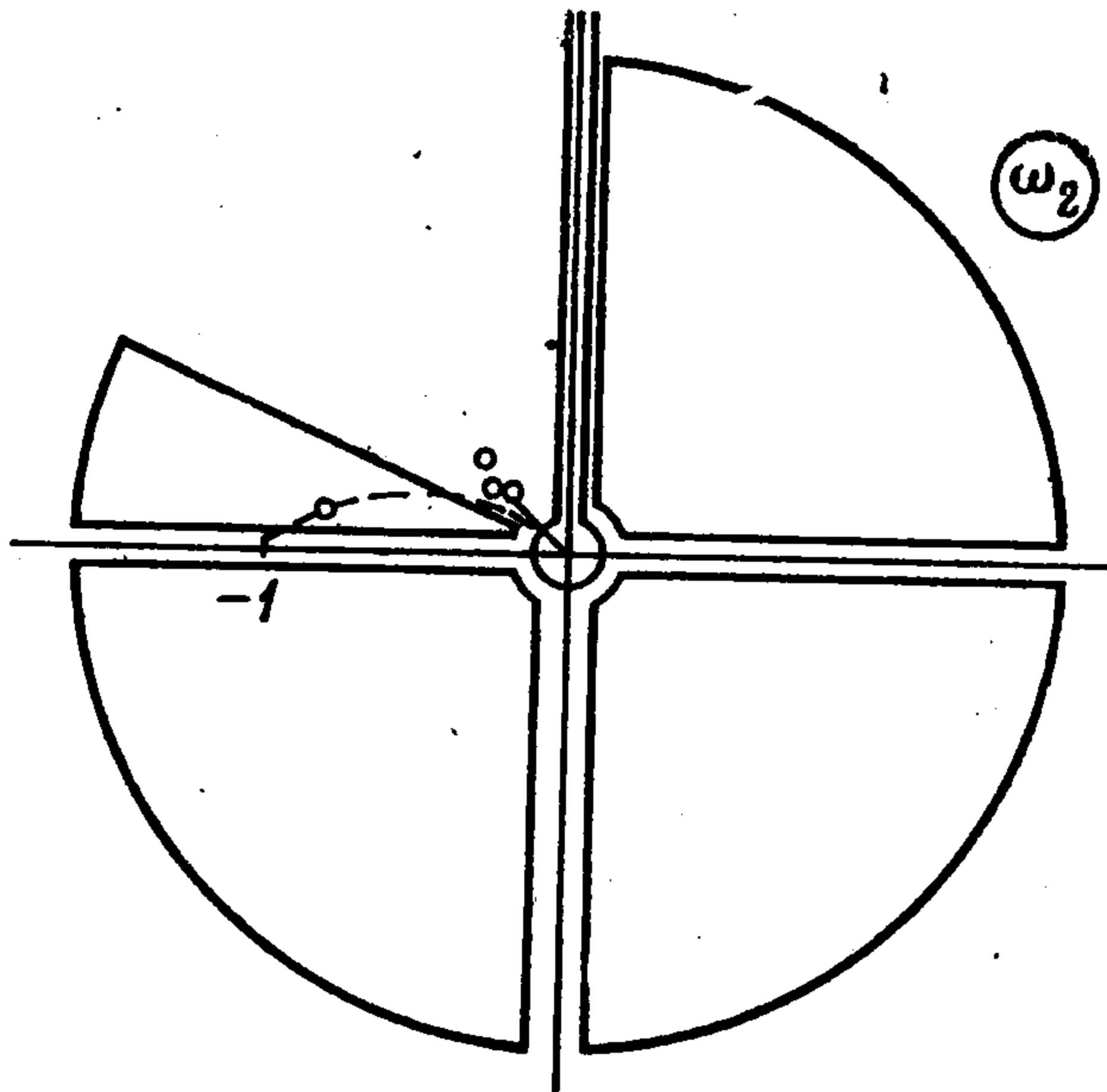
Как было показано в [9, 10], линейная теория устойчивости пограничного слоя по отношению к длинноволновым возмущениям и анализ малых возмущений в теории пограничного слоя с самоиндуцированным давлением при дозвуковом внешнем течении приводят к одинаковым результатам. Так, если, согласно введенным в настоящей работе обозначениям, частота $\omega < \omega_* \approx 2,298$, то возмущения при $x \rightarrow \infty$ затухают, при $\omega = \omega_*$ не затухают, а при $\omega > \omega_*$ растут с ростом x . Поскольку в предельном условии (5) при $x \rightarrow \infty$ требуется стремление искомым функций к нулю, что необходимо при использовании преобразования Фурье,

ограничимся диапазоном

$$(9) \quad 0 < \omega < \omega_* \approx 2,298$$

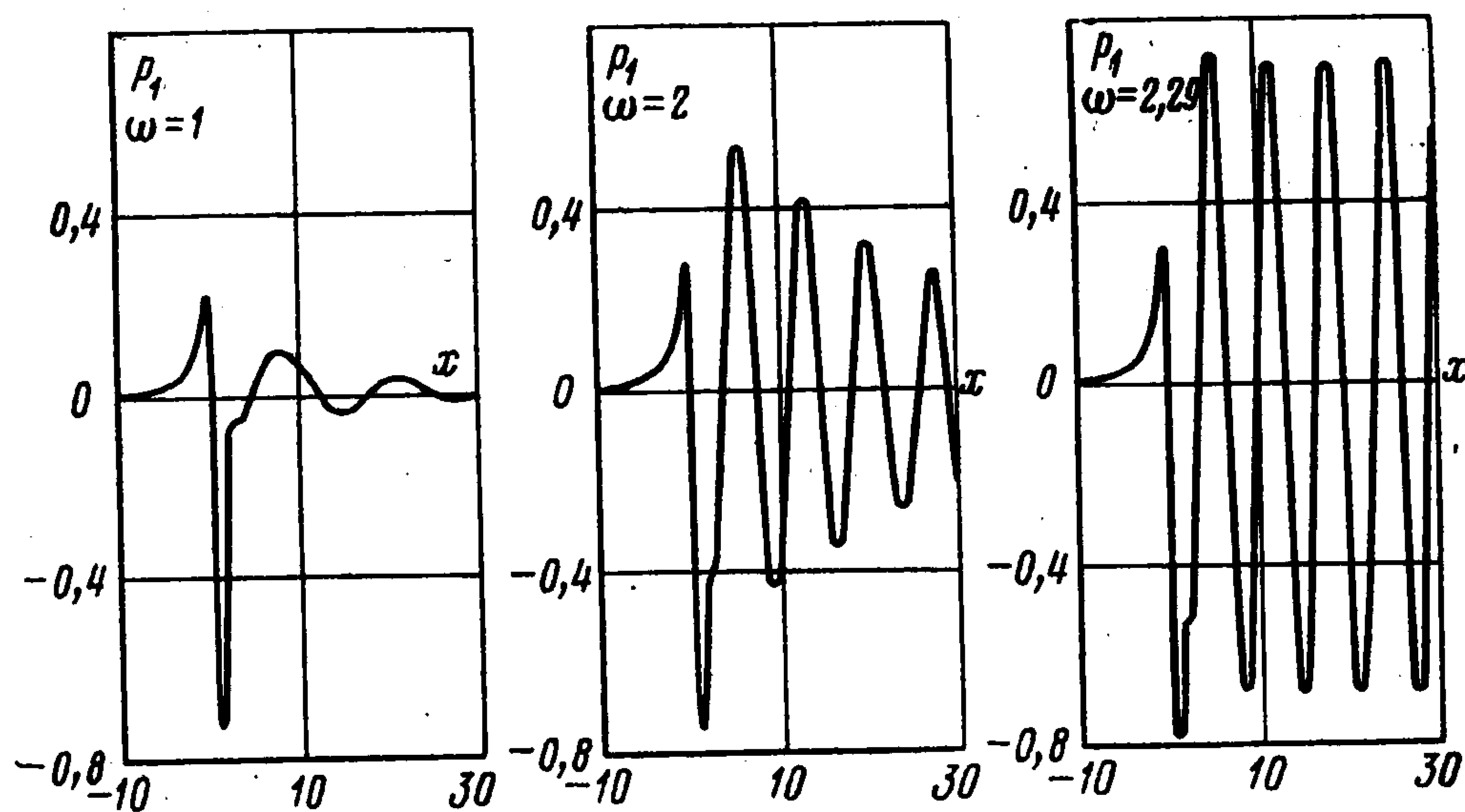
Хотя построенное решение (8) формально существует и для $\omega > \omega_*$, такие ω рассматривать не будем, поскольку вопрос о существовании установившегося колебательного (повремени) режима для таких ω требует особого изучения.

Очевидно, что интеграл от Φ существует для любых x , поскольку при $|\omega_2| \rightarrow \infty$ подынтегральная функция пропорциональна $|\omega_2|^{-7/2}$, при $|\omega_2| \rightarrow 0$ и $\arg \omega_2 = 0$; π подынтегральная функция ограничена, а неравенство (9) обеспечивает отсутствие действительных корней знаменателя [9, 10]. Основные сложности вычисления давления p_1 связаны с неаналитичностью функции Φ . Здесь не удастся, как в сверхзвуковом случае [11], представить результат вычислений в виде всюду сходящихся степенных рядов по $x^{1/2}$. Можно показать, что при дозвуковом внешнем течении даже в стационарном случае ($\omega = 0$) в рядах появятся логарифмические члены. Вычисление давления p_1 , заданного в (8), проведено в две стадии. Сначала найден интеграл от производной $d\Phi/dx$. Для этого проведено разбиение производной на три слагаемых, пропорциональных $\exp(i\omega_2 x_1)$ (где



Фиг. 1

сложности вычисления давления p_1 связаны с неаналитичностью функции Φ . Здесь не удастся, как в сверхзвуковом случае [11], представить результат вычислений в виде всюду сходящихся степенных рядов по $x^{1/2}$. Можно показать, что при дозвуковом внешнем течении даже в стационарном случае ($\omega = 0$) в рядах появятся логарифмические члены. Вычисление давления p_1 , заданного в (8), проведено в две стадии. Сначала найден интеграл от производной $d\Phi/dx$. Для этого проведено разбиение производной на три слагаемых, пропорциональных $\exp(i\omega_2 x_1)$ (где



Фиг. 2

$x_1 = x, x - b, x - a$), при вычислении интеграла от каждого слагаемого использовался наиболее удобный путь интегрирования: для $x_1 \leq 0$ — мнимая отрицательная полуось; для $x_1 > 0$ — мнимая положительная полуось; при $x_1 > 0$ приходилось также суммировать ряд, образованный вычетами подынтегральной функции. На второй стадии было проведено интегрирование по x и найдено давление p_1 .

На фиг. 2 приведены графики зависимости давления p_1 от x для треугольника с параметрами $b = 1, a = 2$, колеблющегося с частотами $\omega = 1; 2; 2,290$ для момента времени $t = 0$.

Рассмотрим асимптотическое поведение давления для больших x . Остановимся сначала на случае $x \rightarrow -\infty$. Представим интеграл от Φ в виде

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi d\omega_2 = I_2 + I_3, \quad I_2 = \int_{-\infty}^0 \Phi d\omega_2, \quad I_3 = \int_0^{\infty} \Phi d\omega_2$$

тогда в выражениях для I_2 и I_3 под знаками интегралов будут стоять аналитические функции. Для вычисления I_2 воспользуемся контуром (фиг. 1), лежащим в третьем квадранте и состоящим из отрезков $[-r, 0]$, $[0, -ir]$ и дуги окружности, соединяющей точки $-ir$ и $-r$. Внутри части комплексной плоскости, охватываемой указанным контуром, при любом $r > 0$ знаменатель подынтегрального выражения $Q(\Omega_1, \omega_2)$ для ω , удовлетворяющих неравенству (9), не имеет корней; интеграл по дуге окружности при $r \rightarrow \infty$ стремится к нулю ($x < 0$), поэтому интегрирование вдоль действительной оси в I_2 (10) можно, согласно теореме Коши, заменить на интегрирование вдоль мнимой оси от $\infty \exp(-i\pi/2)$ до 0. При аналогичном преобразовании I_3 воспользуемся контуром, симметричным контуру для I_2 относительно мнимой оси. Проводя далее преобразования, связанные с заменой $\omega_2 = \omega_3 \exp(-i\pi/2)$, имеем при $x \rightarrow -\infty$:

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi d\omega_2 \sim ab \left\{ x^{-2} + \frac{2}{3}(a+b)x^{-3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(a^2 + ab + b^2)x^{-4} + \frac{2}{5}(a+b)(a^2 + b^2)x^{-5} + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{3}(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + 120\omega^{-2} \right] x^{-6} + \dots \right\}$$

Из формулы (11) видно, что асимптотика не является равномерной по ω : при $\omega \rightarrow 0$ коэффициент в пятом члене разложения стремится к бесконечности. Изучение асимптотики в стационарном течении ($\omega = 0$) показывает, что при $x \rightarrow -\infty$ первые три члена будут такими же, как и в (11), а четвертый член — пропорционален $(-x)^{-14/3}$.

Рассмотрим асимптотику давления при $x \rightarrow \infty$. Для оценки интеграла I_2 (10) изучим подынтегральное выражение во втором квадранте, здесь знаменатель подынтегрального выражения $Q(\Omega_1, \omega_2)$ имеет бесконечное счетное множество корней. Хотя положение корней и зависит от ω , все они, кроме одного — первого, расположены около луча $\omega_2 = |\omega_2| \exp(-5i\pi/4)$ и имеют точку сгущения $\omega_2 = 0$ (фиг. 1). Первый же корень ω_{21} при возрастании ω от 0 до ω_* отходит от луча $\omega_2 = |\omega_2| \exp(-5i\pi/4)$ и попадает на вещественную ось $\omega_{21}(\omega_*) = -1,0005$. Его траектория изображена на фиг. 1 штриховой линией. Анализ корней показывает, что для ω из диапазона (9) из начала координат можно провести луч под таким углом $\alpha(\omega)$ ($-\pi > \alpha > -5\pi/4$), что первый корень будет лежать с одной стороны от луча, а все другие — с другой. Выберем контур, лежащий во втором квадранте и состоящий из отрезков $[-r, 0]$, $[0, r \exp(i\alpha)]$ и дуги окружности, соединяющей точки $-r$ и $r \exp(i\alpha)$ (фиг. 1). Внутри такого контура находится один полюс

первого порядка подынтегрального выражения I_2 , а интеграл по дуге окружности при $r \rightarrow \infty$ и $x > a$ стремится к нулю. Применяя теорему Коши о вычетах и вводя в интеграле по лучу замену переменных $\omega_2 = \omega_3 \exp(i\alpha)$, а также $\alpha_1 = -\pi - \alpha$ ($0 < \alpha_1 < \pi/4$), запишем

$$(12) \quad I_2 = 2\pi i \operatorname{res} \Phi(\omega, \omega_{21}(\omega), x, b, a) + \\ + \int_0^\infty \frac{e^{\varphi_1(x)}}{\omega_3} \left(1 - \frac{a}{a-b} e^{-\varphi_1(b)} + \frac{b}{a-b} e^{-\varphi_1(a)} \right) \operatorname{Ai}'(\Omega_3) \times \\ \times [\operatorname{Ai}'(\Omega_3) + (-7 \exp i\pi/6 - 4i\alpha_1/3) \omega_3^{4/3} (I_0 - I_1(\Omega_3))]^{-1} d\omega_3 \\ 2\pi i \operatorname{res} \Phi(\omega, \omega_{21}(\omega), x, b, a) = B_1(\omega, \omega_{21}(\omega), b, a) \times \\ \times \exp(i\omega_{21}(\omega)x) \\ B_1 = -3\pi e^{i\pi/3} \omega_{21}^{-4/3} \left(1 - \frac{a}{a-b} e^{-i\omega_{21}b} + \frac{b}{a-b} e^{-i\omega_{21}a} \right) \operatorname{Ai}'(\Omega_{11}) \times \\ \times [2(I_0 - I_1(\Omega_{11})) + \Omega_{11}(1 - \omega/\omega_{21}^2) \operatorname{Ai}(\Omega_{11})]^{-1}, \\ \Omega_{11} = i^{1/3} \omega \omega_{21}^{-2/3} \\ \varphi_1(x) = -\omega_3 x \sin \alpha_1 - i\omega_3 x \cos \alpha_1, \quad \Omega_3 = \\ = \omega \omega_3^{-2/3} \exp(5i\pi/6 + 2i\alpha_1/3)$$

Для оценки интеграла I_3 изучим подынтегральное выражение в первом квадранте, здесь знаменатель подынтегрального выражения $Q(\Omega_1, \omega_2)$ не имеет корней. Выберем контур, состоящий из отрезков $[r \exp(i\pi/2), 0]$, $[0, r]$ и дуги окружности, соединяющей точки r и $r \exp(i\pi/2)$. Поскольку интеграл по дуге окружности стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$, заключаем, что верхний предел интегрирования в I_3 может быть заменен на $\infty \exp(i\pi/2)$, а в качестве пути интегрирования выбрана мнимая ось. Вводя в таком интеграле замену переменных $\omega_2 = \omega_3 \exp(i\pi/2)$, получим

$$(13) \quad I_3 = \int_0^\infty \frac{1}{\omega_3} e^{-\omega_3 x} \left(1 - \frac{a}{a-b} e^{\omega_3 b} + \frac{b}{a-b} e^{\omega_3 a} \right) \operatorname{Ai}'(\Omega_4) \times \\ \times [\operatorname{Ai}'(\Omega_4) - i^{1/3} \omega_3^{4/3} (I_0 - I_1(\Omega_4))]^{-1} d\omega_3, \quad \Omega_4 = i^{-1/3} \omega \omega_3^{-2/3}$$

Как интеграл I_2 из (12), так и I_3 из (13) приведены к форме, удобной для применения леммы Лапласа [12]. В записи асимптотики при $x \rightarrow \infty$, сохранив еще и член, порожденный полюсом Φ , имеем

$$(14) \quad \int_{-\infty}^\infty \Phi d\omega_2 \sim ab \left\{ x^{-2} + \frac{2}{3} (a+b) x^{-3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (a^2 + ab + b^2) x^{-4} + \frac{2}{5} (a+b) (a^2 + b^2) x^{-5} + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{3} (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + 120\omega^{-2} \right] x^{-6} \right\} + B_1 e^{i\omega_{21}(\omega)x}$$

Асимптотика (14) с точностью до приведенных степенных членов совпадает с асимптотикой (11) и является неравномерной по ω . Так, при $\omega \rightarrow 0$ коэффициент в пятом члене разложения стремится к бесконечности. Изучение асимптотики в стационарном течении ($\omega = 0$) показывает, что при $x \rightarrow \infty$ лишь первые два члена будут такими же, как и в (14), а третий член пропорционален $x^{-10/3}$. При больших x и $\omega \rightarrow \omega_*$

($\omega < \omega_*$) определяющим в (14) будет экспоненциальный член, поскольку при этом $\text{Im } \omega_{21} \rightarrow 0$ (заметим, что аналогичного члена в разложении (11) нет).

Построенное решение описывает возмущения в пограничном слое, вызванные колеблющимся вибратором. При приближении частоты колебаний ω к критической ω_* , предсказываемой классической теорией устойчивости, вниз по потоку устанавливаются колебания, затухающие тем медленнее, чем ближе ω к ω_* (фиг. 2), причем закон затухания ($\exp(-x \text{Im } \omega_{21}(\omega))$) зависит только от частоты ω . Исходная амплитуда колебаний задается постоянной B_1 , зависящей от конкретной формы и размеров осциллятора a и b . Вверх по потоку ($x < 0$) влияние близости ω к ω_* никак не сказывается (фиг. 2, $\omega = 2,29$).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4, с. 53—57.
2. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate. II. — *Mathematika*, 1969, v. 16, pt. 1, No. 31, p. 106—121.
3. Schneider W. Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers. — *J. Fluid Mech.*, 1974, v. 63, pt. 3, p. 465—485.
4. Рыжов О. С. Уравнение нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением. — Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 4, с. 780—783.
5. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 6, с. 1007—1023.
6. Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением около колеблющейся стенки в сверхзвуковом потоке. — Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 5, с. 1046—1049.
7. Фок В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 80 с.
8. Stewartson K. On laminar boundary layers near corners. — *Quart. J. Mech. App. Math.*, 1970, v. 23, pt. 2, p. 137—152.
9. Smith F. T. On the nonparallel flow stability of the Blasius boundary layer. — *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, 1979, v. 366, No. 1724, p. 91—109.
10. Жук В. И., Рыжов О. С. Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости. — Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 6, с. 1326—1329.
11. Терентьев Е. Д. Расчет давления в линейной задаче о вибраторе в сверхзвуковом пограничном слое. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 6, с. 1014—1028.
12. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.; Физматгиз, 1962. 200 с.