

УДК 532.527

ФОРМИРОВАНИЕ СТРУИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ИСТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ ЩЕЛИ

Бетяев С. К.

Дается математическая постановка задачи об истечении идеальной жидкости из щели между двумя параллельными плоскостями как в случае затопленной струи, так и в случае истечения со свободной границей. Предлагается классификация схем течения. Результаты численного решения сравниваются с экспериментом. Обсуждается явление реверса вихревой пелены, происходящее при уменьшении расхода жидкости через щель. Автомоделная задача решается методом сращивания асимптотических разложений. Обнаружен кумулятивный эффект: скорость проникания узкой центральной части автомоделной струи превосходит по порядку величины скорость основной части струи.

1. Расход жидкости через щель Q и ширину щели $2l$ будем считать достаточно произвольными функциями времени t . Для отбора единственного решения необходимо потребовать выполнения условия Чаплыгина — Жуковского о конечности скорости на острых краях щели $x = \pm l(t)$, $y = 0$. Поскольку частицы жидкости, прошедшие через кромки, приобретут завихренность, с кромок будет сходиться линия тангенциального разрыва скорости — вихревая пелена, образующая фронт струи. Считается, что такие обобщенные решения уравнений Эйлера с разрывами гидродинамических функций на вихревой пелене представляют собой предельную форму ламинарного течения вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса.

Схема течения существенно зависит от начальных данных. Будем рассматривать движение из состояния покоя. Если в начальный момент времени $t = 0$ щель была закрыта, т. е. $l(0) = 0$, то возможна схема течения, когда все частицы жидкости, образующие фронт струи, пройдут через кромки щели и приобретут завихренность (фиг. 1). Если $l(0) \neq 0$, то частицы, образующие при $t = 0$ линию контакта между жидкостями, расположенными в верхней и нижней полуплоскости, в соответствии с теоремой Лагранжа останутся незавихренными (штриховая линия на фиг. 2); фронт струи будет иметь грибовидную форму со свернутыми в две спирали свободными концами вихревой пелены (сплошные линии на фиг. 2, $t > 0$).

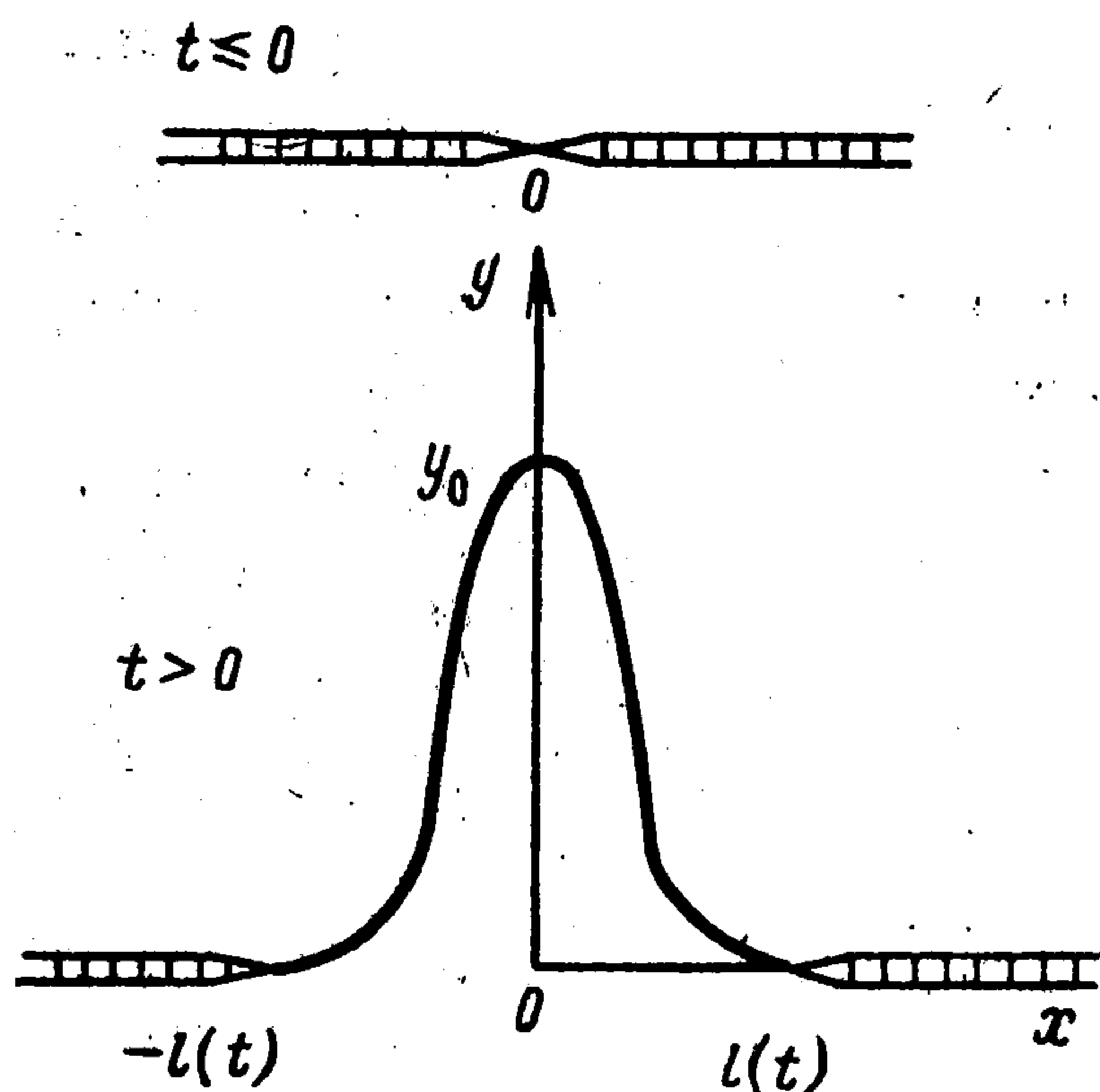
С помощью метода граничных интегральных уравнений можно понизить размерность задачи — вместо двухмерного уравнения Лапласа для потенциала скорости с соответствующими условиями на твердой границе и на фронте струи, где потенциал терпит разрыв, решать одномерное интегродифференциальное уравнение эволюции вихревой пелены.

В силу симметрии течения относительно оси y левая половина вихревой пелены будет зеркальным отражением правой, форму которой представим в параметрическом виде $z = z(\Gamma, t)$, где $z = x + iy$, Γ — циркуляция, переменная вдоль рассматриваемого куска вихревой пелены и отсчитываемая от ее свободного конца.

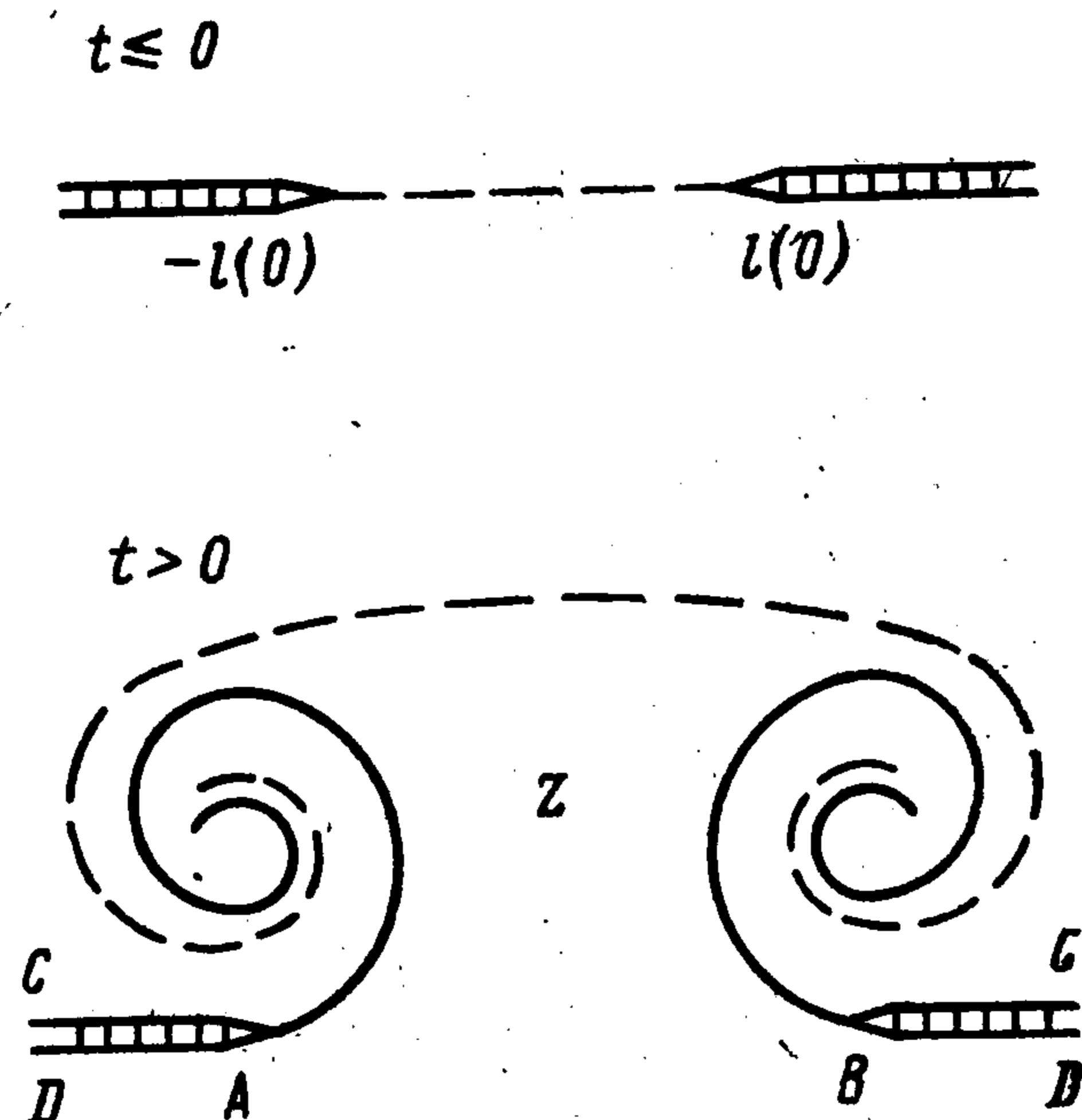
Функция

$$(1.1) \quad 2z/l = \zeta^{1/2} + \zeta^{-1/2}$$

переводит область течения на внешность полубесконечного отрезка $\text{Im } \zeta = 0, 0 \leq \text{Re } \zeta \leq \infty$. Соответствие точек показано на фиг. 2 и 3. Используя симметрию задачи, заключаем, что скорость жидкости по разные сто-



Фиг. 1



Фиг. 2

роны разреза в плоскости ζ одинакова, т. е. присоединенных вихрей нет. Следовательно, в этой плоскости наиболее простым образом учитывается влияние твердых границ потока.

Для организации течения в точках D ($\zeta = 0$) и C ($\zeta = \infty$), соответствующих бесконечно удаленным точкам в физической плоскости, необходимо поместить точечный источник интенсивности $Q(t)$ и точечный сток такой же интенсивности. Таким образом, решение задачи зависит от конкретного вида определяющих функций $Q(t)$ и $l(t)$. По-видимому, образование спиральных вихревых структур с бесконечным числом витков в некоторый момент времени t_0 связано с неаналитичностью этих функций в точке $t = t_0$.

Комплексный потенциал течения $W(\zeta, t)$ является функцией, кусочно-разрывной на вихревой пелене и определяемой наличием точечного источника и двух симметричных кусков пелены

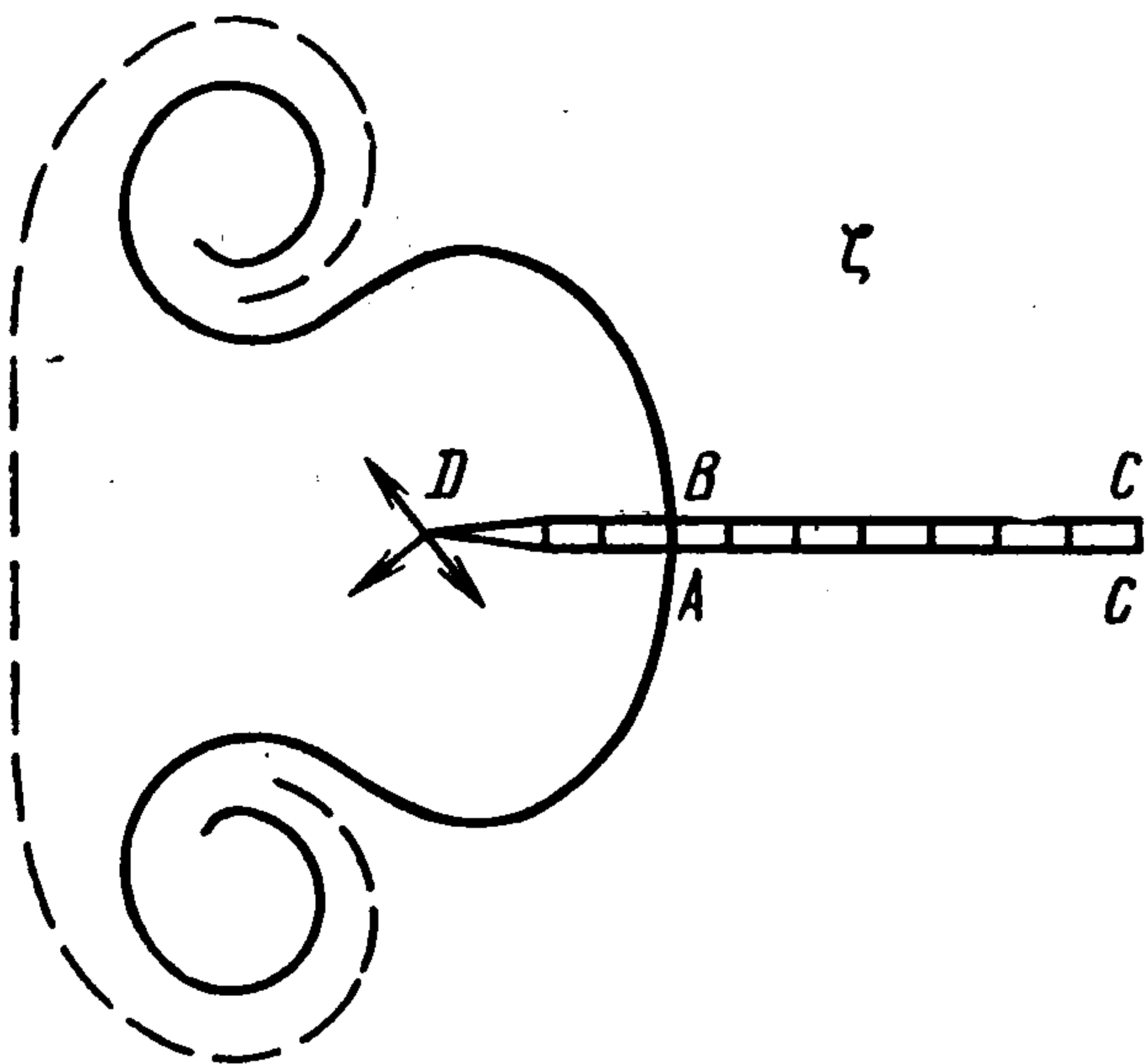
$$(1.2) \quad W(\zeta, t) = \frac{Q}{2\pi} \ln \zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\Gamma_0} \ln \frac{\zeta - \zeta(\Gamma, t)}{\zeta - \bar{\zeta}(\Gamma, t)} d\Gamma$$

Особые интегралы вдоль кусков вихревой пелены являются интегралами типа Коши, черта сверху означает комплексно-сопряженную величину, Γ_0 — полная циркуляция одного куска вихревой пелены.

Условие Чаплыгина — Жуковского задается в точке $\zeta = 1$ и имеет вид $\partial W(1, t)/\partial \zeta = 0$, или

$$(1.3) \quad Q = i \int_0^{\Gamma_0} \frac{\overline{\zeta(\Gamma, t)} - \zeta(\Gamma, t)}{|1 - \zeta(\Gamma, t)|^2} d\Gamma$$

Возможны два режима: истечение в затопленное полупространство, когда необходимо учитывать движение жидкости с обеих сторон фронта струи, и истечение со свободной границей, моделирующее, к примеру, проникание водяной струи в воздух.



Фиг. 3

2. Рассмотрим сначала задачу о затопленной струе. Плотности и полные давления обеих жидкостей, находящихся в начальный момент времени в верхнем и нижнем полупространствах, будем считать одинаковыми.

Уравнение эволюции вихревой пелены (см., например, [1]) имеет вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial z(\Gamma, t)}{\partial t} = \frac{4}{l} \frac{\zeta^{3/2}}{\zeta - 1} \left[\frac{Q}{2\pi\zeta} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\Gamma_0} \frac{d\Gamma'}{\zeta - \zeta(\Gamma', t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\Gamma_0} \frac{d\Gamma'}{\zeta - \overline{\zeta(\Gamma', t)}} \right]$$

Зависимость $z(\Gamma, t)$ от $\zeta(\Gamma, t)$ определяется из (1.1).

Для нелинейного сингулярного уравнения (2.1) с условием (1.3) естественным образом ставится условно корректная задача с начальными данными. Решение ищется в классе кусочно-аналитических функций, удовлетворяющих условию Гельдера; контур пелены считается простым и гладким. Численный расчет проводился методом дискретных вихрей [2] с использованием линейного регуляризатора [3], эффективно применяемого к решению задач отрывного обтекания плоских тел и крыльев малого удлинения.

Численные расчеты показали, что размер спирального ядра вихревой пелены растет с течением времени. В случае постоянного расхода участок пелены в окрестности кромок стабилизируется, приближаясь к форме соответствующей стационарному струйному течению. В случае убывающего в некотором интервале времени расхода может появиться завихренность противоположного знака, способная сместить прилегающую к кромке часть пелены в нижнее полупространство. Такое явление реверса вихревой пелены быстро разрушает течение как в опыте, так и при численном расчете.

На фиг. 4 показана полученная в результате численных расчетов зависимость безразмерной скорости изменения полной циркуляции одного спирального куса пелены $d(\Gamma_0/Q_0)/d\tau$ от времени в частном случае, когда расход жидкости через щель постоянной ширины l изменялся по периодическому закону $Q = Q_0(2 + 0,5 \sin 20\tau)$, где

$\tau = tQ_0/l^2$. После некоторого переходного процесса $d\Gamma_0/d\tau$ выходит на периодический режим.

Экспериментально исследовалось истечение жидкости через щель в рабочей части гидротрубы при различных законах открытия дросселя, изменяющего расход воды $Q(t)$. Визуализация течения достигалась подкрашиванием эжектирующей жидкости либо подачей красителя на кромки щели. Число $R = Q/\nu$, где ν — кинематический коэффициент вязкости, было равно $2 \cdot 10^3$. На основании эксперимента построена зависимость безразмерной глубины проникания струи y_0/l от безразмерного времени τ при постоянном расходе и $l = \text{const}$. Численный счет для этих условий дает линейную зависимость $y_0/l = 2,7\tau$. Совпадение опытных и численных данных удовлетворительное, отклонение от линейного закона незначительно.

Скорость в бесконечно удаленных точках C и D равна нулю. Поэтому давление в этих точках (в режиме истечения со свободной границей давление в точке C постоянно) равно

$$p = p_0 - \rho \operatorname{Re} \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{2\xi}{l} \frac{\xi+1}{\xi-1} \frac{dl}{dt} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)$$

(ρ — плотность жидкости).

Используя выражение (1.2) для комплексного потенциала скорости, получим предельные значения давления в точках C ($\xi \rightarrow \infty$) и D ($\xi \rightarrow 0$):

$$p_C = p_0 - \frac{\rho}{2\pi} \frac{dQ}{dt} \ln |\xi| + \frac{\rho Q}{\pi l} \frac{dl}{dt}$$

$$p_D = p_0 - \frac{\rho}{2\pi} \frac{dQ}{dt} \ln |\xi| - \frac{\rho Q}{\pi l} \frac{dl}{dt} +$$

$$+ \frac{2\rho\Gamma_0}{\pi i l} \frac{dl}{dt} \int_0^1 \frac{\xi(\lambda, t) - \overline{\xi(\lambda, t)}}{|1 - \xi(\lambda, t)|^2} d\lambda + p_1(t)$$

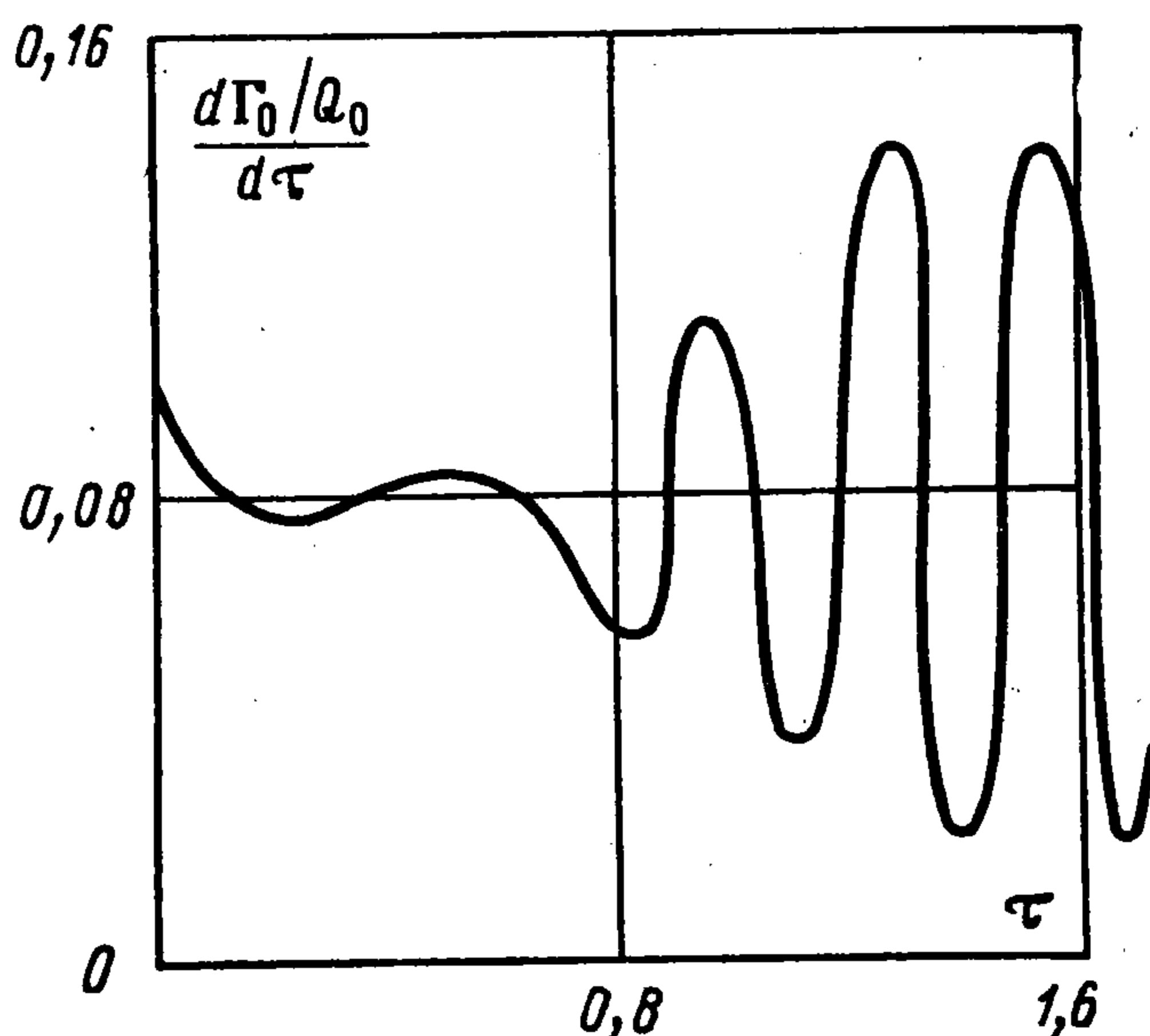
$$\lambda = \frac{\Gamma}{\Gamma_0}, \quad p_1(t) = \frac{\rho}{\pi} \frac{d\Gamma_0}{dt} \int_0^1 \arg \xi(\lambda, t) d\lambda$$

При $dQ/dt \neq 0$ давление бесконечно. В случае безотрывного течения, т. е. когда нет условия (1.3) и $\Gamma_0 \equiv 0$, расширение щели приводит к уменьшению давления в точке D и к увеличению его в точке C на такую же величину; сужение щели приводит к обратному результату. В случае отрывного течения преобразуем выражение для p_D с помощью условия (1.3)

$$p_D = p_0 - \frac{\rho}{2\pi} \frac{dQ}{dt} \ln |\xi| + \frac{\rho Q}{\pi l} \frac{dl}{dt} + p_1(t)$$

Если $dQ/dt = 0$, то перепад давления $p_D - p_C$ конечен и равен $p_1(t)$. При $d\Gamma_0/dt > 0$ имеем $p_D > p_C$.

3. Если расход жидкости достаточно мал, а скорость расширения щели достаточно велика, вихревой фронт струи в схеме, изображенной на фиг. 1, будет мало отличаться от отрезка $y = 0$, $-l(t) \leq x \leq l(t)$. В этом случае, точнее при отсутствии спиральных вихреобразований



Фиг. 4

($|\partial y/\partial x| < \infty$) и при

$$(3.1) \quad |Q| \ll |dl^2/dt|$$

применима линейная теорема. Разложим решение в степенной ряд по малому параметру $\varepsilon = \max(Qdt/dl^2)$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} z(\Gamma, t; \varepsilon) &= x_0(g, t) + \varepsilon z_1(g, t) + O(\varepsilon^2), \quad z_1 = x_1 + iy_1 \\ Q(t) &= \varepsilon Q_1(t), \quad \Gamma = \varepsilon g + O(\varepsilon^2), \quad \Gamma_0 = \varepsilon \Gamma_1 + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Из преобразования (1.1) следует, что в плоскости ζ форма вихревой пелены будет мало отличаться от окружности $|\zeta| = 1$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \zeta(g, t; \varepsilon) &= e^{i\theta} + \varepsilon \zeta_1(g, t) + O(\varepsilon^2) \\ \theta &= 2 \arccos \frac{x_0}{l}, \quad \frac{z_1}{l} = \frac{i}{2} \zeta_1 e^{-i\theta} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Главные члены разложений (3.2) и (3.3) подставим в (1.3) и (2.1). Условие Чаплыгина — Жуковского (1.3) определяет функциональную связь между полной циркуляцией $\Gamma_1(t)$ и расходом $Q_1(t)$:

$$(3.4) \quad Q_1(t) = \int_0^{\Gamma_1(t)} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} dg$$

Члены в правой части уравнения (2.1) имеют порядок ε . Поэтому для определения $x_0(g, t)$ правой частью можно пренебречь. Тогда получим

$$(3.5) \quad x_0 = x_0(g)$$

Решение (3.5) имеет простой физический смысл: смещение вихревых точек (т. е. точек, для которых $\Gamma = \text{const}$) происходит только в вертикальном направлении, так как их абсцисса не зависит от времени. Для величины y_1 , характеризующей вертикальное смещение пелены, из уравнения эволюции (2.1) получается обыкновенное дифференциальное уравнение, правую часть которого можно считать известной функцией g и t , если известна зависимость $x_0(g)$ и $\Gamma_1(t)$. Решение этого уравнения с граничным условием $y_1(\Gamma_1, t) = 0$ будет обсуждаться ниже на конкретном примере автомодельного истечения.

Отметим, что если в начальный момент времени $t = 0$ абсциссы вихревых точек были известны и расположены в диапазоне $-x_0[\Gamma_1(0)] \leq x_0(g) \leq x_0[\Gamma_1(0)]$, то решение (3.5) устанавливает такое же распределение циркуляции по оси x для этих вихревых точек и в последующие моменты времени. Другими словами, положение вихревых точек по оси x стационарно. Однако ввиду «рождения» завихренности на острых кромках и расширения щели появляется нестационарность, к существующим вихревым точкам добавляются новые, горизонтальное положение которых в соответствии с решением (3.5) должно быть стационарным. Связь между циркуляцией рожденных вихревых точек $g = \Gamma_1$ и временем их рождения t_1 получается из уравнения $\Gamma_1 = \Gamma_1(t)$, которое считаем известным. Обратную зависимость времени от циркуляции $t_1 = t_1(\Gamma_1)$ также будем считать известной. Так как абсциссы рожденных на кромках вихрей равны $\pm l(t_1)$, то решение (3.5) для вихревой пелены, появившейся при $t > 0$, принимает вид

$$(3.6) \quad x_0 = l[t_1(g)]$$

4. В случае монотонно раскрывающейся щели интерес представляет решение автомодельной задачи. Пусть ширина щели открывается по степенному закону $l(t) = kt^n$, $k > 0$. Истечение жидкости автомодельно, если расход Q пропорционален t^{2n-1} . Будем рассматривать реальный случай

$n > 0,5$, когда расход жидкости конечен в начальный момент времени. Введем безразмерные переменные по формулам

$$(4.1) \quad z(\Gamma, t) = kt^n \mu(\lambda), \quad \Gamma = 2\pi nk^2 t^{2n-1} G, \quad \Gamma_0 = 2\pi nk^2 t^{2n-1} G_0 \\ Q = 2\pi nk^2 t^{2n-1} q, \quad \lambda = G/G_0, \quad 0 < m = 2 - 1/n < 2$$

Переходя в уравнении (2.1) и в условии (1.3) к безразмерным переменным, получим

$$(4.2) \quad \bar{\mu} - m\lambda \frac{d\bar{\mu}}{d\lambda} = \frac{4\zeta^{3/2}}{\zeta - 1} \left[\frac{q}{\zeta} + iG_0 \int_0^1 \frac{d\lambda'}{\zeta(\lambda) - \zeta(\lambda')} - iG_0 \int_0^1 \frac{d\lambda'}{\zeta(\lambda) - \zeta(\bar{\lambda}')} \right]$$

$$(4.3) \quad q = iG_0 \int_0^1 \frac{\bar{\zeta}(\lambda) - \zeta(\lambda)}{|1 - \zeta(\lambda)|^2} d\lambda$$

Условие применимости линейной теории (3.1) выполняется при $q \ll 1$. Аналогично (3.2), (3.3) разложим решение в степенной ряд по малому параметру q :

$$(4.4) \quad \mu(\lambda; q) = \alpha_0(\lambda) + q\mu_1(\lambda) + O(q^2), \quad \mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \\ G_0 = qG_1 + O(q^2), \quad \zeta(\lambda, q) = e^{i\theta_0} + q\zeta_1(\lambda) + O(q^2) \\ \theta_0 = 2 \arccos \alpha_0, \quad \mu_1 = i/2 \zeta_1 e^{-i\theta_0} \sin \theta_0/2$$

Решение (3.5) в автомодельных переменных имеет вид

$$(4.5) \quad \alpha_0 = \lambda^{1/m}$$

Циркуляция скорости G_1 определяется из условия (4.3)

$$(4.6) \quad G_1^{-1}(m) = m \int_0^1 \alpha_0^m \frac{d\alpha_0}{\sqrt{1 - \alpha_0^2}}$$

Приравнявая нулю члены порядка q в (4.2), получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение для определения ординаты вихревой пелены $\beta_1(\lambda)$:

$$(4.7) \quad \left(\beta_1 - m\lambda \frac{d\beta_1}{d\lambda} \right) \sin \frac{\theta_0}{2} = 2 + G_1 I(\lambda, m) \\ I(\lambda, m) = 2 \int_0^1 \frac{\sin \theta_0(\lambda') d\lambda'}{\cos \theta_0(\lambda') - \cos \theta_0(\lambda)}, \quad \theta_0(\lambda) = 2 \arccos \lambda^{1/m}$$

Граничное условие $\beta_1(1) = 0$.

В частном случае равномерного расширения диафрагмы ($m = 1$) интегралы в правой части (4.6) и (4.7) вычисляются в квадратурах и решением уравнения (4.7) в этом случае является функция

$$\beta_1(\lambda) = \lambda \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda^2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda^2}}{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}$$

имеющая при $\lambda \rightarrow 0$ логарифмическую особенность

$$(4.8) \quad \beta_1(\lambda \rightarrow 0) \rightarrow -2 \ln \lambda$$

При $\lambda \rightarrow 0$ интеграл $I(\lambda, m)$ конечен, если $m > 1$, и имеет степенную особенность, если $m < 1$. В последнем случае ($m < 1$) из уравнения (4.7)

получаем

$$(4.9) \quad \beta_1 (\lambda \rightarrow 0) \rightarrow \text{const } \lambda^{1-1/m}$$

Таким образом, вычисленная по линейной теории при $m \leq 1$ скорость в центре автомоделльной струи получается бесконечной. Для исследования этого парадокса линейной теории идеальной жидкости воспользуемся методом сращивания асимптотических разложений.

При $m \leq 1$ линейная теория (внешнее разложение) непригодна в некоторой q^r -окрестности точки $\lambda = 0$, где $r > 0$. Формулы (4.8) и (4.9) определяют внутренний предел внешнего разложения соответственно при $m = 1$ и $m < 1$. Значение r и порядок величины $\mu(\lambda)$ во внутренней области находятся из условия сращивания внутреннего предела с внешним и из определения циркуляции λ : $r = 2n - 1$, $\mu \sim q^n$. Следовательно, внутреннее разложение имеет вид

$$(4.10) \quad \mu(\lambda; q) = q^n \sigma(\lambda_0) + o(q^n), \quad \lambda = q^{2n-1} \lambda_0$$

Подставляя разложение (4.10) в уравнение (4.2), получим уравнение эволюции центральной части автомоделльной струи при $m \leq 1$:

$$(4.11) \quad \overline{\sigma(\lambda_0)} - m\lambda_0 \frac{d\overline{\sigma(\lambda_0)}}{d\lambda_0} = -2i\delta_{1,m} + \\ + iG_1 \int_0^\infty \left[\frac{1}{\sigma(\lambda_0) - \sigma(\lambda_0')} - \frac{1}{\sigma(\lambda_0) - \overline{\sigma(\lambda_0')}} \right] d\lambda_0', \quad \delta_{1,m} = \begin{cases} 1, & m = 1 \\ 0, & m \neq 1 \end{cases}$$

Во внутренней задаче отсутствуют твердые границы, поэтому условие Чаплыгина — Жуковского теряет смысл. Вместо него необходимо потребовать выполнения условия

$$(4.12) \quad \text{Im } \sigma(\lambda_0 = \infty) = 0$$

обеспечивающего сращивание внутреннего разложения с внешним.

Можно показать, что уравнение (4.11) не имеет неограниченного решения при $\lambda_0 \rightarrow 0$. Действительно, при наличии неограниченного решения правая часть уравнения (4.11) будет стремиться к постоянной. Но тогда дифференциальный оператор, стоящий в левой части уравнения, будет иметь только ограниченные решения, что противоречит исходному предположению. Скорость в центре струи конечна.

Таким образом, при $n \leq 1$ и достаточно малом значении расхода q имеет место кумулятивный эффект автомоделльной струи: скорость проникания ее узкой центральной части ($x \sim q^n$), где сосредоточена малая доля циркуляции ($\lambda \sim q^{2n-1}$), имеет порядок q^n и превосходит по порядку величины скорость основной части струи, имеющую порядок q .

5. Рассмотрим режим истечения со свободной границей. В этом случае давление p вдоль разрыва одинаково и не изменяется с течением времени. Нормальная к свободной границе составляющая скорости v равна скорости перемещения фронта струи

$$(5.1) \quad v = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_x \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

где $y = y(x, t)$ — форма свободной границы. Касательная составляющая скорости u определяет интенсивность вихревой пелены.

Для вывода уравнения эволюции введем непрерывный вдоль свободной границы параметр

$$h = \varphi - \int \frac{p_0(t) - p}{\rho} dt$$

где φ — потенциал скорости на свободной границе. Рассмотрим скорость изменения этого параметра $\delta h / \delta t$ в вихревой точке, т. е. в точке, расположенной на свободной границе и движущейся вдоль нее со скоростью $u/2$. (В отличие от вихревой точки на пелене такая точка не соответствует значению $h = \text{const.}$) Из уравнения Бернулли

$$\frac{\delta \varphi}{\delta t} - \frac{v^2}{2} = \frac{p_0 - p}{\rho}$$

находим

$$\frac{\delta h}{\delta t} = \frac{\delta \varphi}{\delta t} - \frac{p_0 - p}{\rho} = \frac{v^2}{2}$$

Комплексная скорость рассматриваемой точки равна

$$\frac{\delta \bar{z}}{\delta t} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial h} \frac{\delta h}{\delta t} = \frac{\partial \bar{z}(h, t)}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \frac{\partial \bar{z}(h, t)}{\partial h}$$

В соответствии с формулами Сохоцкого уравнение эволюции свободной границы получается приравниванием этой скорости комплексной скорости течения $\partial W / \partial z$;

$$(5.2) \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_x^2 \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1} \frac{\partial \bar{z}}{\partial h} = \frac{4}{l} \frac{\zeta'^{1/2}}{\zeta - 1} \left[\frac{Q}{2\pi\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{h_0} \frac{dh'}{\zeta - \zeta(h', t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{h_0} \frac{dh'}{\zeta - \bar{\zeta}(h', t)} \right]$$

Уравнение эволюции свободной границы струи (5.2) отличается от уравнения (2.1) наличием в левой части равенства второго члена, пропорционального квадрату нормальной к разрыву составляющей скорости v , определяемой (5.1). В случае автомодельного истечения переменные приводятся к безразмерному виду по формулам (4.1) с формальной заменой h на Γ . Уравнение эволюции (5.2) принимает вид

$$(5.3) \quad \bar{\mu} - mG \frac{d\bar{\mu}}{dG} + \frac{1}{4\pi} \frac{(\beta - \alpha\beta')^2}{1 + (\beta')^2} \frac{d\bar{\mu}}{dG} = \\ = \frac{4\zeta^{3/2}}{\zeta - 1} \left[\frac{q}{\zeta} + iG_0 \int_0^1 \frac{d\lambda'}{\zeta - \zeta(\lambda')} - iG_0 \int_0^1 \frac{d\lambda'}{\zeta - \bar{\zeta}(\lambda')} \right] \\ \mu = \alpha + i\beta, \quad \beta' = d\beta/d\alpha$$

Условие Чаплыгина — Жуковского (4.3) остается в силе.

Внешнее решение уравнения (5.3) при $q \ll 1$ в первом приближении совпадает с решением уравнения (4.2), описывающего истечение автомодельной струи в затопленное пространство, так как порядок дополнительного члена в уравнении (5.3) выше, чем порядок скорости в линейной те-

рии. Во внутреннем разложении порядки этих величин равны. Имеем

$$(5.4) \quad \bar{\sigma} - m\lambda_0 \frac{d\bar{\sigma}}{d\lambda_0} + \frac{1}{4\pi G_1} \frac{(\beta - \alpha\beta')^2}{1 + (\beta')^2} \frac{d\bar{\sigma}}{d\lambda_0} = -2i\delta_{1,m} + \\ + iG_1 \int_0^\infty \left[\frac{1}{\sigma(\lambda_0) - \sigma(\lambda_0')} - \frac{1}{\sigma(\lambda_0) - \bar{\sigma}(\lambda_0')} \right] d\lambda_0'$$

Выполняется условие (4.12).

Точно так же, как и для уравнения (4.11), можно показать, что решение при $\lambda \rightarrow 0$ ограничено. Следовательно, при автомодельном истечении жидкости со свободной границей кумулятивный эффект также имеет место.

Кроме вопросов струйной автоматики, рассмотренная задача имеет приложения к исследованию трехмерных стационарных течений газа, плоским аналогом которых она является. Действительно, если узкая зона отрыва вытянута по направлению невозмущенного потока, то продольная переменная в уравнениях газовой динамики вырождается и становится справедливым закон плоских сечений, в первом приближении которого сжимаемость среды не учитывается. Известными примерами являются теория крыла малого удлинения, нелинейная теория крыла конечного удлинения в сверхзвуковом [4] и в дозвуковом [5] потоке, течение с локальными вихревыми пеленами при обтекании тел произвольного удлинения [6]. В этом смысле плоские нестационарные истечения жидкости из щели эквивалентны отрывному обтеканию продольного выреза в экране. Безотрывное обтекание продольного выреза в крыле рассмотрено в работе [7]. Аналогичная задача (с периодически распределенными щелями) возникает при исследовании перетекания газа через перфорированные границы с продольными щелями, если число $R = Q/\nu$ достаточно велико. Невязкий механизм возникновения сопротивления перетеканию газа связан с образованием отходящих от кромок щелей вихревых пелен. При таком подходе к задаче нет необходимости в постановке эмпирических граничных условий на перфорированных стенках.

Автор благодарит за помощь в работе и ее обсуждение Рябинкова Г. М. и Абасова Н. В.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бетяев С. К. К теории плоских отрывных течений.— В сб.: Численные методы механики сплошной среды, 1978, т. 9, № 5, с. 28—36.
2. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 351 с.
3. Молчанов В. Ф. Некоторые вопросы расчета течений с тангенциальными разрывами.— Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 4, с. 1—11.
4. Никольский А. А. Нелинейный закон подобия для отрывного обтекания идеальным газом прямоугольного крыла со сверхзвуковой скоростью.— Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 6, с. 10—17.
5. Молчанов В. Ф. Метод выделения главной части нелинейных характеристик прямоугольного крыла, обтекаемого идеальной жидкостью.— Уч. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 1, с. 12—17.
6. Бетяев С. К., Воеводин А. В., Судаков Г. Г. Отрывное обтекание тел с локальными вихревыми пеленами.— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 3, с. 573—576.
7. Рождественский К. В. Метод сращиваемых асимптотических разложений в гидродинамике крыла. Л.: Судостроение, 1979. 208 с.