Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 6, 1981

УДК 521.1:517.92

О НАХОЖДЕНИИ НОРМАЛЬНОГО ВИДА ГАМИЛЬТОНОВЫХ МАТРИЦ

Титова Т. Н.

Получен способ нахождения производящей функции канонического преобразования, приводящего квадратичный гамильтониан и соответствующую ему гамильтонову матрицу к некоторому нормальному виду. В качестве примера рассматривается приведение к нормальному виду гамильтоновой матрицы четвертого порядка.

Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений с квадратичным гамильтонианом

$$dx/dt = \partial H/\partial y,\ dy/dt = -\,\partial H/\partial x \tag{1}$$
$$H(x, y) = {}^1/_2 y'Cy + x'By + {}^1/_2 x'Ax$$

Здесь x, y — n-мерные векторы-столбцы сопряженных канонических переменных, A, B, C — действительные квадратные матрицы порядка n, A и C — симметрические матрицы, штрих означает транспонирование.

Систему уравнений (1) можно записать также в следующем виде

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = V\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix},\quad V = \begin{Vmatrix} B' & C \\ -A & -B \end{Vmatrix} \tag{2}$$

где V — гамильтонова матрица.

Метод нормализации произвольной гамильтоновой матрицы [1] неудобен для практического нахождения нормализующего канонического преобразования. Поэтому разрабатывались другие способы [2—5], авторы которых накладывали на гамильтонову матрицу различные ограничения (в частности, всегда предполагалась невырожденность гамильтоновой матрицы). Ниже получен способ нахождения производящей функции канонического преобразования переменных, приводящего гамильтонову матрицу к некоторому нормальному виду. При этом матрица может иметь кратные, в том числе и нулевые, собственные значения.

Пусть q, p — n-мерные векторы-столбцы новых канонических переменных. Совершим каноническое преобразование при помощи производящей функции

$$S(x, p) = {}^1/_2 p'Kp + p'Lx + {}^1/_2 x'Mx \tag{3}$$

Здесь K, L, M — квадратные матрицы порядка n, K, M — симметрические матрицы, L — невырожденная матрица. При этом из уравнений

$$\partial S/\partial p = q,\ \partial S/\partial x = y$$

получаем выражение старых переменных через новые

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} L^{-1} & -L^{-1}K \\ ML^{-1} & L' - ML^{-1}K \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} q \\ p \end{Vmatrix} \tag{4}$$

Сделав необходимые вычисления, получим новый гамильтониан, который с помощью очевидного тождества

$$2q'BMq = q'(BM + MB')q$$

приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned}
&H(q, p) = {}^1/_2 p'C_0 p + q'B_0 p + {}^1/_2 q'A_0 q\\
&A_0 = A_0' = (L')^{-1}(MCM + MB' + BM + A)L^{-1}\\
&B_0 = (L')^{-1}(MC + B)L' - A_0 K\\
&C_0 = C_0' = -KA_0K - KB_0 - B_0'K + LCL'
\end{aligned}$$

Итак, если необходимо привести каноническую систему (2) каноническим преобразованием вида (4) к системе с гамильтоновой матрицей

$$V_0 = \begin{Vmatrix} B_0' & C_0 \\ -A_0 & -B_0 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

неизвестные матрицы K, L, M производящей функции нужно искать из следующей системы матричных уравнений:

$$\begin{aligned}
&MCM + MB' + BM + A = L'A_0L\\
&L(CM + B')L^{-1} = KA_0 + B_0'\\
&KA_0K + KB_0 + B_0'K + C_0 = LCL'
\end{aligned} \tag{6}$$

В этой системе матрицы A, A_0, C, C_0 — симметрические, неизвестные матрицы M и K ищем симметрическими, матрицу L ищем невырожденной. С помощью системы (6) можно приводить гамильтонову матрицу к нормальному виду, переходить от одного нормального вида к другому, упрощать исходную гамильтонову матрицу.

Пусть необходимо привести гамильтонову матрицу к следующему нормальному виду:

$$\Phi = \begin{Vmatrix} U & I \\ O & -U' \end{Vmatrix}, \quad U = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\; \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \varepsilon_{n-1} \\ 0 & \cdot & \cdot \quad\; \lambda_n \end{Vmatrix} \tag{7}$$

$$I = \operatorname{diag}\{\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_{2n-1}\}$$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0, 1; & i = 1, \ldots, n-1 \\ 0, \pm 1; & i = n, \ldots, 2n-1 \end{cases}$$

(λ_i — собственные значения гамильтоновой матрицы V). Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned}
H(q, p) &= {}^1/_2 p'Ip + p'Uq =\\
&= \sum_{i=1}^{n} ({}^1/_2 \varepsilon_{n+i-1} p_i^2 + \lambda_i q_i p_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i p_i q_{i+1}
\end{aligned}$$

Тогда система матричных уравнений (6) примет вид

$$\begin{aligned}
&MCM + MB' + BM + A = 0\\
&L(CM + B')L^{-1} = U, \; KU' + UK = LCL' - I
\end{aligned} \tag{8}$$

Из этой системы неизвестные матрицы находятся последовательно: из первого уравнения, называемого матричным уравнением Риккати [6, 7], — симметрическая матрица M; далее из второго уравнения находится матрица L, преобразующая найденную матрицу $CM + B'$ к нормальному виду Жордана; затем из третьего уравнения находится симметрическая матрица K.

Предложение 1. Каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией вида (3), где матрица L невырожденная, приводит гамильтонову матрицу V системы (2) к нормальному виду (7) тогда и только тогда, когда матрицы K, L, M производящей функции являются решениями системы матричных уравнений (8).

Предложение 2. Система матричных уравнений (8) имеет решение тогда и только тогда, когда существует симплектическая матрица T порядка $2n$ такая, что $T^{-1}VT = \Phi$ и элементы матрицы T, стоящие на пересечении первых n строк и первых n столбцов, образуют невырожденную матрицу.

Доказательство. Необходимость вытекает из того, что матрица преобразования (4) удовлетворяет условиям предложения. Докажем достаточность. Пусть матрица T имеет вид

$$T = \begin{Vmatrix} F & H \\ G & M \end{Vmatrix} \tag{9}$$

Здесь F, G, H, W — квадратные матрицы порядка n, $\det F \neq 0$. Тогда следующие матрицы, как можно проверить, являются решениями системы (8)

$$M = GF^{-1},\ L = F^{-1},\ K = -F^{-1}H$$

Предложение 3. Пусть существует решение первого уравнения системы (8) — матричного уравнения Риккати. Тогда существует матрица U, имеющая нормальный жорданов вид, и некоторая симметрическая матрица I (необязательно диагональная), при которых система (8) имеет решение.

Доказательство. Действительно, зная решение первого уравнения системы (8), матрицы U и I можно найти в ходе решения остальных уравнений. Матрица U является нормальным жордановым видом матрицы $CM + B'$. Матрица I обеспечивает разрешимость третьего уравнения системы. Например, при $I = LCL'$ третье уравнение имеет решение $K = 0$.

Таким образом, видно, что решение системы (8) зависит в основном от решения матричного уравнения Риккати. Существуют различные (в том числе и численные) способы нахождения симметрического решения этого нелинейного уравнения [6—8]. Рассмотрим один из них. Пусть T — произвольная матрица вида (9), приводящая гамильтонову матрицу к нормальному виду (7) так, что $T^{-1}VT = \Phi$, причем $\det F \neq 0$. Тогда первые два уравнения системы (8) имеют следующие решения [6, 7];

$$M = GF^{-1},\ L = F^{-1}$$

Симметричность матрицы GF^{-1} доказана в работах [6, 7] при условии, что собственные значения матрицы U, входящей в матрицу нормального вида Φ, удовлетворяют условию $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, которое всегда можно осуществить, если гамильтонова матрица V невырождена. Пусть $\det V \neq 0$, k_{ij} — элементы матрицы K, c_{ij} — элементы матрицы LCL' (заметим, что $I = 0$, так как $\det V \neq 0$). Тогда для определения элементов симметрической матрицы K получим треугольную систему $^1/_2 n\cdot$

$(n+1)$ линейных уравнений

$$(\lambda_i + \lambda_j)\, k_{ij} + \varepsilon_i k_{i+1,j} + \varepsilon_j k_{i,j+1} = c_{ij} \tag{10}$$
$$1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n,\quad k_{ij} = k_{ji},\quad \varepsilon_n = k_{n+1,j} = 0 .$$

Эта система совместна, так как главный определитель системы

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (\lambda_i + \lambda_j) \neq 0$$

Предложение 4. Пусть гамильтонова матрица V имеет не более одной пары нулевых собственных значений, T — произвольная матрица вида (9), приводящая матрицу V к нормальному виду (7), и выполняются следующие условия:

1) матрицы U и I, входящие в матрицу нормального вида Φ, имеют вид

$$U = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_2 & \varepsilon_2 \dots 0 \\ . & . & . \quad\quad . \\ 0 & . & . \quad\quad \lambda_n \end{Vmatrix}, \quad I = \operatorname{diag}\{0, \dots, 0, \varepsilon\}$$

$$\lambda_i + \lambda_j \neq 0;\ 2 \leqslant i + j \leqslant 2n - 1;\ \varepsilon_i = 0,1;\ i = 1, \dots, n-1;\ \varepsilon = 0,1$$

(при введенных ограничениях на собственные значения матрицы V это условие всегда можно осуществить [9]);

2) преобразующая матрица T имеет невырожденную подматрицу F. Тогда матрицы производящей функции некоторого нормализующего канонического преобразования имеют вид

$$M = GF^{-1},\quad L = lF^{-1},\quad l = \begin{cases} 1/\sqrt{f}, & f \neq 0 \\ 1, & f = 0 \end{cases}$$

Здесь f — элемент матрицы $F^{-1} C (F^{-1})'$, стоящий в правом нижнем углу. Элементы симметрической матрицы K находятся из совместной треугольной системы линейных уравнений (10), где c_{ij} — элементы матрицы $LCL' - I$.

Доказательство. Доказано [1], что матрица $M = GF^{-1}$ при выполнении условий предложения — симметрическое решение матричного уравнения Риккати. Ясно, что матрица $L = lF^{-1}$ удовлетворяет второму уравнению системы (8). Докажем совместность системы уравнений (10). Действительно, последнее уравнение этой системы имеет вид

$$2\lambda_n k_{nn} = c_{nn},\ c_{nn} = l^2 f - \varepsilon$$

($\varepsilon = 0$, если гамильтонова матрица является невырожденной). Из двух значений, которые может принимать ε, всегда можно выбрать такое, при котором это уравнение имеет решение (матрицы F и G не зависят от ε). Остальные уравнения системы (10) образуют систему линейных уравнений, главный определитель которой не равен нулю.

Найдя производящую функцию канонического преобразования, само преобразование получим в виде

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \frac{1}{l} \begin{Vmatrix} F & -FK \\ G & l^2 (F^{-1})' - GK \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} q \\ p \end{Vmatrix}$$

[1] *Титова Т. Н.* О нормализации вырожденной гамильтоновой матрицы. М.— 12 с. Деп. в ВИНИТИ, 7.II.1978; № 434.

Пример 1. Для иллюстрации предлагаемого способа приведем выражения для производящей функции канонического преобразования, нормализующего невырожденную гамильтонову матрицу V четвертого порядка [2] при условии, что подматрица C положительно-определенная (т. е. соответствующий гамильтониан является положительно-определенной квадратичной формой относительно обобщенных импульсов). Тогда существует невырожденная матрица R, такая, что $R'CR = E$ [10]. Для упрощения формул совершим предварительно следующее каноническое преобразование:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (R')^{-1} & O \\ O & R \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \end{Vmatrix}$$

Тогда новый гамильтониан примет вид

$$H(\xi, \eta) = {}^1/_2\, \eta'\eta + \xi' R^{-1} B R \eta + {}^1/_2 \xi' R^{-1} A\, (R^{-1})' \xi = {}^1/_2 \eta'\eta + \xi' B_0 \eta + {}+ {}^1/_2 \xi' A_0 \xi$$

В дальнейшем будем опускать индексы и рассматривать следующую гамильтонову матрицу:

$$V = \begin{Vmatrix} B' & E \\ -A & -B \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{21} & 1 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 & 1 \\ -a_{11} & -a_{12} & -b_{11} & -b_{12} \\ -a_{12} & -a_{22} & -b_{21} & -b_{22} \end{Vmatrix}$$

Пусть $\mu = b_{12} - b_{21}$, $D = BB' - A$, ν_1 и ν_2 — собственные значения матрицы D, $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$ — собственные значения матрицы V, $\sqrt{\nu_i}$ — положительное или чисто мнимое число с положительным коэффициентом, F — ортогональная матрица, приводящая симметрическую матрицу D к диагональному виду, т. е. $FDF' = \operatorname{diag}\{\nu_1, \nu_2\}$ (строки матрицы F являются ортонормированными собственными векторами матрицы D).

Будем проводить гамильтонову матрицу V к нормальному виду

$$\Phi = \begin{Vmatrix} U & O \\ O & -U' \end{Vmatrix}$$

Случай 1°. Пусть $\mu = \pm(\sqrt{\nu_1} + \sqrt{\nu_2})$; $\nu_1 \neq \nu_2$. Тогда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda; \quad \lambda^2 = -\sqrt{\nu_1 \nu_2},$$

$$U = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{Vmatrix}, \quad p = 1/(\sqrt{\nu_1} - \sqrt{\nu_2})$$

$$M = pF' \begin{Vmatrix} \pm 2\lambda\sqrt{\nu_1} & \sqrt{\nu_1}\mu \\ \sqrt{\nu_2}\mu & \mp 2\lambda\sqrt{\nu_2} \end{Vmatrix} F - B$$

$$L = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{\nu_1}\mu p & \lambda \mp 2\lambda\sqrt{\nu_1} p \end{Vmatrix} F$$

$$k_{22} = (\lambda^2 \mp 4\lambda^2 \sqrt{\nu_1} p + \nu_1)/(2\lambda), \quad k_{12} = k_{21} = (\lambda \mp 2\lambda\sqrt{\nu_1} p - k_{22})/(2\lambda),$$
$$k_{11} = (1 - 2k_{12})/(2\lambda)$$

Случай 2°. Пусть $\mu = \pm(\sqrt{\nu_1} - \sqrt{\nu_2})$; $\nu_1 \neq \nu_2$. Справедливы все формулы случая 1°, если в них заменить $\sqrt{\nu_2}$ на $-\sqrt{\nu_2}$.

Случай 3°. Пусть $\mu^2 \neq (\sqrt{\nu_1} \pm \sqrt{\nu_2})^2$; $\mu \neq 0$. Тогда собственные значения матрицы V различны: $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$; $U = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$

$$q = \mu/(\sqrt{\nu_1} + \sqrt{\nu_2}), \quad r = \pm\sqrt{1 - q^2}$$

$$M = F' \begin{Vmatrix} \sqrt{\nu_1} r & \sqrt{\nu_1} q \\ -\sqrt{\nu_2} q & \sqrt{\nu_2} r \end{Vmatrix} F - B$$

---

[2] *Титова Т. Н.* О нормализации линейной гамильтоновой системы с помощью канонических преобразований. М. — 24 с. Деп. в ВИНИТИ, 5.IV.1976; № 1049.

$$L = \begin{Vmatrix} \sqrt{\nu_1}q & \lambda_1 - \sqrt{\nu_1}r \\ \sqrt{\nu_1}q & \lambda_2 - \sqrt{\nu_1}r \end{Vmatrix} F$$

$$k_{11} = (\nu_1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1\sqrt{\nu_1}r)/(2\lambda_1)$$

$$k_{12} = k_{21} = (\nu_1 + \lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \sqrt{\nu_1}r)/(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$k_{22} = (\nu_1 + \lambda_2^2 - 2\lambda_2\sqrt{\nu_1}r)/(2\lambda_2)$$

Случай 4°. Пусть $\mu = 0$, $\nu_1 \neq \nu_2$. Тогда $U = \operatorname{diag}\{\sqrt{\nu_1}, \sqrt{\nu_2}\}$, $M = F'UF - B$, $L = F$, $K = {}^1/_2 U^{-1}$.

Случай 5°. Пусть $\mu = 0$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Тогда $U = \sqrt{\nu}E$, $M = \sqrt{\nu}E - B$, $L = E$, $K = (1/(2\sqrt{\nu}))\, E$.

Таким образом, способ не работает только в случае, когда $\nu_1 = \nu_2 = \mu^2/4$.

Пример 2. Рассмотрим гамильтонову матрицу вида (7), где

$$U = U_k \dotplus O_{n-k}, \quad I = O_k \dotplus I_{n-k}$$

$$U_k = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}, \quad I_{n-k} = \operatorname{diag}\{\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_{n-k}\}, \quad \varepsilon_i = 0, \ \pm 1$$

O_k — нулевая квадратная матрица порядка k ($\dotplus$ обозначает прямую сумму матриц). К такому нормальному виду может быть приведена всякая гамильтонова матрица, ненулевые собственные значения которой не образуют жордановых клеток выше первого порядка. Пусть все λ_i $(i = 1, \ldots, k)$ чисто мнимые. Тогда гамильтонова матрица комплексна и возникает задача о переходе к следующему действительному виду:

$$\begin{Vmatrix} O & C \\ -A & O \end{Vmatrix}, \quad C = -iU_k \dotplus I_{n-k}, \quad A = -iU_k \dotplus O_{n-k}$$

Система матричных уравнений (6) принимает в этом случае следующий вид:

$$MIM + MU + UM = L'AL$$

$$L\,(IM + U)\, L^{-1} = KA, \quad KAK + C = LIL'$$

Из этой системы получим матрицы производящей функции

$$M = -{}^1/_2 iE_k \dotplus O_{n-k}, L = E, \ K = iE_k \dotplus O_{n-k}$$

Каноническое преобразование получим в виде

$$x_1 = q_1 - ip_1, \quad x_2 = q_2 - ip_2, \ldots, \quad x_k = q_k - ip_k, \quad x_{k+1} = q_{k+1}, \ldots,$$
$$x_n = q_n, \quad y_1 = -{}^1/_2 iq_1 + {}^1/_2 p_1, \ldots, y_k = -{}^1/_2 iq_k + {}^1/_2 p_k, \ y_{k+1} =$$
$$= p_{k+1}, \ldots, y_n = p_n$$

В результате преобразования, положив $\lambda_j = i\omega_j$, получим новый гамильтониан в следующем виде:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \omega_j (p_j^2 + q_j^2) + \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^{n} p_j^2$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williamson J.* On an algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems.— Amer. J. Math., 1936, v. 58, No. 1, p. 141.
2. *Булгаков Б. В.*, О нормальных координатах.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 2, с. 273.
3. *Roels J.*, *Louterman G.* Normalisation des systèmes linéaires canoniques et application au problème restreint des trois corps.— Celest. Mech., 1970, v. 3, No. 1, p. 129.
4. *Burgoyne N.*, *Chushman R.* Normal Forms for real linear Hamiltonian Systemes with purely Imaginary eigenvalues.— Celest. Mech., 1974, v. 8, No. 4, p. 435.
5. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
6. *Potter J. E.* Matrix quadratic solutions.— SIAM J. Appl. Math., 1966, v. 14, No. 3, p. 496
7. *Martensson K.* On the matrix Riccaty equation.— Information Sci., 1971, v. 3, No. 1, p. 17.
8. *Квакернаак Х.*, *Сиван Р.*, Линейные оптимальные системы управления. М: Мир, 1977. 650 с.
9. *Laub A. J.*, *Meyer K.* Canonical Forms for Symplectic and Hamiltonian Matrices.— Celest. Mech., 1974, v. 9, No. 2, p. 213.
10. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию 18.VI.1980