Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 6, 1981

УДК 531.36:534

ОЦЕНКИ В ТЕОРЕМЕ КОЛМОГОРОВА О СОХРАНЕНИИ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

Нейштадт А. И.

Рассмотрим гамильтонову систему, отличающуюся от интегрируемой малым возмущением. Согласно теореме Колмогорова [1—3], большинство имеющихся в невозмущенной системе инвариантных торов при возмущении не разрушается, а лишь немного деформируется. Ниже получены следующие оценки: для возмущения величины ε при обычных условиях невырожденности мера множества разрушающихся торов и деформация сохраняющихся торов оцениваются сверху величинами порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Эти оценки неулучшаемы. Доказательство следует доказательству [2, 3] теоремы Колмогорова с более точным проведением промежуточных оценок. Аналогичные оценки в теореме Мозера об инвариантных кривых отображения плоскости в себя получены в работе [4], а для отображений в многомерном случае — в работе [5].

Сохранение большей части инвариантных торов было доказано [3] и для вырожденных задач, в том числе для задачи о вечной адиабатической инвариантности переменной действия при медленном изменении функции Гамильтона. Ниже будет показано, что в этой задаче мера разрушающихся торов оценивается сверху величиной порядка $\exp(-c/\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ задает скорость изменения функции Гамильтона, $c > 0$ — постоянная. Деформация сохраняющихся торов оценивается величиной порядка ε, так что переменная действия всегда остается в ε-окрестности своего начального значения.

1. Формулировка условий и результата. Будем рассматривать гамильтонову систему с функцией Гамильтона

$$H(I, \varphi, \varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon) \tag{1.1}$$

где I, φ — n-мерные векторы, ε — малый положительный параметр, функция H_1 (2π)-периодична по компонентам φ.

Предполагаем, что функция H, ограниченная область G и положительные постоянные ρ, σ, ε_0, ϑ, Θ, ϑ_1, Θ_1, η, C, c, D удовлетворяют следующим условиям.

1°. При $\operatorname{Re} I \in G$, $|\operatorname{Im} I| < \rho$, $\operatorname{Re}\varphi \in T^n$, $|\operatorname{Im}\varphi| < \sigma$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$ функция H аналитична и выполнены оценки $|\partial^2 H_0/\partial I^2| < \Theta$, $|H_1| < C$, $|\partial H_1/\partial I| < c$. При вещественных I, φ значения H вещественны. (Здесь T^n — n-мерный тор, $|\cdot|$ — модуль комплексного числа, норма вектора или матрицы).

2°. Выполнено одно из двух условий.

Условие невырожденности. Отображение A, задаваемое формулой $\omega = A(I) = \partial H_0/\partial I$, — диффеоморфизм своей области определения на ее образ и удовлетворяет оценкам

$$\vartheta\, |dI| \leqslant |dA| \leqslant \Theta\, |dI| \tag{1.2}$$

Условие изоэнергетической невырожденности. Поверхности уровня $H_0 = \text{const}$ — неособые: $\vartheta_1 < | \partial H_0/\partial I | < \Theta_1$. Ограничение на каждую такую поверхность отображения A_1, задаваемого формулой $A_1(I) = (\partial H_0/\partial I)/ | \partial H_0/\partial I |$,— диффеоморфизм своей области определения на ее образ. Оценки (1.2) выполнены для dI, удовлетворяющих соотношению $(\partial H_0/\partial I)\, dI = 0$. При $I \in G$ выполнено неравенство $| H_0 | < \eta$.

3°. При любом $\delta > 0$ выполнено неравенство $\text{mes}\,(G \setminus G - \delta) < D\delta$, где $(G - \delta)$ — множество точек, замкнутые δ-окрестности которых принадлежат G.

В дальнейшем будем называть постоянными и обозначать через C_i, c_i, a_i положительные величины, которые зависят только от введенных выше постоянных $n, \rho, \sigma, \varepsilon_0, \vartheta, \Theta, \vartheta_1, \Theta_1, \eta, C, c, D$. Появление C_i в тексте в некотором соотношении эквивалентно утверждению, что существует постоянная C_i, удовлетворяющая этому соотношению (и аналогично для других постоянных).

Теорема 1. При любых $\varepsilon, \varkappa$, удовлетворяющих условиям $C_1 \sqrt{\varepsilon} \leqslant \varkappa < C_2^{-1}$, множество $F = G \times T^n$ представимо в виде объединения двух множеств, $F_\varkappa$ и $F_\varkappa'$, со следующими свойствами.

1°. $\text{mes}\, F_\varkappa' < C_3 \sqrt{\varepsilon}$.

2°. Множество $F_\varkappa$ — объединение инвариантных n-мерных торов T_ξ системы с гамильтонианом (1.1). Переменная ξ, нумерующая торы,— n-мерный вектор, принимающий значения из некоторого подмножества области G. Тор T_ξ параметрически задается уравнениями

$$I = \xi + f_\xi(Q), \quad \varphi = Q + g_\xi(Q), \quad Q \in T^n$$

Функции f_ξ, g_ξ аналитичны по Q и удовлетворяют оценкам $| f_\xi | < C_4\varepsilon/\varkappa$, $| g_\xi | < C_5\varepsilon/\varkappa^2$.

3°. Движение на торе T_ξ условно-периодическое; оно задается формулой $\dot{Q} = \omega_\xi$, вектор частот ω_ξ удовлетворяет оценкам $| (\omega_\xi, k) | \geqslant \varkappa\, | k |^{-n}$ для всех целочисленных векторов $k \neq 0$.

Эта теорема доказана в п. 2.

Положив в теореме 1 $\varkappa = C_1\sqrt{\varepsilon}$, получим следующий результат.

Следствие 1. При $0 < \varepsilon < C_6^{-1}$ множество F представимо в виде $F = U \cup U'$, где $\text{mes}\, U' < C_7 \sqrt{\varepsilon}$, а множество U — объединение n-мерных инвариантных торов T_ξ, вдоль каждого из которых $| I - \xi | < C_8\sqrt{\varepsilon}$ при некотором $\xi \in R^n$.

Таким образом, мера множества разрушающихся при возмущении торов есть $O(\sqrt{\varepsilon})$. Каждый инвариантный тор из множества U отличается от некоторого инвариантного тора невозмущенной задачи $I = \xi = \text{const}$ деформацией $O(\sqrt{\varepsilon})$. Торы из U деформируются по-разному. Согласно теореме 1, мера множества, состоящего из инвариантных торов, деформированных больше, чем на $\varepsilon/\varkappa$, есть $O(\varkappa)$.

Примеры маятника в слабом поле тяжести ($H = {}^1/_2\, I^2 - \varepsilon \cos \varphi$) показывают, что эти оценки неулучшаемы.

Замечание. В работе [5] аналогичные оценки доказаны для симплектических отображений достаточной гладкости близких к интегрируемым. Из результатов [5] можно путем редукции гамильтоновой системы к симплектическому отображению вывести в случае изоэнергетической невырожденности оценки следствия 1 (при $n = 2$ эти оценки можно вывести из результатов [4]). Дополнительно из этих результатов вытекает, что инвариантные торы возмущенной системы можно включить в гладкое семейство торов.

Рассмотрим теперь случай двух степеней свободы. Предполагаем выполненным условие изоэнергетической невырожденности. В этом случае двумерные инвариантные торы делят трехмерный уровень энергии $H = \mathrm{const}$ и из сохранения большей части торов следует, что для всех начальных данных значения переменных I вдоль движения всегда будут близки к своим начальным значениям [2]. Из теоремы 1 вытекает, что в рассматриваемом случае размеры щелей между торами и деформация каждого тора есть $O(\sqrt{\varepsilon})$. Поэтому приходим к такому утверждению.

Следствие 2. Пусть система с двумя степенями свободы изоэнергетически невырождена и выполнены условия теоремы 1. Тогда при $0 < \varepsilon < C_9^{-1}$ для всех начальных данных $(I_0, \varphi_0) \in (G - C_{10}\sqrt{\varepsilon}) \times T^2$ вдоль движения выполнено неравенство

$$|I(t) - I_0| < C_{11}\sqrt{\varepsilon}, \quad -\infty < t < \infty$$

Пример 1 [3]. Рассмотрим плоскую ограниченную круговую задачу трех тел. Пусть Солнце имеет массу 1, а Юпитер — ε. Согласно следствию 2, колебания полуоси и эксцентриситета астероида есть $O(\sqrt{\varepsilon})$ (если невозмущенная орбита астероида не пересекает орбиту Юпитера).

Пример 2 [2]. Рассмотрим вращение тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Пусть ε — отношение разности между максимальным и минимальным значениями потенциальной энергии тела к его кинетической энергии в начальный момент. Тогда во все время движения относительные колебания модуля вектора кинетического момента и колебания угла между этим вектором и вертикалью будут $O(\sqrt{\varepsilon})$ (при начальных данных, удаленных от сепаратрис задачи Эйлера — Пуансо).

2. Доказательство теоремы 1. Доказательство для определенности проведено в предположении, что выполнено условие невырожденности п. 1. Конструкция в целом повторяет приведенную в работах [2, 3] с изменением промежуточных оценок. Предполагается, что норма $|\cdot|$ задается формулой $|X| = \max_{i,j} |x_{i,j}|$ при $X = (x_{i,j})$.

2.1. *Вспомогательные утверждения. Лемма 1.* В условиях теоремы 1 при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\varkappa \geqslant c_1\sqrt{\varepsilon}$ существуют последовательности:

— положительных чисел β_s, γ_s, M_s, N_s

— вложенных областей $V^{(s)}$ в пространстве I и $W^{(s)}$ в пространстве (I, φ)

— канонических диффеоморфизмов $B^{(s)}$, отображающих $W^{(s)}$ в $W^{(s-1)}$

— функций $H^{(s)} = H_0^{(s)}(I) + H_1^{(s)}(I, \varphi)$, определенных и аналитичных при $(I, \varphi) \in W^{(s)}$

— диффеоморфизмов $A^{(s)}$, отображающих $V^{(s)}$ в пространство частот ω

обладающие следующими свойствами.

1°. Числовые последовательности строятся по правилам

$$\gamma_s = 2^{-(s+1)}\sigma, \quad M_0 = C\varepsilon, \quad M_s = \frac{c_3 2^s M_{s-1}^2}{\varkappa^2 \gamma_s^{2(2n+1)}} \left| \ln \frac{c_2 M_{s-1}}{\varkappa^2} \right|^n, \quad s \geqslant 1,$$

$$N_s = \frac{4}{\gamma_s} \left| \ln \frac{c_2 M_{s-1}}{\varkappa^2} \right|, \quad \beta_s = 2^{-s}\vartheta^{-1}\varkappa N_s^{-n}$$

2°. Области $V^{(s)}$, $W^{(s)}$ строятся по правилам $V^{(0)} = \{I : \operatorname{Re} I \in G, |\operatorname{Im} I| < \rho\}$, $W^{(0)} = \{I, \varphi : I \in V^{(0)}, |\operatorname{Im} \varphi| < \sigma\}$

$$\bar V^{(s)} = \left\{ I : I \in V^{(s-1)}, \quad \left| \left(k, \frac{\partial H_0^{(s-1)}}{\partial I} \right) \right| > \varkappa |k|^{-n}, \ k \in Z^n, \right.$$
$$\left. 1 \leqslant |k| \leqslant N_s \right\}$$
$$V^{(s)} = \bar V^{(s)} - \beta_s$$
$$W^{(s)} = \{I, \varphi : I \in V^{(s)}, |\operatorname{Im} \varphi| < \sigma - \sum_{i=1}^{s} \gamma_i\}, \quad s \geqslant 1$$

3°. Канонический аналитический диффеоморфизм $B^{(s)}: (I^{(s)}, \varphi^{(s)}) \to (I^{(s-1)}, \varphi^{(s-1)})$ отображает $W^{(s)}$ в $W^{(s-1)}$ так, что выполнены оценки

$$|I^{(s)} - I^{(s-1)}| < \frac{c_4 M_{s-1}}{\varkappa \gamma_s^{2n+1}} < \frac{\beta_s}{2}$$
$$|\varphi^{(s)} - \varphi^{(s-1)}| < \frac{c_4 M_{s-1}}{\varkappa \beta_s \gamma_s^{2n}} < \frac{\gamma_s}{2}$$
$$|dI^{(s-1)}| \leqslant \left(1 + \frac{c_5 M_{s-1}}{\varkappa \beta_s \gamma_s^{2n+1}}\right) |dI^{(s)}| + \frac{c_5 M_{s-1}}{\varkappa \gamma_s^{2n+2}} |d\varphi^{(s)}|$$
$$|d\varphi^{(s-1)}| \leqslant \frac{c_5 M_{s-1}}{\varkappa \beta_s^2 \gamma_s^{2n}} |dI^{(s)}| + \left(1 + \frac{c_5 M_{s-1}}{\varkappa \beta_s \gamma_s^{2n+1}}\right) |d\varphi^{(s)}|$$

Для $s = 1$ вторую оценку можно уточнить

$$|\varphi^{(1)} - \varphi^{(0)}| < \frac{c_6 M_0}{\varkappa^2 \gamma_1^{3(n+1)}}$$

Диффеоморфизм $B^{(s)}$ переводит вещественные точки в вещественные.

4°. Гамильтониан $H^{(s)}$ определяется формулами

$$H^{(0)}(I, \varphi) = H(I, \varphi), \ H^{(s)}(I, \varphi) = H(B^{(1)} \circ B^{(2)} \circ \ldots \circ B^{(s)}(I, \varphi)),$$
$$s \geqslant 1$$

и удовлетворяет оценке $|H_1^{(s)}| < M_s$.

5°. Отображение $A^{(s)}$ задается формулой

$$A^{(s)}(I) = \partial H_0^{(s)}(I) / \partial I$$

является диффеоморфизмом $V^{(s)}$ на $A^{(s)}(V^{(s)})$ и удовлетворяет оценкам

$$1/2\, \vartheta\, |dI| \leqslant |dA^{(s)}| \leqslant 2\Theta\, |dI|$$

Последовательности $A^{(s)}$ и обратных отображений $A^{(s)^{-1}}$ удовлетворяю оценкам

$$A^{(s)}(V^{(s)}) \subset A^{(s-1)}(\bar V^{(s)}) - 1/4\, \vartheta \beta_s$$
$$|A^{(s)} - A^{(s-1)}| < \frac{M_{s-1}}{\beta_s}, \quad |A^{(s)^{-1}} - A^{(s-1)^{-1}}| < \frac{4 M_{s-1}}{\vartheta \beta_s}$$

Доказательство леммы 1 непосредственно вытекает из приводимых ниже лемм 2 и 3.

Лемма 2. Пусть область $V \subset C^n$, функция $\Phi(I, \varphi) = \Phi_0(I) + \Phi_1(I, \varphi)$ и число M обладают следующими свойствами.

1°. Функция Φ аналитична в области

$$W = \{I, \varphi: I \in V, \ |\operatorname{Im} \varphi| < \sigma_1\}, \quad {}^1/{}_2\sigma < \sigma_1 \leqslant \sigma$$

и удовлетворяет оценке $|\Phi_1| < M$; в $\operatorname{Re} W$ функции Φ_0, Φ_1 вещественны.

2°. Отображение A, задаваемое формулой

$$A(I) = \partial\Phi_0(I)/\partial I$$

является диффеоморфизмом V на $A(V)$ и удовлетворяет оценкам

$${}^1/{}_2\vartheta \, |dI| \leqslant |dA| \leqslant 2\Theta \, |dI|$$

Тогда для любых положительных чисел $\varkappa$, s, β, γ, N, связанных условиями

$$\frac{M}{\varkappa\beta\gamma^{2n+1}} < c_7^{-1}, \quad \frac{M}{\beta^2} < c_8^{-1}, \quad \beta = 2^{-s}\vartheta^{-1}\varkappa N^{-n}, \quad N = \frac{4}{\gamma}\left|\ln\frac{c_2 M}{\varkappa^2}\right| \tag{2.1}$$

выполнено следующее.

1) Определим области $\overline{V}$, V', W' соотношениями

$$\overline{V} = \{I: I \in V, \ |(k, \partial\Phi_0/\partial I)| > \varkappa\,|k|^{-n}, \ k \in Z^n, \ 1 \leqslant |k| \leqslant N\}$$

$$V' = \overline{V} - \beta, \quad W' = \{I, \varphi: I \in V', \ |\operatorname{Im} \varphi| < \sigma_1 - \gamma\}$$

Существует канонический аналитический диффеоморфизм $B: J, \psi \to I, \varphi$, отображающий W' в W и удовлетворяющий оценкам

$$|J - I| < \frac{c_4 M}{\varkappa\gamma^{2n+1}} < \frac{\beta}{2}, \quad |\psi - \varphi| < \frac{c_4 M}{\varkappa\beta\gamma^{2n}} < \frac{\gamma}{2} \tag{2.2}$$

$$|dI| \leqslant \left(1 + \frac{c_5 M}{\varkappa\beta\gamma^{2n+1}}\right)|dJ| + \frac{c_5 M}{\varkappa\gamma^{2n+2}}|d\psi|$$

$$|d\varphi| \leqslant \frac{c_5 M}{\varkappa\beta^2\gamma^{2n}}|dJ| + \left(1 + \frac{c_5 M}{\varkappa\beta\gamma^{2n+1}}\right)|d\psi|$$

Если дополнительно задано, что $|\partial\Phi/\partial I| < M$, то

$$|\psi - \varphi| < \frac{c_6 M}{\varkappa^2\gamma^{3(n+1)}}$$

Диффеоморфизм B переводит вещественные точки в вещественные.

2) Представим функцию $\Phi'(I, \varphi) = \Phi(B(I, \varphi))$ в виде

$$\Phi'(I, \varphi) = \Phi_0'(I) + \Phi_1'(I, \varphi)$$

$$\Phi_0'(I) = \Phi_0(I) + (2\pi)^{-n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\Phi_1(I, \varphi)\,d\varphi, \quad \Phi_1' = \Phi' - \Phi_0'$$

Справедлива оценка

$$|\Phi_1'| < \frac{c_3 2^s M^2}{\varkappa^2\gamma^{2(2n+1)}}\left|\ln\frac{c_2 M}{\varkappa^2}\right|^n \tag{2.3}$$

3) Отображение A', определяемое формулой

$$A'(I) = \partial\Phi'_0(I)/\partial I$$

является диффеоморфизмом V' на $A'(V')$ и удовлетворяет оценкам

$$A'(V') \subset A(\overline{V}) - {}^1/{}_4\vartheta\beta$$

$$|A' - A| < \frac{M}{\beta}, \quad |A'^{-1} - A^{-1}| < \frac{4M}{\vartheta\beta}, \quad |dA' - dA| \leqslant \frac{2nM}{\beta^2}|dI|$$

Доказательство. Рассмотрим ряд Фурье функции Φ_1

$$\Phi_1 = \overline{\Phi}_1(I) + \Phi_{1N}(I, \varphi) + R_N(I, \varphi)$$

$$\Phi_{1N} = \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant N} f_k(I) \exp(i(k, \varphi)), \quad R_N = \sum_{|k|>N} f_k(I) \exp(i(k, \varphi))$$

Рассмотрим каноническую замену переменных $I, \varphi \to J, \psi$, определяемую формулами

$$I = J + \frac{\partial G(J, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad \psi = \varphi + \frac{\partial G(J, \varphi)}{\partial J} \tag{2.4}$$

$$G(I, \varphi) = \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant N} \frac{if_k(I) \exp(i(k, \varphi))}{(k, \partial\Phi_0(I)/\partial I)}$$

где число N пока произвольно.

Аналогично [3] доказывается следующее утверждение. Пусть положительные числа $\varkappa, \beta, \gamma$ удовлетворяют первому неравенству (2.1). Тогда при $(J, \psi) \in W'$ формулы (2.4) определяют канонический аналитический диффеоморфизм $B: W' \to W$, удовлетворяющий оценкам (2.2).

Сделаем замену переменных по формулам (2.4) в рассматриваемой гамильтоновой системе. Изменение новых переменных будет описываться гамильтонианом

$$\Phi'(J, \psi) = \Phi_0(J) + \left[\frac{\partial\Phi_0}{\partial J}\frac{\partial G}{\partial \varphi} + \Phi_1(J, \varphi)\right] + \tag{2.5}$$
$$+ \left[\Phi_0\left(J + \frac{\partial G}{\partial \varphi}\right) - \Phi_0(J) - \frac{\partial\Phi_0}{\partial J}\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right] + \left[\Phi_1\left(J + \frac{\partial G}{\partial \varphi}, \varphi\right) - \Phi_1(J, \varphi)\right]$$

(в правой части (2.5) надо выразить φ через ψ согласно (2.4)). В силу определения G (2.4) член в первых квадратных скобках равен $\overline{\Phi}_1(J) + R_N(J, \varphi)$. Обозначим

$$\Phi_0'(J) = \Phi_0(J) + \overline{\Phi}_1(J), \quad \Phi_1'(J, \psi) = \Phi'(J, \psi) - \Phi_0'(J)$$

Оценивая правую часть (2.5), аналогично [3] получим

$$|\Phi_1'| < \frac{\theta c_4^2 n^2 M^2}{\varkappa^2 \gamma^{2(2n+1)}} + \frac{2c_4 n M^2}{\varkappa\beta\gamma^{2n+1}} + \frac{a_1 M}{\gamma^n} e^{-1/4\gamma N}$$

(здесь использованы оценка Коши для $\partial\Phi_1/\partial J$ и оценка остаточного члена ряда Фурье из [3]).

Выбирая $c_2 = \theta c_4^2$, N, β — согласно (2.1), получим оценку (2.3).

Из определения A' и оценки Коши при $I \in V'$ получим

$$|A(I) - A'(I)| = |\partial\overline{\Phi}_1/\partial I| < M\beta^{-1}$$
$$|dA - dA'| = |(\partial^2\overline{\Phi}_1/\partial I^2)\, dI| \leqslant 2nM\beta^{-2}|dI|$$

Оставшиеся оценки леммы 2 вытекают из «леммы о вариации частоты» [3].

Лемма 3. Рассмотрим последовательность M_s из леммы 1. При $\varkappa \geqslant 2c_9\sqrt{\varepsilon}$ выполнена оценка

$$M_s < c_{10}\varepsilon\left(\frac{c_9^2\varepsilon}{\varkappa^2}\right)^{r-1}, \quad r = \left(\frac{3}{2}\right)^s$$

Доказательство. Определим число $a_1 > 0$ условием: при $0 < z < a_1^{-1}$ выполнено неравенство $|\ln z|^n < z^{-1/2}$. Покажем, что можно подобрать $a_2 > 0$ так, что при $\varkappa > a_2\sqrt{\varepsilon}$ выполнено неравенство

$$c_2 M_i \varkappa^{-2} < a_1^{-1} \tag{2.6}$$

При $\varkappa > (a_1 c_2 C\varepsilon)^{1/2}$ неравенство (2.6) выполнено для $i = 0$. Допустим, что оно выполнено при $0 \leqslant i \leqslant s-1$. Используя определение M_i, γ_i, получим для $1 \leqslant i \leqslant s$:

$$M_i < \frac{c_3 2^i M_{i-1}^2}{\varkappa^2\gamma_i^{2(2n+1)}}\left(\frac{\varkappa^2}{c_2 M_{i-1}}\right)^{1/2} = \frac{a_3 a_4^i M_{i-1}^{3/2}}{\varkappa}$$

Отсюда

$$M_s < \frac{a_3 a_4^s}{\varkappa}\left(\frac{a_3 a_4^{s-1} M_{s-2}^{3/2}}{\varkappa}\right)^{3/2} = \frac{a_3^{1+3/2} a_4^{s+3/2(s-1)} M_{s-2}^{(3/2)^2}}{\varkappa^{1+3/2}} <$$

$$< \frac{a_3^{2(r-1)} a_4^{6r-2s-6}}{\varkappa^{2(r-1)}} M_0^{\,r} < a_5 M_0 \left(\frac{a_6 M_0}{\varkappa^2}\right)^{r-1}, \quad r = \left(\frac{3}{2}\right)^s$$

Так как $M_0 = C\varepsilon$, имеем

$$M_s < c_{10}\varepsilon \left(\frac{a_7\varepsilon}{\varkappa^2}\right)^{r-1}, \quad \frac{c_4 M_s}{\varkappa^2} < a_8 \left(\frac{a_7\varepsilon}{\varkappa^2}\right)^r \tag{2.7}$$

Теперь ясно, что для достаточно большого a_2 при $\varkappa > a_2\sqrt{\varepsilon}$ неравенство (2.6) выполнено и для $i = s$. По индукции при $\varkappa > a_2\sqrt{\varepsilon}$ неравенства (2.6), (2.7) выполнены для всех i, s. Из (2.7) вытекает оценка леммы 3.

2.2. *Вывод теоремы 1 из лемм 1,3.* Пусть

$$C_1\sqrt{\varepsilon} \leqslant \varkappa < C_2^{-1}, \quad C_1 = \max(c_1, 2c_9), \quad C_2 = \max(2\vartheta^{-1}\rho^{-1}, \quad C_1^{-1}\varepsilon_0^{-1/2})$$

Рассмотрим объекты β_s, γ_s, M_s, N_s, $V^{(s)}$, $W^{(s)}$, $B^{(s)}$, $H^{(s)}$, $A^{(s)}$, определенные в лемме 1. Обозначим

$$V^{(\infty)} = \bigcap_{i=0}^{\infty} V^{(i)}, \quad W^{(\infty)} = \bigcap_{i=0}^{\infty} W^{(i)}$$

Аналогично [3] доказывается, что на множестве $W^{(\infty)}$ последовательность канонических диффеоморфизмов $S^{(i)} = B^{(1)} \circ B^{(2)} \circ \ldots \circ B^{(i)}$ равномерно сходится к некоторому непрерывному взаимно-однозначному отображению $S^{(\infty)}$, последовательность гамильтонианов $H^{(i)}(I, \varphi)$ сходится к гамильтониану $H^{(\infty)}(I)$, не зависящему от фазы φ, а на $V^{(\infty)}$ последовательность диффеоморфизмов $A^{(i)}$ сходится к непрерывному взаимно-однозначному отображению $A^{(\infty)}$. Аналогично [3] можно показать, что $\operatorname{mes}(F \setminus W^{(\infty)}) < C_3\varkappa$.

Обозначим $F_\varkappa = \operatorname{Re} S^{(\infty)}(W^{(\infty)})$, $F_\varkappa' = F \setminus F_\varkappa$. Так как все $S^{(i)}$ сохраняют меру, то

$$\operatorname{mes} F_\varkappa = \operatorname{mes} S^{(\infty)}(W^{(\infty)}) = \operatorname{mes} \bigcap_i S^{(i)}(W^{(i)}) =$$

$$= \operatorname{mes} \bigcap_i W^{(i)} = \operatorname{mes} W^{(\infty)}$$

$$\operatorname{mes} F_\varkappa' = \operatorname{mes} F \setminus F_\varkappa = \operatorname{mes} F \setminus W^{(\infty)} < C_3\varkappa$$

(мерой множества называем меру вещественной компоненты этого множества).

Далее аналогично [3] доказывается, что в переменных ξ, Q, задаваемых заменой $(I, \varphi) = S^{(\infty)}(\xi, Q)$, исходный гамильтониан H определяет на $F_\varkappa$ движение $\xi = \mathrm{const}$, $Q^\cdot = A^{(\infty)}(\xi)$. Это означает, что множество $F_\varkappa$ состоит из n-мерных инвариантных торов системы с гамильтонианом (1.1). Каждый такой тор можно задавать либо значением $\xi \in \operatorname{Re} V^{(\infty)}$, либо значением $\omega = A^{(\infty)}(\xi) \in A^{(\infty)}(V^{(\infty)})$, $|(k, \omega)| \geqslant \varkappa |k|^{-n}$, $|k| \neq 0$, $k \in Z^n$.

Наконец, из лемм 1 и 3 следует, что замена $(I, \varphi) = S^{(\infty)}(\xi, Q)$ аналитична по Q и удовлетворяет оценкам

$$|I - \xi| < C_4 \frac{\varepsilon}{\varkappa}, \quad |\varphi - Q| < C_5 \frac{\varepsilon}{\varkappa^2}$$

что и утверждалось.

3. Система с двумя степенями свободы в случае собственного вырождения. Рассмотрим гамильтонову систему с функцией Гамильтона

$$H(I, \varphi, \varepsilon) = H_0(I_0) + \varepsilon H_{10}(I) + \varepsilon H_{11}(I, \varphi) + \varepsilon^2 H_2(I, \varphi, \varepsilon) \tag{3.1}$$

$$I = (I_0, I_1), \quad \varphi = (\varphi_0, \varphi_1), \quad \int_0^{2\pi} H_{11}\, d\varphi_0 = 0$$

где ε — малый положительный параметр, функция H (2π)-периодична по φ_0, φ_1.

Как известно [3], в общем случае однократно вырожденной системы с двумя степенями свободы гамильтониан приводится к виду (3.1). Предполагаем, что функция H, положительные постоянные ρ, σ, ε_0, ϑ, Θ, ϑ_1, C, c, a_0, b_0, a_1, b_1 и прямоугольная область $G = (a_0, b_0) \times (a_1, b_1)$ таковы, что при $\operatorname{Re} I \in G$, $|\operatorname{Im} I| < \rho$, $\operatorname{Re} \varphi \in T^2$, $|\operatorname{Im} \varphi| < \sigma$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$ функция H аналитична и выполнены оценки

$$|H_{11}| + |H_2| < C, \; |\partial H_{11} / \partial I| < c$$

$$\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_0^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 H_{10}}{\partial I^2}\right| < \Theta, \quad \left|\frac{\partial H_0}{\partial I_0}\right| > \vartheta, \quad \left|\frac{\partial H_{10}}{\partial I_1}\right| > \vartheta, \quad \left|\frac{\partial^2 H_{10}}{\partial I_1^2}\right| > \vartheta_1$$

При вещественных I, φ значения H вещественны.

Теорема 2. Существуют положительные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_7$, такие, что при $0 < \varepsilon < C_1^{-1}$ множество $F = (G - C_2\varepsilon) \times T^2$ представимо в виде объединения двух множеств (F_ε и F_ε') со следующими свойствами:

1°. $\operatorname{mes} F_\varepsilon' < C_3 \exp(-C_4^{-1}/\varepsilon)$.

2°. Множество F_ε — объединение двумерных инвариантных торов T_ξ системы с гамильтонианом (3.1). Переменная ξ, нумерующая торы,— двумерный вектор, принимающий значения из некоторого подмножества области G. Тор T_ξ параметрически задается уравнениями

$$I = \xi + f_\xi(Q), \; \varphi = Q + g_\xi(Q), \; Q \in T^2$$

Функции f_ξ, g_ξ аналитичны по Q и удовлетворяют оценкам

$$|f_\xi| < C_5\varepsilon, \; |g_\xi| < C_6\varepsilon$$

3°. Движение на торе T_ξ задается формулой $Q^\cdot = \omega_\xi$, вектор частот $\omega_\xi = (\omega_0, \varepsilon\omega_1)$ удовлетворяет оценкам $|(\omega_\xi, k)| > (\exp(-C_4^{-1}/\varepsilon))\, |k|^{-2}$ для всех целочисленных векторов $k \neq 0$.

4°. При любых начальных данных $(I(0), \varphi(0)) \in F$ вдоль движения выполнено неравенство

$$|I(t) - I(0)| < C_7\varepsilon, \; -\infty < t < \infty$$

К системе с гамильтонианом (3.1) приводятся уравнения движения в задачах о вечной адиабатической инвариантности переменных действия в колебательной системе с одной степенью свободы при медленном периодическом изменении функции Гамильтона и в колебательной системе с двумя степенями свободы с плавной зависимостью функции Гамильтона от одной из координат [3]. Из теоремы 2 вытекает, что в этих задачах при обычных предположениях о невырожденности [3] лишь доля $O(\exp(-c/\varepsilon))$, $c =$

$=$ const, фазового пространства может быть не заполнена инвариантными торами. Изменение переменных действия ограничено величиной порядка ε. Здесь ε характеризует плавность зависимости гамильтониана соответственно от времени или от выделенной координаты.

Пример 3 [3]. Рассмотрим движение заряжённой частицы в аксиально-симметричной магнитной ловушке. Пусть отношение начального радиуса ларморовской спирали частицы к характерному размеру ловушки равно ε, а отношение этого радиуса к начальному шагу спирали — величина порядка единицы. Тогда во все время движения относительные колебания магнитного момента частицы ограничены величиной порядка ε. Положение магнитной пробки может отличаться от рассчитанного по адиабатической теории лишь на величину порядка ларморовского радиуса.

Опишем схему доказательства теоремы 2. В системе (3.1) есть одна быстрая переменная — угол φ_0. Классическая теория возмущений позволяет близкой к тождественной канонической заменой переменных исключить зависимость гамильтониана от φ_0 в любом конечном порядке по ε. Более аккуратные оценки показывают [6], что зависимость от ε можно перенести в экспоненциально малые члены: аналитической канонической заменой переменных $(I, \varphi) \to (J, \psi)$ гамильтониан приводится к виду

$$
\begin{gathered}
H = H_0(J_0) + \varepsilon H_{10}(J) + \varepsilon^2\Phi_2(J, \psi_1, \varepsilon) + \Phi_3(J, \psi, \varepsilon) \\
|I - J| + |\varphi - \psi| = O(\varepsilon),\ J = (J_0, J_1),\ \psi = (\psi_0, \psi_1) \\
\Phi_3 = O(\exp(-c_1^{-1}/\varepsilon)),\ c_1 = \text{const},\ c_1 > 0
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

Система с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_{10} + \varepsilon^2\Phi_2$ интегрируется канонической заменой $(J, \psi) \to (J', \psi')$, причем

$$
\begin{gathered}
|J - J'| + |\psi - \psi'| = O(\varepsilon) \\
J' = (J_0', J_1'),\ \psi' = (\psi_0', \psi_1'),\ J_0' = J_0
\end{gathered} \tag{3.3}
$$

Сделав эту замену в системе (3.2), приведем гамильтониан к виду

$$
\begin{gathered}
H = H_0(J_0') + \varepsilon\Psi_0(J', \varepsilon) + \Psi_1(J', \psi', \varepsilon) \\
\Psi_1 = O(\exp(-c_1^{-1}/\varepsilon))
\end{gathered} \tag{3.4}
$$

Рассмотрим теперь гамильтониан (3.4) как возмущение гамильтониана $H_0(J'_0) + \varepsilon\Psi_0(J', \varepsilon)$. Для такой задачи условия теоремы 1 формально не выполнены (главная часть гамильтониана зависит от ε), но само утверждение теоремы справедливо и доказывается так, как описано в п. 2. Поэтому все фазовое пространство системы (3.4), кроме экспоненциально малой меры, заполнено инвариантными торами, экспоненциально мало отличающимися от торов $J' =$ const. Объединяя этот вывод с оценками (3.2), (3.3), получаем утверждение теоремы 2.

Автор благодарит Арнольда В. И. за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 4, с. 527—530.
2. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 5, с. 13—40.

3. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике.— Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 6, с. 91—192.
4. *Лазуткин В. Ф.* К теореме Мозера об инвариантных кривых.— В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 14. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974, с. 109—120.
5. *Сванидзе Н. В.* Малые возмущения интегрируемой динамической системы с интегральным инвариантом.— В кн.: Краевые задачи математической физики. 10. Тр. МИАН СССР, 1980, т. 147, с. 124—146
6. *Нейштадт А. И.* О точности сохранения адиабатического инварианта.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 80—87.

Москва

Поступила в редакцию
11.II.1981