Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 6, 1981

УДК 629.195.1

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА УСТОЙЧИВЫХ РЕЗОНАНСНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Касаткин Г. В.

Рассматривается система дифференциальных уравнений, удовлетворяющая условию сохранения фазового объема. Показано, что устойчивые по Ляпунову резонансные решения этой системы обладают экстремальными свойствами, которые могут быть выявлены функционалами, определенными на множестве траекторий системы.

Нахождение устойчивых резонансных решений — часть общей проблемы выделения устойчивых решений систем дифференциальных уравнений, сформулированной в [1]. Частичное ее решение дает интегральный критерий устойчивости [2], справедливый для неконсервативных механических систем, движение которых описывается системами уравнений, содержащих малый параметр. Этот критерий подчеркивает экстремальные свойства резонансных решений. В работе [3] на основе введенного экстремального признака сделана попытка обосновать эволюцию планет Солнечной системы.

Иной подход к проблеме экстремальных свойств устойчивых резонансных движений развит в [4], где на примере конкретной механической системы показана возможная справедливость для некоторого класса механических систем следующей гипотезы. Пусть $U(q, t)$ — силовая функция, зависящая от вектора обобщенных координат q, периодическая по независимому аргументу t с периодом T, $q(q_0, q_0^{\cdot}, t)$ — решение системы уравнений движения с начальными данными g_0, $q_0^{\cdot}$ в момент $t = 0$. Предполагается, что функция

$$\langle U(q_0, q_0^{\cdot})\rangle = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{mT} \int_0^{mT} U(q(q_0, q_0^{\cdot}, t), t)\, dt$$

(m — целое) достигает максимальных значений на множестве начальных состояний в точках q_*, $q_*^{\cdot}$, отвечающих начальным значениям устойчивых по Ляпунову (по переменным q, $q^{\cdot}$) резонансных движений.

Ниже дается развернутое доказательство теоремы, сформулированной в [5], восполняющей некоторые пробелы приведенной гипотезы.

1. Рассмотрим неавтономную периодическую систему

$$dx/dt = X(x, t),\quad X(x, t+1) \equiv X(x, t),\quad x \in R^n,\quad \operatorname{div} X \equiv 0 \tag{1.1}$$

Последнему условию (сохранение фазового объема) удовлетворяют например, канонические системы.

Пусть $G_0 \subset R^n$ — множество начальных состояний, определенное в момент $t = 0$, и g_0^t — преобразование, задаваемое системой (1.1) при $t \geqslant 0$, которое переводит систему из начальной точки $x \in G_0$ в точку $x_t \in R^n$, т. е. $x_t = g_0^t x$ — решение системы (1.1) с начальным значением x. Считается, что решения удовлетворяют условиям единственности и непрерывной зависимости по начальным данным.

Теорема. Для того чтобы система (1.1) допускала устойчивое по Ляпунову периодическое решение периода, кратного единице, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) система допускает открытое множество $A_0 \subset G_0$, $\operatorname{mes}(A_0) \neq 0$, такое, что множество полутраекторий $\{x_t,\ t \geqslant 0,\ x \in A_0\}$ вложено в некоторый компакт M;

2) существует функция $\varkappa(x, t)$ из множества функций, непрерывных по x на M и непрерывных, периодических по t с периодом, соизмеримым единице, такая, что функция

$$K(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varkappa(x_t, t)\, dt \tag{1.2}$$

непрерывна в точке $y \in A_0$ и принимает строгое экстремальное значение (минимум или максимум) в этой точке; при этом точка y представляет начальное значение искомого периодического решения.

Существование функции $K(x)$ гарантируется при выполнении условия 1 для почти всех $x \in A_0$. Это следует из существования компакта $B \subset M$, $\operatorname{mes}(B) \neq 0$, инвариантного относительно $g_0{}^m$-преобразований (m принадлежит множеству целых чисел Z).

Действительно, рассмотрим открытое, измеримое множество $B^\circ = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$, где $A_k = g_0{}^k A_0$, $k \in Z$. Очевидно, $g_0{}^1 B^\circ \subset B^\circ$. Из свойства сохранения фазового объема $g_0{}^1$-преобразованием заключаем, что $g_0{}^1 B^\circ = B^\circ$ и, следовательно, $g_0{}^1 B = B$, где $B = \overline{B^\circ}$. Вывод о существовании функции $K(x)$ для почти всех $x \in B$ можно получить, распространяя доказательство эргодической теоремы для автономных систем [6] на случай периодических систем (1.1), допускающих инвариантный компакт B (относительно $g_0{}^m$-преобразований).

Пусть $\rho(x, y)$ — евклидова метрика фазового пространства R^n, $S(\varepsilon, y) = \{x\colon \rho(x, y) < \varepsilon\}$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке y. Под непрерывностью функции $K(x)$ в точке y понимается непрерывность в смысле топологии, индуцированной на множестве определения этой функции топологией пространства R^n. Условие строгого минимума функции $K(x)$ в точке y подразумевает следующее: существует шар $S(R, y) \subset \subset A_0$, такой, что

$$\inf_{x \in D(R,\varepsilon)} |K(x) - K(y)| > 0, \quad D(R, \varepsilon) = S'(R, y) \setminus S'(\varepsilon, y)$$

для любого ε из интервала $(0, R)$.

Штрих означает точки множества, в которых определена функция $K(x)$ ($S' \subset S$, $\operatorname{mes}(S') = \operatorname{mes}(S)$).

Приведем доказательство теоремы.

Достаточность. Без уменьшения общности можно считать, что функция $\varkappa(x, t)$ периодическая с периодом единица и доставляет функции $K(x)$ минимум, равный нулю. Рассмотрим траекторию, выходящую в момент $t = 0$ из точки x_n, $n \in Z$. Из (1.2) следует

$$K(x_n) = K(x) \tag{1.3}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, R)$ и найдем

$$a = \inf_{x \in D(R, \varepsilon)} K(x) > 0$$

$$K(x) \geqslant a, \quad x \in D(R, \varepsilon) \tag{1.4}$$

Вследствие непрерывности $K(x)$ в точке y существует $\delta \in (0, \varepsilon)$, такое, что

(1.5) $\quad K(x) < a,\ x \in S'(\delta, y)$

Обозначим множества $S(R, y)$ и $S(\delta, y)$ через α_0, β_0 и рассмотрим множества $\alpha_n = g_0{}^n\alpha_0$, $\beta_n = g_0{}^n\beta_0$. Имеем

(1.6) $\quad \beta_n \subset \alpha_n,\ \operatorname{mes}(\alpha_n) = \operatorname{mes}(\alpha_0) > \operatorname{mes}(\beta_n) = \operatorname{mes}(\beta_0) > 0$

В силу свойств $g_0{}^n$-преобразования и равенства (1.3) неравенства (1.4), (1.5) сохраняются, если $D(R, \varepsilon)$ и $S'(\delta, y)$ заменить на $\alpha'_n \setminus \beta'_n$ и β'_n соответственно.

Покажем, что y — начальное значение периодического решения периода, соизмеримого с единицей. Для этого достаточно, чтобы при некотором натуральном N выполнялось условие $y_N \in \alpha_0$ (тогда из условия 2 теоремы следует, что $y_N = y$).

Если предположить противное, то из (1.3) — (1.6) следует, что множества α_n, α_m при любых $n, m \in Z$, $n \neq m$, либо не пересекаются, либо их пересечение лежит в множестве $\alpha_n \setminus \beta_n$. В обоих случаях $\beta_n \setminus \beta_m = \varnothing$. Отсюда вытекает, что в компакт B вложено счетное число непересекающихся множеств β_n одной и той же ненулевой меры, чего быть не может. Полученное противоречие доказывает существование N, для которого выполнено $y_N = y$, т. е. y — начальное значение периодического решения.

Покажем устойчивость по Ляпунову (по переменным x) этого решения. Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0, R)$. Вследствие непрерывности решений по начальным данным существует $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$, такое, что

(1.7) $\quad x_t \in S(\varepsilon, y_t),\ x \in S(\varepsilon_1, y),\ t \in [0, N]$

Аналогично тому, как получены условия (1.4), (1.5), выводим

(1.8) $\quad K(x) \geqslant a,\ x \in D(\varepsilon, \varepsilon_1);\ K(x) < a,\ x \in S'(\delta, y)$

$$a = \inf_{x \in D(\varepsilon, \varepsilon_1)} K(x),\quad D(\varepsilon, \varepsilon_1) = S'(\varepsilon, y) \setminus S'(\varepsilon_1, y),\ \delta \in (0, \varepsilon_1)$$

Учитывая (1.3), (1.8) и то, что y — неподвижная точка g_0^{Nk}-преобразования при $k \in Z$, получим

(1.9) $\quad g_0^{Nk}(S'(\delta, y)) \subset S(\varepsilon_1, y)$

Из свойств $g_0{}^t$-преобразования следует

(1.10) $\quad g_0^{Nk}(S(\delta, y)) \subset S(\varepsilon_1, y)$

Объединяя (1.7) и (1.10), приходим к заключению об устойчивости решения $\{y_t,\ t \geqslant 0\}$.

Необходимость. Необходимость выполнения условия 1 теоремы в случае, когда система (1.1) допускает устойчивое периодическое решение $\{y_t,\ t \geqslant 0\}$ с периодом, соизмеримым единице, очевидна. Чтобы удовлетворить условию 2, рассмотрим функцию $\varkappa(x, t) = \rho(x, y_t)$. Функция

$$K(x) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \rho(x_t, y_t)\, dt$$

определяет среднее расстояние между траекториями с начальными значениями x и y. Можно показать, что функция $K(x)$ непрерывна в точке y и принимает в ней минимальное значение, равное нулю. Зафиксируем произвольное $\varepsilon_1 > 0$ и найдем $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$, такое, что $\rho(x_t, y_t) < \varepsilon_1$ при $t \geqslant 0$, $x \in S(\varepsilon_2, y)$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$. Покажем, что любая траектория, начинающаяся в момент $t = 0$ из множества $S(\varepsilon_2, y) \setminus \setminus S(\varepsilon, y)$, не может сколь угодно близко приблизиться к исследуемой периодической траектории в последующие моменты $t > 0$. Известно, что любая ε-окрестность точки y содержит компакт B_ε, инвариантный относительно g_0^{Nk}-преобразований (N — минимальный целый период решения y_t, $k \in Z$), причем неподвижная при этих преобразованиях точка y — внутренняя точка B_ε [7].

Пусть d_t — точная нижняя грань расстояния точки y_t до границы множества $g_0{}^t B_\varepsilon$. Очевидно, $d_t > 0$ для любого конечного момента t. Равенство $\inf_{t \geqslant 0} d_t = \inf_{t \in [0, N]} d_t$ завершает доказательство, так как $x_t \notin \notin g_0{}^t B_\varepsilon$ при $x \in \overline{D(\varepsilon, \varepsilon_2)}$.

Следствие. Положение равновесия $\{y_t \equiv y,\ t \geqslant 0\}$ автономной или неавтономной системы (1.1) устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено условие 2.

Наряду с рассмотренными периодическими решениями система (1.1) может иметь резонансные решения вида

$$x = \omega t + z; \quad x, z, \omega \in R^n \tag{1.11}$$

где каждая координата ω^i вектора ω соизмерима с 2π, а $z = z(t)$ — периодический по t вектор, допускающий период, кратный единице. Замена переменных x на z по формулам (1.11) сводит нахождение резонансного решения (1.11) к поиску периодического решения $z(t)$ новой системы. Если правая часть системы (1.1) после указанной замены сохраняет свойство периодичности по явно входящей в уравнения независимой переменной t, то устойчивое периодическое решение $z(t)$, а следовательно, и устойчивое резонансное решение (1.11) может быть выявлено экстремальными свойствами средних значений (1.2) от некоторых функций $\varkappa(x, t)$. Такой случай представляется, например, если система (1.1) (2π)-периодична по каждой из вращательных координат x^i ($\omega^i \neq 0$).

Приведенную теорему можно считать обоснованием и обобщением идеи, изложенной в [4].

В работе [4] исследовались резонансные плоские вращения спутника относительно центра масс в гравитационном поле при движении спутника по невозмущенной кеплеровой орбите. Вращение спутника описывается системой дифференциальных уравнений типа (1.1), (2π)-периодической по независимой переменной t; $x = (\delta, \delta^\cdot)$, $\delta = 2\theta$, где θ — угол отклонения оси спутника от радиус—вектора орбиты, $\delta^\cdot = d\delta/dt$.

Резонансными вращениями являются решения с вращательной координатой

$$\delta = \pm (p/q)\, t + \psi(t); \quad p, q \in Z \tag{1.12}$$

($\psi(t)$-периодическая по t функция с периодом, кратным $2\pi q$).

Согласно гипотезе и численным расчетам максимумы функции

$$K(\delta_0, \delta_0^\cdot) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U(\delta(\delta_0, \delta_0^\cdot, t), t)\, dt$$

дают начальные значения устойчивых резонансных решений; $U(\delta, t)$ — силовая функция задачи, (2π)-периодическая по t и δ. Так как система (1.1) в этом случае (2π)-периодична по δ, то устойчивое решение (1.12) удовлетворяет теореме, причем функция U является одной из допустимых $\varkappa(x, t)$-функций. Следовательно, полученная теорема дает теоретическое подкрепление гипотезы. Вместе с тем подчеркнем, что гипотеза имеет глобальный характер, тогда как из теоремы следует заключить, что каждому устойчивому резонансному движению соответствует, вообще говоря, своя функция $\varkappa(x, t)$.

2. В качестве возможного приложения теоремы рассмотрим задачу о возмущенном движении твердого тела в гравитационном поле вокруг центра масс, движущегося по возмущенной орбите, которая имеет постоянное наклонение к эклиптике и равномерно вращается вокруг оси эклиптики с постоянной угловой скоростью. Уравнения возмущенного движения можно привести к каноническому виду с гамильтонианом $H^*(x, \tau)$. Здесь $x = (L, L_n, l, \psi, \sigma, \varphi)$ — эволюционные переменные задачи, τ — независимая переменная. H^* — (2π)-периодическая функция τ, ψ, σ, φ [8, 9]. Следовательно, устойчивые резонансные решения вида (1.11) с одной вращательной координатой

$$\Psi = (1/2)\, n\tau + \delta$$

где n — целое, $\delta = \delta(\tau)$ — периодическая функция τ, допускающая период, кратный 2π, удовлетворяют приведенной теореме.

Рассмотрим конкретное значение $n = n_0$ и проведем замену (1.11) вектора $x = (L, L_n, l, \psi, \sigma, \varphi)$ на $z = (L, L_n, l, \delta, \sigma, \varphi)$, сводя тем самым задачу к поиску устойчивого периодического решения $z(\tau)$ новой системы уравнений, которая также может быть записана в канонической форме с гамильтонианом

$$H(z, \tau) = H^*_{|x \to z} - (1/2)\, n_0 L$$

Обозначим период H по τ через T_τ. Экстремум функции

$$K(z_0) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau H(z_\tau, \tau)\, d\tau, \quad z_0 = z(0)$$

(если он есть) при выполнении условия 1 определяет существование и устойчивость искомого периодического движения. Существенно, что функцию $K(z_0)$ следует определять по точным траекториям, которые неизвестны, но могут быть получены приближенно, например численными методами.

Пользуясь тем, что при некоторых предположениях z есть вектор медленных переменных, вычислим функцию $K(z_0)$ приближенно, по траекториям невозмущенной задачи, которая легко интегрируется ($z = z_0$):

$$\langle H \rangle = \frac{1}{T_\tau} \int_0^{T\tau} H(z_0, \tau)\, d\tau$$

Экстремумам функции $\langle H \rangle$ соответствуют движения «по Кассини» — устойчивые резонансные решения усредненных уравнений движения. Вероятно, что существование и устойчивость «обобщенных законов Кассини» является приближенным описанием условий существования и устойчивости резонансных решений неусредненной системы, доставляемых экстремумами функции $K(z_0)$. Заметим, что существование таких решений доказано методом малого параметра [10].

3. Пусть система (1.1) имеет периодическое решение $\{y_t,\ t \geqslant 0\}$, устойчивость которого устанавливается построением соответствующей функции Ляпунова $V(x,\ t)$ в виде связки первых интегралов системы. Так как $V = \mathrm{const}$ на траекториях системы (1.1), функция

$$K(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t V(x_t, t)\, dt = V(x, 0)$$

принимает строгий экстремум в точке y, отвечающий резонансному решению. Следовательно, такую функцию Ляпунова можно считать одной из $\varkappa(x,\ t)$-функций, проявляющих экстремальный характер устойчивого резонансного решения.

Например, если рассматривается случай круговых орбит центра масс спутника в задаче [4], то плоское вращение спутника описывается автономной канонической системой первого порядка с гамильтонианом $H(q,\ p)$, допускающей стационарное решение $q = p = 0$, в окрестности которого гамильтониан H является положительно-определенной функцией. Так как система уравнений имеет первый интеграл $H = \mathrm{const}$, то стационарное решение устойчиво в силу теории Ляпунова. Рассмотрим функцию $\varkappa = H(q,\ p)$; имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t H(q(t), p(t))\, dt = H(q(0), p(0))$$

Получили в силу следствия теоремы новое доказательство устойчивости резонансного решения $q = p = 0$ с очевидным экстремальным содержанием. Для некруговых орбит гамильтониан $H(q,\ p,\ t)$ неавтономной задачи [4] не является первым интегралом, но функция

$$K(q(0), p(0)) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t H(q(t),\ p(t), t)\, d,$$

может выявлять начальные данные устойчивых резонансных движений.

4. Рассмотрим автономную систему уравнений

$$dx/dt = X(x),\ x \in R^n,\ \operatorname{div} X \equiv 0 \tag{4.1}$$

Пусть система 2π-периодична по переменным $x^1, \ldots, x^k$ и непериодична по остальным переменным $x^{k+1}, \ldots, x^n$. Перейдем от фазового пространства R^n к фазовому цилиндру

$$\Omega = [x^1]_{\mathrm{mod}\,2\pi} \times \ldots \times [x^k]_{\mathrm{mod}\,2\pi} \times R^{n-k}$$

Предположим, что на фазовом цилиндре существует компакт M ненулевой меры, инвариантный относительно любых g_0^t-преобразований. Экстремальные свойства устойчивых резонансных решений системы (4.1) устанавливаются доказанной теоремой, если заменить множество рассматриваемых в неавтономном случае (1.1) функций $\varkappa(x,\ t)$ на множество функций, непрерывных по x на M и периодических по t (ограничений на значения периода нет).

Автор глубоко признателен Белецкому В. В. за ценные советы и помощь в решении данной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
2. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.
3. *Ovenden M., Feagin T., Graf O.* On the principle of least interaction action and the Laplacean satellites of Jupited and Uranus.— Celest. Mech., 1974, v. 8, № 4, p. 455—471.
4. *Белецкий В. В., Шляхтин А. Н.* Экстремальные свойства резонансных движений.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 4, с. 829—832.
5. *Белецкий В. В., Касаткин Г. В.* Об экстремальных свойствах резонансных движений.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 1, с. 58—62.
6. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
7. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 300 с.
8. *Beletskii V. V.* Resonance rotation of celestial bodies and Cassini's laws.— Celest. Mech., 1972, v. 6, № 3, p. 356—378.
9. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
10. *Баркин В. В.*, О законах Кассини.— Астрон. ж., 1978, т. 55, вып. 1, с. 113—122.

Тула

Поступила в редакцию
24.III.1981