Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 6, 1981

УДК 62—50

СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ СБЛИЖЕНИЯ — УКЛОНЕНИЯ

Вахрамеев С. А.

Рассматривается позиционная дифференциальная игра сближения — уклонения с геометрическими ограничениями на управления игроков, зависящими от состояния системы. Вводятся понятия смешанных стратегий игроков и доказывается альтернатива, которая утверждает, что всегда разрешима либо позиционная игра сближения, либо позиционная игра уклонения. Работа продолжает исследования [1—4].

1. Динамическая система. Пусть поведение управляемой системы описывается уравнением

$$x^{\cdot} = f(t, x, u, v),\ x \in R^n,\ u \in R^p,\ v \in R^q \tag{1.1}$$

где x — вектор фазовых координат системы, u и v — управления первого и второго игроков соответственно. Обозначим через Ω^m пространство всех непустых компактов в R^m с метрикой Хаусдорфа h. Предположим, что заданы отображения

$$P : R \times R^n \to \Omega^p,\ Q : R \times R^n \to \Omega^q \tag{1.2}$$

удовлетворяющие следующим условиям.

1°. Отображения $t \mapsto P(t, x), t \mapsto Q(t, x)$ измеримы, а отображения $x \mapsto P(t, x)$, $x \mapsto Q(t, x)$ удовлетворяют условиям Липшица

$$h(P(t, x), P(t, y)) \leqslant \alpha(t) |x - y|,\ h(Q(t, x), Q(t, y)) \leqslant \\ \leqslant \alpha(t) |x - y| \tag{1.3}$$

2°. Существуют такие измеримые отображения

$$P_0 : R \to \Omega^p,\ Q_0 : R \to \Omega^q$$

что

$$\bigcup_{x \in R^n} P(t, x) \subset P_0(t),\qquad \bigcup_{x \in R^n} Q(t, x) \subset Q_0(t)$$

Относительно функции f в правой части уравнения (1.1) будем предполагать выполненным следующее.

1°. Функция $f(\cdot, x, u, v) : R \to R^n$ измерима.

2°. При всех $x \in R^n$, $u \in P_0(t)$, $v \in Q_0(t)$

$$|f(t, x, u, v)| \leqslant k(t)(1 + |x|) \tag{1.4}$$

3°. При всех $x, y \in R^n$, $u', u'' \in P_0(t)$, $v', v'' \in Q_0(t)$

$$|f(t, x, u', v') - f(t, y, u'', v'')| \leqslant \\ \leqslant \beta(t)(|x - y| + |u' - u''| + |v' - v''|) \tag{1.5}$$

Здесь функции α, β, $k : R \to R$ неотрицательны и локально суммируемы.

2. О семействах мер Радона на R^m. Пусть μ_t, $t \in R$ — семейство мер Радона на R^m, зависящее от параметра $t \in R$. Будем говорить, что семейство μ_t, $t \in R$ слабо измеримо, если для любой непрерывной функции $\varphi : R^m \to R$ с компактным носителем функция

$$t \mapsto \langle \mu_t, \varphi(u) \rangle = \int_{R^m} \varphi(u)\, d\mu_t$$

измерима (по Лебегу).

Особый интерес представляют слабо измеримые семейства μ_t, $t \in R$ мер Радона на R^m, носители $\operatorname{supp} \mu_t$ которых удовлетворяют включению

$$\operatorname{supp} \mu_t \subset F(t) \in \Omega^m$$

при почти всех $t \in R$. Про такие семейства будем говорить, что они сосредоточены на отображении $F : R \to \Omega^m$. Если отображение $F : R \to \Omega^m$ измеримо, то такие семейства существуют.

В самом деле, пусть $f : R \to R^m$ — произвольная измеримая ветвь отображения $F : R \to \Omega^m$. Тогда семейство мер Дирака $\delta_{f(t)}$, $t \in R$ дает пример слабо измеримого семейства вероятностных мер Радона, сосредоточенного на отображении F.

Предложение 2.1. Пусть μ_t, $t \in R$ — слабо измеримое семейство мер Радона на R^m, сосредоточенное на измеримом отображении $F : R \to \Omega^m$. Тогда для любой функции $f : R \times R^m \to R$ измеримой по $t \in R$ и непрерывной по $u \in R^m$, функция

$$t \mapsto \langle \mu_t, f(t, u) \rangle = \int_{R^m} f(t, u)\, d\mu_t$$

измерима (по Лебегу).

Доказательство основано на теоремах Лузина и Скорца — Драгони (см. [5, 6]).

Для любого компакта $A \in \Omega^m$ обозначим через A_c множество всех вероятностных мер Радона, сосредоточенных на A. Известно, что множество A_c слабо (секвенциально) компактно [7]. Более того, можно доказать, что для любой непрерывной функции $\varphi : R^m \to R^n$ имеет место равенство

$$\operatorname{conv} \varphi(A) = \{\langle \mu, \varphi(u) \rangle \mid \mu \in A_c\} \tag{2.1}$$

В самом деле, пусть $c(U, \psi)$ — опорная функция $U \in \Omega^n$

$$c(U, \psi) = \max_{u \in U} (u, \psi)$$

Множество $D = \{\langle \mu, \varphi(u) \rangle \mid \mu \in A_c\}$ выпукло и компактно и его опорная функция

$$c(D, \psi) = \max_{\mu \in A_c} (\psi, \langle \mu, \varphi(u) \rangle) \leqslant c(\varphi(A), \psi)$$

Потому $D \subset \operatorname{conv} \varphi(A)$. Однако в силу того, что

$$\operatorname{conv} D = D \supset \varphi(A)$$

получаем равенство (2.1).

Предложение 2.2. Пусть μ_t, $t \in R$ и ν_t, $t \in R$ — слабо измеримые семейства мер Радона на R^m и R^n, сосредоточенные на измеримых отображениях

$$F : R \to \Omega^m, \quad G : R \to \Omega^n$$

соответственно. Тогда семейство $\eta_t = \mu_t \otimes \nu_t$, $t \in R$ мер Радона на R^{n+m} слабо измеримо и сосредоточено на измеримом отображении

$$t \mapsto F(t) \times G(t) : R \to \Omega^{n+m}$$

Доказательство следует из предложения 2.1.

3. Стратегии и движения. Для произвольного отображения

$$F : R \times R^n \to \Omega^m$$

измеримого по $t \in R$ через $F_c(x;\ t_*,\ t^*)$ будем обозначать совокупность всех слабо измеримых семейств μ_t, $t \in R$ вероятностных мер Радона на R^m, сосредоточенных на отображении $F(\cdot, x) : R \to \Omega^m$ при $t_* \leqslant t < t^*$.

Смешанной стратегией U_c (V_c) первого (второго) игрока называется отображение, которое произвольной позиции (t, x) ставит в соответствие непустое подмножество из $P_c(x;\ t, \infty)$ $(Q_c(x;\ t, \infty))$.

Пусть первый игрок выбрал смешанную стратегию U_c. Рассмотрим разбиение Δ полуоси $[t_0, \infty)$ на систему полуинтервалов вида

$$\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, \tau_0 = t_0,\ \tau_i \to \infty \ (i \to \infty)$$

Пусть $|\Delta| = \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x_\Delta^{\cdot}(t) = \langle \mu_t^{(i)} \otimes \nu_t^{(i)},\ f(t, x_\Delta(t), u, v)\rangle \tag{3.1}$$
$$\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, x_\Delta(t_0) = x_0$$
$$\mu_t^{(i)} \in U_c(\tau_i;\ x_\Delta(\tau_i)),\ \nu_t^{(i)} \in Q_c(x_\Delta(\tau_i);\ \tau_i,\ \tau_{i+1})$$

Видно, что это уравнение имеет решение $x_\Delta(t) = x_\Delta(t;\ t_0, x_0, U_c, \nu_t)$, продолжимое на полупрямую $t \geqslant t_0$.

В самом деле, поскольку при почти всех t меры $\mu_t^{(i)}$ и $\nu_t^{(i)}$ — вероятностные, то

$$|\langle \mu_t^{(i)} \otimes \nu_t^{(i)},\ f(t, x, u, v)\rangle| \leqslant |f(t, x, u, v)| \leqslant k(t)(1 + |x|),$$
$$|\langle \mu_t^{(i)} \otimes \nu_t^{(i)}),\ f(t, y, u, v)\rangle - f(t, x, u, v)\rangle| \leqslant |f(t, y, u, v) -$$
$$- f(t, x, u, v)| \leqslant \beta(t)|x - y|$$

Согласно предложениям 2.1—2.2, функция $t \mapsto \langle \mu_t^{(i)} \otimes \nu_t^{(i)},\ f(t, x, u, v)\rangle$ измерима. Следовательно, существование единственного (при определенном выборе семейств $\mu_t^{(i)}$и $\nu_t^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots$) продолжимого на полупрямую $t_0 \leqslant t < \infty$ решения уравнения (3.1) следует из известных результатов теории дифференциальных уравнений [5].

Решение $x_\Delta(t) = x_\Delta(t;\ t_0,\ x_0,\ U_c, \nu_t)$ уравнения (3.1) называется ломаной Эйлера, порожденной смешанной стратегией U_c первого игрока. Аналогично определяется ломаная Эйлера, порожденная смешанной стратегией V_c второго игрока.

Предложение 3.1. Всякая ломаная Эйлера первого или второго игрока является решением дифференциального включения

$$x^{\cdot} \in \operatorname{conv} f(t, x, P_0(t), Q_0(t)) \tag{3.2}$$

Доказательство получается из результатов п. 2.

Из предложения 3.1 вытекает корректность следующего определения.

Движением $x(t) = x(t;\ t_0,\ x_0,\ U_c)$ $(x(t) = x(t;\ t_0,\ x_0,\ V_c))$ порожденным смешанной стратегией U_c (V_c) первого (второго) игрока называется всякая функция $x(t)$, $t \geqslant t_0$ для которой на любом конечном отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ найдется такая последовательность $\{x_{\Delta_k}\}$ ломаных Эйлера

$$x_{\Delta_k}(t) = x_{\Delta_k}(t; t_0, x_0^{(k)}, U_c, \nu_t^{(k)}) \quad (x_{\Delta_k}(t) = x_{\Delta_k}(t; t_0, x_0^{(k)}, V_c, \mu_t^{(k)}))$$

порожденных стратегией U_c (V_c) первого (второго) игрока, что

$$x_{\Delta_k}(t) \rightrightarrows x(t),\ \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ \ x_0^{(k)} \to x_0,\ \ |\Delta_k| \to 0,\ \ k \to \infty$$

Можно доказать, что всякое движение первого или второго игрока, исходящее из точки x_0, в момент $t = t_0$ является решением дифференциального включения

$$x^{\cdot} \in \operatorname{conv} f(t,\ x,\ P(t,\ x),\ Q(t,\ x)),\ \ x(t_0) = x_0$$

4. Дифференциальная игра сближения — уклонения. Рассматриваемая игра складывается из следующих двух задач.

Пусть заданы непустые замкнутые множества M и N в пространстве позиций $R \times R^n$, начальная позиция $(t_0,\ x_0)$ и момент $\vartheta \geqslant t_0$.

Задача 1. Найти смешанную стратегию $U_c{}^*$ первого игрока, обеспечивающую встречу

$$(t,\ x(t)) \in N,\ \ t_0 \leqslant t < \tau,\ \ (\tau,\ x(\tau)) \in M,\ \ \tau = \tau(x(\cdot)) \leqslant \vartheta$$

для всех движений $x(t) = x(t;\ t_0,\ x_0,\ U_c{}^*)$.

Задача 2. Указать такие открытые окрестности $G(M)$ и $H(N)$ множеств M и N, а также смешанную стратегию $V_c{}^*$ второго игрока, что встреча

$$(t, x(t)) \in H(N),\ t_0 \leqslant t < \tau,\ (\tau,\ x(\tau)) \in G(M), \tau = \tau(x(\cdot)) \leqslant \vartheta$$

будет исключена для всех движений $x(t) = x(t;\ t_0,\ x_0,\ V_c{}^*)$.

Задача 1 называется задачей сближения с множеством M внутри множества N к моменту ϑ, а задача 2 — задачей уклонения от $G(M)$ внутри $H(N)$ вплоть до момента ϑ.

5. Стабильные множества. Будем говорить, что множество $W \subset R \times R^n$ u_c-стабильно (v_c-стабильно), если для любых $(t_*,\ x_*) \in W$, $t^* > t_*$ и $\nu_t{}^* \in Q_c(x_*;\ t_*,\ t^*)$ $(\mu_t{}^* \in P_c(x_*;\ t_*,\ t^*))$ существует $\mu_t{}^* \in P_c(x_*;\ t_*,\ t^*)$ $(\nu_t{}^* \in Q_c(x_*;\ t_*,\ t^*))$, такое, что решение $x(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ дифференциального уравнения

$$x^{\cdot} = \langle \mu_t{}^* \otimes \nu_t{}^*,\ \ f(t,\ x,\ u,\ v)\rangle,\ \ \ x(t_*) = x_* \tag{5.1}$$

удовлетворяет условию $(t^*,\ x(t^*)) \in W$ или условию $(\tau,\ x(\tau)) \in M$ $((\tau,\ x(\tau)) \notin H(N))$ при некотором τ, $t_* \leqslant \tau \leqslant t^*$.

Теорема 5.1. Если множество $W \subset R \times R^n$ u_c-стабильно (v_c-стабильно), то u_c-стабильно (v_c-стабильно) его замыкание $\overline{W} = \operatorname{Cl} W$.

Доказательство проведем, например, для u_c-стабильного множества W. Справедливо следующее

Предложение 5.1. Пусть $\nu_t{}^* \in Q_c(x_*;\ t_*,\ t^*)$ и $x_*{}^{(k)} \to x_*$ при $k \to \infty$. Тогда существуют $\nu_t{}^{(k)} \in Q_c(x_*{}^{(k)};\ t_*,\ t^*)$, такие, что $\nu_t{}^{(k)} \to \nu_t{}^*$ слабо при почти всех t, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$.

В самом деле, пусть $O^{(i)} = \{O_1^{(i)}, \ldots, O_k^{(i)}, \ldots\}$ — последовательность покрытий пространства R^q открытыми множествами, такая, что

$$\operatorname{diam} O^{(i)} = \max_j \operatorname{diam} O_j^{(i)} \to 0 \quad (i \to \infty)$$

Пусть $\alpha_i^{(j)}$, $i = 1, \ldots$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $O^{(j)} = \{O_1^{(j)}, \ldots, O_i^{(j)}, \ldots\}$. Положим

$$\lambda_i^{(j)}(t) = \langle \nu_t^{(j)}, \quad \alpha_i^{(j)}(v)\rangle, \quad \nu_t^{*j} = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{v_i^{(j)}(t)} \lambda_i^{(j)}(t), \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

где $v_i^{(j)}(t)$, $t \in R$ — измеримые функции, такие, что $v_i^{(j)}(t) \in O_i^{(j)} \cap Q(t, x_*)$, если последнее множество непусто и $v_i^{(j)}(t) = v(t)$ в противном случае, где $v(t)$, $t \in R$ — произвольная измеримая ветвь отображения $t \mapsto Q(t, x_*)$. Из непрерывности отображения $x \mapsto Q(t, x)$ вытекает, что можно указать такую последовательность измеримых функций $v_i^{(j,k)}(t)$, что $v_i^{(j,k)}(t) \in Q(t, x_*^{(k)})$ и $v_i^{(j,k)}(t) \to v_i^{(j)}(t)$ при почти всех t, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ равномерно относительно $i, j = 1, 2, \ldots$.

Положим

$$\nu_t^{(k)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{(k)}(t)\, \delta_{v_j^{(k,k)}}(t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Из самого способа построения последовательности $\{\nu_t^{(k)}\}$ вытекает, что $\nu_t^{(k)} \in Q_c(x_*^{(k)}; t_*, t^*)$ и $\nu_t^{(k)} \to \nu_t^*$ $(k \to \infty)$ слабо при почти всех t, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$. Предложение 5.1. доказано.

Предположим теперь, что утверждение теоремы 5.1 не имеет места. Тогда существуют $(t_*, x_*) \in \overline{W}$, $t^* > t_*$, $\nu_t^* \in Q_c(x_*; t_*, t^*)$, такие, что, какова бы ни была мера $\mu_t^* \in P_c(x_*; t_*, t^*)$, решение $x(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ уравнения (5.1) удовлетворяет условиям

$$(t^*, x(t^*)) \notin \overline{W}, \ (\tau, x(\tau)) \notin M, \ t_* \leqslant \tau \leqslant t^*$$

Однако, так как $(t_*, x_*) \in \overline{W}$, то существует последовательность $\{(t_*^{(k)}, x_*^{(k)})\}$ точек W, такая, что $(t_*^{(k)}, x_*^{(k)}) \to (t_*, x_*)$, $k \to \infty$. По предложению 5.1 существует последовательность $\nu_t^{(k)} \in Q_c(x_*^{(k)}, t_*, t^*)$, такая, что $\nu_t^{(k)} \to \nu_t^*$ $(k \to \infty)$ слабо при почти всех t, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$. Наконец, из u_c-стабильности множества W следует, что существуют такие $\mu_t^{(k)} \in P_c(x_*^{(k)}; t_*^{(k)}, t^*)$, что решения $x_k(t)$, $t_*^{(k)} \leqslant t \leqslant t^*$, $k = 1, 2 \ldots$ дифференциального уравнения

$$x_k^{\cdot}(t) = \langle \mu_t^{(k)} \otimes \nu_t^{(k)}, f(t, x_k(t), u, v)\rangle, \quad x(t_*^{(k)}) = x_*^{(k)}$$

удовлетворяют либо условию $(t^*, x_k(t^*)) \in W$ либо условию $(\tau_k, x_k(\tau_k)) \in M$ при некотором τ_k, $t_*^{(k)} \leqslant \tau_k \leqslant t^*$.

Можно показать, что некоторая подпоследовательность последовательности $\{x_k(t)\}$ равномерно сходится к абсолютно непрерывной функции $x(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ и эта функция $x(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ удовлетворяет уравнению (5.1) с некоторой $\mu_t^* \in P_c(x_*; t_*, t^*)$. Это обстоятельство приводит к противоречию. Теорема доказана.

6. Вывод основной оценки. Пусть функции $x(t)$, $y(t)$, $t \geqslant t_*$ удовлетворяют уравнениям (6.1) и (6.2) соответственно

(6.1) $\quad x^{\cdot} = \langle \mu_t^* \otimes \nu_t, f(t, x, u, v)\rangle, \ x(t_*) = x_*$

(6.2) $\quad y^{\cdot} = \langle \mu_t \otimes \nu_t^*, f(t, y, u, v)\rangle, \ y(t_*) = y_*$

Здесь семейства $\mu_t \in P_c(y_*;\ t_*,\ \infty)$ и $\nu_t \in Q_c(x_*;\ t_*,\ \infty)$ произвольны, а семейства $\mu_t^* \in P_c(x_*;\ t_*,\ \infty)$ и $\nu^*_t \in Q_c(y_*;\ t_*,\ \infty)$ выбраны из условий

$$\max_{\nu\in Q_c(t,\,x_*)} K(t, x_*, z_*, \mu_t^*, \nu) =$$
$$= \min_{\mu\in P_c(t,\,x_*)} \max_{\nu\in Q_c(t,\,x_*)} K(t, x_*, z_*, \mu, \nu), t \geqslant t_*$$
$$\min_{\mu\in P_c(t,\,y_*)} K(t, y_*, z_*, \mu, \nu_t^*) =$$
$$= \max_{\nu\in Q_c(t,\,y_*)} \min_{\mu\in P_c(t,\,y_*)} K(t, y_*, z_*, \mu, \nu), t \geqslant t_*$$
$$K(t, x, z, \mu, \nu) = \langle \mu \otimes \nu, f(t, x, u, v)\rangle, \quad z_* = x_* - y_*$$

Возможность такого выбора можно обосновать на основе результатов п. 2 и теоремы Филиппова — Кастена (см. [5]).

Теорема 6.1. Какова бы ни была ограниченная область $G \subset R \times R^n$, содержащая позиции (t_*, x_*) и (t_*, y_*), существует такая локально суммируемая функция $m_G\colon R \to R$, что при всех $t \geqslant t_*$ справедливо неравенство

$$\rho^2(t) \leqslant \rho^2(t_*)\Big(1 + 2\int_{t_*}^{t} \gamma(\tau)\, d\tau\Big) + \int_{t_*}^{t} \varphi(t_*, \tau) m(\tau)\, d\tau \tag{6.3}$$

$$m(t) = 4g\beta(t) + 8m_G(t), \quad g = \operatorname{diam} G, \quad \varphi(t_*, t) = \int_{t_*}^{t} m_G(\tau)\, d\tau$$

$$\gamma(t) = \beta(t) + 2\beta(t)\,\alpha(t), \quad \rho(t) = |\, x(t) - y(t)\, |$$

Доказательство теоремы 6.1 проводится аналогично [1, 2] и основано на следующем утверждении, которое можно доказать используя стандартную конструкцию разбиения единицы.

Предложение 6.1. Пусть отображение $F : R^k \to \Omega^m$ удовлетворяет условию Липшица

$$h(F(x),\ F(y)) \leqslant L_F\, |\, x - y\, |$$

Тогда для любой меры $\mu(x) \in F_c(x)$ существует мера $\mu(y) \in F_c(y)$, такая, что

$$|\,\langle \mu(x), \varphi(u)\rangle - \langle \mu(y), \varphi(u)\rangle\,| \leqslant L_\varphi L_F\, |\, x - y\, |$$

для любой функции $\varphi\colon R^m \to R$, удовлетворяющей условию Липшица

$$|\,\varphi(u) - \varphi(v)\,| \leqslant L_\varphi\, |\, u - v\, |$$

7. Экстремальный барьер. Пусть $W \subset R \times R^n$ — непустое замкнутое множество в пространстве позиций $R \times R^n$. Экстремальные к этому множеству смешанные стратегии U_c^e и V_c^e первого и второго игроков определяются следующим образом. Пусть $\Gamma_\tau = \{(t, x)\ \ t = \tau\}$. Если $\Gamma_{t_*} \cap W = \varnothing$, то полагаем

$$U_c^e(t_*, x_*) = P_c(x_*; t_*, \infty), \quad V_c^e(t_*; x_*) = Q_c(x_*; t_*, \infty)$$

в противном случае

$$U_c^e(t_*, x_*) = \{\mu_t^* \in P_c(x_*; t_*, \infty) \mid \max_{\nu \in Q_c(t, x_*)} K(t, x_*, x_* - w_*, \mu_t^*, \nu) = \min_{\mu \in P_c(t, x_*)} \max_{\nu \in Q_c(t, x_*)} K(t, x_*, x_* - w_*, \mu, \nu), t \geqslant t_*\}$$

$$V_c^e(t_*, x_*) = \{\nu_t^* \in Q_c(x_*; t_*, \infty) \mid \min_{\mu \in P_c(t, x_*)} K(t, x_*, w_* - x_*, \mu, \nu) = \max_{\nu \in Q_c(t, x_*)} \min_{\mu \in P_c(t, x_*)} K(t, x_*, w_* - x_*, \mu, \nu), t \geqslant t_*\}$$

где W_* — вектор сечения $W(t_*)$ множества W гиперплоскостью Γ_{t_*}, который лежит ближе всего к x_*.

Используя оценку (6.3), аналогично [1, 2] можно доказать следующие утверждения.

Теорема 7.1. Пусть $W \subset R \times R^n$ — замкнутое u_c-стабильное множество, U_c^e — смешанная стратегия, экстремальная к этому множеству, и $(t_0, x_0) \in W$. Тогда для любого движения $x(t) = x(t; t_0, x_0, U_c^e)$ вплоть до момента τ, когда $(\tau, x(\tau)) \in M$, будет выполнено включение $(t, x(t)) \in W$.

Теорема 7.2. Пусть $W \subset R \times R^n$ — замкнутое v_c-стабильное множество, V_c^e — смешанная стратегия, экстремальная к этому множеству, и $(t_0, x_0) \in W$. Тогда для любого движения $x(t) = x(t; t_0, x_0, V_c^e)$ вплоть до момента τ, когда $(\tau, x(\tau)) \notin H(N)$, будет выполнено включение $(t, x(t)) \in W$.

8. Альтернатива. Справедлива следующая

Теорема 8.1. Пусть выполнены условия, сформулированные в п. 1. Тогда, каковы бы ни были непустые замкнутые множества M и N, начальная позиция (t_0, x_0) и момент $\vartheta \geqslant t_0$, всегда разрешима либо задача 1, либо задача 2.

Доказательство. Рассмотрим сначала задачу 1 о сближении с множеством M внутри множества N к моменту времени ϑ.

Удалим из полупространства $t \leqslant \vartheta$ те позиции (t_*, x_*), для которых одновременно имеют место следующие два обстоятельства.

1°. Из позиции (t_*, x_*) как из начальной разрешима задача уклонения от хотя бы одной окрестности $G(M)$ множества M внутри хотя бы одной окрестности $H(N)$ множества N вплоть до момента $\vartheta \geqslant t_*$.

2°. Существуют такие момент t^*, $(t_* < t^* \leqslant \vartheta)$ и управление $\nu_t^* \in Q_c(x_*; t_*, t^*)$ второго игрока, что при произвольном выборе управления $\mu_t^* \in P_c(x_*, t_*, t^*)$ первого игрока решение $x(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = \langle \mu_t^* \otimes \nu_t^*, f(t, x, u, v) \rangle, \quad x(t_*) = x_*$$

удовлетворяет условию $(t, x, (t)) \notin M$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$.

Множество W_u^ϑ оставшихся позиций обладает следующими свойствами, которые непосредственно следуют из его построения.

$1_u°$. Множество W_u^ϑ u_c-стабильно.

$2_u°$ $W_u^\vartheta \subset N$.

$3_u°$. В некоторый момент $\tau \leqslant \vartheta$ сечение $W_u^\vartheta(\tau)$ множества W_u^ϑ гиперплоскостью Γ_τ целиком располагается в сечении $M(\tau)$ множества M той же гиперплоскостью.

Всякое множество, удовлетворяющее перечисленным трем условиям, принято называть u_c-стабильным мостом. Из теоремы 7.1 и способа построения моста W_u^ϑ вытекает его максимальность, а значит, в силу теоремы 5.1 и его замкнутость.

Рассмотрим теперь задачу об уклонении от множества $G(M)$ внутри множества $H(N)$ вплоть до момента $\vartheta \geqslant t_0$.

Из полупространства $t \leqslant \vartheta$ удалим те позиции (t_*, x_*), для которых одновременно имеют место следующие два обстоятельства.

1°. Из позиции (t_*, x_*) как из начальной разрешима задача о сближении хотя бы с одним множеством $\overline{G^*(M)} \subset G(M)$ внутри хотя бы одного множества $\overline{H^*(N)} \subset H(N)$ к моменту $\vartheta \geqslant t_*$.

2°. Существуют такие моменты t^* $(t_* < t^* \leqslant \vartheta)$ и управление $\mu_t^* \in P_c(x_*;\ t_*,\ t^*)$ первого игрока, что при любом выборе управления $\nu_t^* \in Q_c(x_*;\ t_*,\ t^*)$ второго игрока решение $x(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ уравнения

$$\dot{x} = \langle \mu_t^* \otimes \nu_t^*,\ f(t, x, u, v)\rangle, \quad x(t_*) = x_*$$

таково, что $(t, x(t)) \in H(N)$ при $t_* \leqslant t \leqslant t_*$.

Можно проверить, что множество W_v^ϑ оставшихся позиций является v_c-стабильным мостом, т. е. удовлетворяет условиям:

$$W_v^\vartheta\ v_c\text{-стабильно};\ W_v^\vartheta \cap G(M) = \varnothing.$$

Более того, построенное множество W_v^ϑ является максимальным v_c-стабильным мостом, а следовательно, замкнуто.

По способу построения, множества W_u^ϑ и W_v^ϑ образуют разбиение пространства позиций $R \times R^n$. Из факта существования множеств W_u^ϑ и W_v^ϑ и теорем 7.1, 7.2 следует утверждение теоремы 8.1.

В заключение автор благодарит Субботина А. И. и Никольского М. С. за внимание к работе, а также Аграчева А. А. за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Альтернатива для игровой задачи сближения.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 6, с. 1005—1022.
3. *Алексейчик М. И.* Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической дифференциальной игры.— В кн.: Математический анализ и его приложения. Т. 7. Изд-во Ростовск. ун-та, 1975, с. 191—199.
4. *Вахрамеев С. А.* Альтернативные условия разрешимости одной дифференциальной игры сближения — уклонения.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 20—25.
5. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.— М.: Наука, 1977, 623 с.
6. *Castaing Ch.* Sur les multi — application muasurables.— Rev. Francaise Inf. Rech Oper., 1967, v. 1, p. 91—126.
7. *Гамкрелидзе Р. В.* Основы оптимального управления.— Изд-во Тбилисск. ун-та, 1977. 254 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.I 1981