предположений уравнение (2.3) останется справедливым, если под W^* понимать разность $W - \varepsilon E^2/(8\pi)$, но не считать, что W^* зависит только от s и B. В частности, это уравнение можно использовать при описании разрывов в средах, процесс намагничивания и размагничивания в которых сопровождается гистерезисом. В этом случае необходимо учитывать зависимость W^*, кроме s и B, также от вектора намагничивания M [5].

Автор благодарит Куликовского А. Г. и Гогосова В. В. за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седова Г. Л.* Нелинейные волны и сильные разрывы в ферромагнетиках.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 2, с. 155.
2. *Бозорт Р.* Ферромагнетизм. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 784 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 532 с.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976, 413 с.
5. *Черный Л. Т.* Некоторые задачи теории упругости сильно намагничивающихся тел.— Научн. тр. ин-та механики МГУ, 1974, № 31, с. 100.

Москва

Поступила в редакцию 14.X.1980

УДК 531.51

КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О НЕСИММЕТРИЧНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ СЖАТИИ ТЕЛА

Голубятников А. Н., Трускиновский Л. М.

В рамках ньютоновской механики строится класс точных решений уравнений движения гравитирующего газа при нулевом давлении (пыль), содержащий пять произвольных функций одной лагранжевой переменной и описывающий динамику тела, в целом не обладающего пространственной симметрией.

Ранее в рамках общей теории относительности соответствующие решения были найдены и исследованы в терминах сопутствующей синхронной метрики [1, 2]. Однако в ньютоновской механике требуется кроме сопутствующей метрики определить также и закон движения. С другой стороны, вместо формальных предположений о структуре метрического тензора здесь удается сразу сформулировать естественные физические условия, характеризующие вид закона движения, которые приводят к эквивалентной метрике. Кроме того, в конечном виде определяется ньютоновский гравитационный потенциал.

Существенной особенностью данного класса решений при наличии сферической симметрии границы тела является сферическая симметрия внешнего гравитационного поля, хотя внутри тела может происходить движение пыли, в целом не обладающее группой симметрий. Отметим, что в электростатическом приближении при постоянном отношении плотности заряда к плотности массы данный класс решений при подходящем изменении гравитационной постоянной описывает динамику пылевого заряженного тела.

1. В декартовой инерциальной системе координат (x^1, x^2, x^3) рассмотрим закон движения среды

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi + x_0^1 \tag{1.1}$$
$$x^2 = r\sin\theta\sin\varphi + x_0^2, \quad x^3 = r\cos\theta + x_0^3$$

где функции r, $x_0{}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ зависят только от m, t (m — масса сферы радиуса r с центром в точке $x_0{}^i$, t — время, m, θ, φ — лагранжевы переменные). Этот закон соответствует разложению движения частиц среды, лежащих на данной сфере $m = \text{const}$, на сферически-симметричное и поступательное.

Уравнения движения пыли в собственном поле тяжести имеют вид

(1.2) $$x^{\cdot\cdot i} + k\Phi,{}^i = 0, \quad \Phi,{}^i{}_i = 4\pi\rho, \quad \Delta\rho = \chi; \quad \Delta = \det\,(x^i,{}_p)$$

где k — гравитационная постоянная, χ — функция лагранжевых переменных ξ^p, запятой обозначены частные поизводные по x^i и по ξ^p, точкой — по t. Рассмотрим следствия уравнений (1.2), не содержащие гравитационного потенциала Φ:

(1.3) $$\Delta x^{\cdot\cdot i},{}_p\xi^p,{}_i + 4\pi k\chi = 0, \quad x^{\cdot i},{}_{[p}x_{i,q]} = \omega_{pq}\,(\xi)$$

Используя форму закона движения среды (1.1) и решая уравнения (1.3), получим

(1.4) $$r^2r^{\cdot\cdot} + km = 0, \quad x_0{}'^1 = a\,(m)\,r, \quad x_0{}'^2 = b\,(m)\,r, \quad x_0{}'^3 = c\,(m)\,r$$

(штрих-производная по m). При этом $\omega_{pq} = 0$, а плотность

(1.5) $$\rho = \frac{1 + 3\lambda m}{4\pi r^2\,(r' + \lambda r)}$$
$$\lambda = a\sin\theta\cos\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + c\cos\theta$$

Первое уравнение (1.4) соответствует радиальному движению среды в гравитационном поле материальной точки массы m. Решение содержит две произвольные функции m, связанные с начальными данными, и хорошо известно (см., например, [3]). Наличие трех произвольных функций a, b, c нарушает в общем случае симметрию движения среды. Осевая симметрия соответствует случаю $a = b = 0$.

2. В решении [1, 2] рассматривалось потенциальное движение, причем пространственная метрика искалась в виде

(2.1) $$ds^2 = g_{pq}d\xi^pd\xi^q = A^2dm^2 + B^2d\zeta d\bar\zeta$$

(A, B — функции t, m и лагранжевой комплексной переменной ζ). В терминах g_{pq} при $\omega_{pq} = 0$ уравнения (1.3) можно переписать как

(2.2) $$(e_q{}^q)^{\cdot} + e_{pq}e^{pq} + 4\pi k\rho = 0, \quad e_{pq} = {}^1/_2 g^{\cdot}{}_{pq}, \quad \nabla_{[p}e_{q]s} = 0$$

Решая уравнения (2.2) вместе с условиями совместности $R^r_{pqs} = 0$ и опуская вырожденный случай $B' = 0$, который, в частности, содержит комбинацию одномерного движения пыли с плоскими волнами и осесимметричного движения с однородной деформацией в поперечном направлении, получим

(2.3) $$B = r\,(f\zeta\bar\zeta + g\zeta + \bar g\bar\zeta + h)^{-1}, \quad A = rB'B^{-1}, \quad r^2r^{\cdot\cdot} + km = 0$$

(f, g, h — функции m, связанные соотношением $fh - g\bar g = {}^1/_4$).

Отметим, что вообще уравнения адиабатического движения гравитирующего совершенного газа, в частности пыли, допускают решения, связанные с разложением движения газа на произвольное плоское или одномерное движение с плоскими волнами и движение с однородной деформацией в поперечных направлениях.

Прямой метод построения закона движения пыли по метрике (2.3), связанный с решением уравнений параллельного переноса $\nabla_p x^i,{}_q = 0$, проводится до конца в случае осевой симметрии и приводит к закону движения (1.1). В общем случае, исходя из вида закона движения (1.1), (1.4), можно указать преобразование, приводящее метрику в переменных m, θ, φ к виду (2.1) и связанное с дробно-линейным преобразованием комплексной плоскости, которая отвечает стереографической проекции сферы $m = \text{const}$:

(2.4) $$e^{i\varphi}\operatorname{ctg}\theta/2 = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, \qquad \alpha\delta - \gamma\beta = 1$$
$$\gamma\beta' - \alpha'\delta = \bar\gamma\bar\beta' - \bar\alpha'\bar\delta$$
$$\bar\alpha'\bar\beta - \bar\beta'\bar\alpha = \delta'\gamma - \gamma'\delta$$
$$f = {}^1/_2\,(\alpha\bar\alpha + \gamma\bar\gamma), \quad g = {}^1/_2\,(\alpha\bar\beta + \gamma\bar\delta), \quad h = {}^1/_2\,(\beta\bar\beta + \delta\bar\delta)$$
$$a + ib = 2\,(\alpha'\beta - \beta'\alpha), \quad c = 2\,(\alpha\delta' - \beta\gamma')$$

Осевой симметрии соответствует $\beta = \gamma = 0$; α, β, γ, δ — комплексные функции m.

3. Построенный класс решений уравнений движения пыли, содержащий пять произвольных функций одной лагранжевой переменной, можно использовать при специальных начальных данных для описания движения изолированного тела конечной массы. В принципе в силу отсутствия напряжений в среде всегда можно «вырезать» подходящее тело, точки которого обладают законом движения (1.1). Ньютоновский гравитационный потенциал определяется по распределению плотности (1.5) внутри тела с помощью гладкого решения уравнений Пуассона и Лапласа с подходящей асимптотикой на бесконечности.

В качестве примера рассмотрим задачу о гравитационном сжатии пылевого тела, имеющего сферическую границу $m = M$. Выберем инерциальную систему x^i таким образом, чтобы покоящийся в ней центр масс тела совпадал с началом координат. Это условие однозначно определяет три произвольные функции t, содержащиеся в x_0^i (1.4). Тогда закон движения принимает вид

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi - \int_m^M ar\,d\mu \tag{3.1}$$

$$x^2 = r\sin\theta\sin\varphi - \int_m^M br\,d\mu$$

$$x^3 = r\cos\theta = \int_m^M cr\,d\mu$$

При этом центр внешней сферы совпадает с центром тяжести тела: $x_0^i(M, T) = 0$.

Учитывая это, можно, используя уравнения движения (1.2) или непосредственно формулу для объемного гравитационного потенциала, связанную с распределением плотности, вычислить потенциал Φ. Внутри тела, опуская произвольную функцию времени, получим

$$\Phi = -\frac{m}{r} - \int_m^M \frac{d\mu}{r} - x^i \int_m^M \frac{x_{0i}'\mu\,d\mu}{r^3} + \int_m^M \frac{x_0^i x_{0i}'\mu\,d\mu}{r^3} \tag{3.2}$$

Это выражение как функция x^i гладко продолжается в пустоту, определяя единственным образом сферически-симметричный внешний потенциал $\Phi = -M/|x|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Szekeres P.* A Class of Inhomogeneous Cosmological Models.— Com. math. Phys., 1975, v. 41, No. 1, p. 55.
2. *Szekeres P.* Quasispherical gravitational collapse.— Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 12, No. 10, p. 2941.
3. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.

Москва

Поступила в редакцию 9.VI.1980

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 27.07.81 Подписано к печати 16.09.81 Т-24265 Формат бумаги 70×108¹/₁₆
Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Усл. кр.-отт. 44,8 тыс. Уч.-изд. л. 15,8 Бум. л. 6,0
Тираж 2638 экз. Зак. 665

Издательство «Наука». 103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10