

ряющие системе уравнений

$$(24) \quad \pi q = \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) dt, \quad \pi m = \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) dt = \int_{t_2}^{t_3} f_2(t) dt$$

$$(f_2(t) = |t_2 - t| |t(t - t_1)(t - t_3)(t - 1)|^{-1/2})$$

причем $a - 1 = 2t_1(t_3 - t_1)^{-1}$.

При $t \in (t_1, t_2)$ имеем $f_2(t) > (t_2 - t)[(t - t_1)(t_3 - t)]^{-1/2}$; предполагая, что $t_3 - t_2 \leq t_2 - t_1$, получим из (24) $t_2 - t_1 < 2\pi m$. Отсюда $t_3 - t_1 < 4\pi m$.

При $t \in (0, t_1)$ имеем $f_2(t) < t_2^{1/2} [t(1 - t_2)(t_1 - t)]^{-1/2}$; из (24) $q < [t_2(1 - t_2)^{-1}]^{1/2}$, откуда $t_2 > q^2/2$.

При $t \in (t_1, t_2)$ имеем $f_2(t) > t_2/t - 1$; в силу (24) $\pi m > t_2[\ln(t_2/t_1) - 1]$; отсюда и из оценки $t_2 > q^2/2$ имеем $t_1 > (q^2/2) \exp[-(1 + 2\pi m/q^2)]$.

Из этого неравенства и неравенства $t_3 - t_1 < 4\pi m$ получим требуемую оценку

$$(25) \quad a - 1 > q^2 (4\pi m)^{-1} \exp[-(1 + 2\pi m/q^2)]$$

Принимая во внимание (23), (25), заключаем, что $\lambda_0 \rightarrow 0$ при $m/q^2 \rightarrow \infty$ и $\lambda_0 \rightarrow 1$ при $m/q^2 \rightarrow 0$. Оценивая величину γ снизу, можно показать, что последнее условие эквивалентно $Lv_0/Q \rightarrow 0$. Кроме того, полученные оценки позволяют доказать, что $N_0 \rightarrow 0$ при $m/q^2 \rightarrow 0$, т. е. получаем однородное течение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gerber R. Sur les solutions exactes des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant. *J. math. pures et appl.*, 1955, vol. 34, No. 3. (Рус. перев.: М., Изд-во иностр. лит., 1959.)
2. Красовский Ю. П. О существовании аperiodических течений со свободной границей. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 4.
3. Киселев О. М. О течении тяжелой жидкости в канале с криволинейным дном. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
4. Тер-Крикоров А. М. Точное решение задачи о движении вихря под поверхностью жидкости. Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, т. 22, № 2.
5. Тер-Крикоров А. М. Нелинейная задача теории подводного крыла. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 6.
6. Birkhof G., Zarantonello E. Jets, wakes and cavities. New York, Acad. press, 1957. (Рус. перев.: М., «Мир», 1964.)

Казань

Поступила в редакцию
5.XII.1979

УДК 533:538

СИЛЬНЫЕ РАЗРЫВЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МАГНЕТИКАХ

Седова Г. Л.

Изучаются различные типы сильных разрывов величин электромагнитного поля. Распространение таких разрывов в магнетиках может сопровождаться тепловыми и механическими эффектами. При выбранных характерных значениях поля не учитывается зависимость внутренней энергии среды и поля от деформаций. Показано, что на вращательном разрыве энтропия среды не меняется, и найдено выражение, определяющее рост энтропии при прохождении плоскополяризованных разрывов. Без учета тепловых эффектов разрывы электромагнитного поля в магнетиках рассматривались ранее в работе [1].

1. Классификация сильных разрывов. Рассмотрим распространение сильного разрыва в магнетике, магнитную индукцию которого B считаем функцией внешнего магнитного поля H и энтропии среды s , что свойственно большинству ферромагнетиков [2]. При характерных значениях $H \sim 10^4$ А/м и $B \sim 10^2$ Тл за разрывом можно принять скорость разрыва по порядку величины, равной $v \sim 10^6$ м/с, а скачок напряжений равным $Hv/(8\pi) = 4 \cdot 10^5$ кг/с²м, при этом изменение скорости среды за таким разрывом будет порядка $Hv/(8\pi\rho v) \sim 4 \cdot 10^{-2}$ м/с, а возникающие при этом деформации порядка $Hv/(8\pi\rho v^2) \sim 4 \cdot 10^{-8}$. Отсюда видно, что возникающие за разрывом деформации столь малы, что их можно не учитывать и считать, что внутренняя энергия W единицы объема среды и поля есть функция энтропии s , модуля магнитной индукции B и модуля напряженности электрического поля H , причем имеют место равенства

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial s} = \rho T, \quad \frac{\partial W}{\partial B} \frac{B_i}{B} = \frac{H_i}{4\pi}, \quad \frac{\partial W}{\partial E} \frac{E_i}{E} = \frac{\varepsilon E_i}{4\pi}$$

Диэлектрическую проницаемость магнетика ε будем считать величиной постоянной, поэтому внутреннюю энергию W можно представить в виде $W = W^*(s, B) + \varepsilon E^2/(8\pi)$.

Из уравнения сохранения энергии в случае, когда скорость среды равна нулю, следует соотношение, которое должно выполняться на сильном разрыве

$$(1.2) \quad \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} |_{\mathbf{n}} = U [W]$$

Здесь \mathbf{n} — нормаль к поверхности скачка. Будем считать, что вектор нормали совпадает с осью x и скачок плоский, $U = v/c$ безразмерная скорость разрыва. Квадратными скобками обозначена разность величин за и перед скачком: $[\varphi] = \varphi_+ - \varphi_-$. Из уравнений Максвелла следуют соотношения, связывающие скачки величин электромагнитного поля [3]

$$(1.3) \quad \begin{aligned} [\mathbf{E}]_{\tau} &= U [\mathbf{B}] \times \mathbf{n}, \quad [D_x] = \varepsilon [E_x] = 0, \quad [B_x] = 0 \\ [\mathbf{H}]_{\tau} &= -U [\mathbf{D}] \times \mathbf{n}, \quad [\mathbf{H}]_{\tau} = U^2 \varepsilon [\mathbf{B}] \end{aligned}$$

Последнее уравнение системы (1.3) можно записать в виде

$$(1.4) \quad \left(U^2 \varepsilon - \frac{H_-}{B_-} - \left[\frac{H}{B} \right] \right) [\mathbf{B}] = \left[\frac{H}{B} \right] \mathbf{B}_{\tau_-}$$

Из уравнения (1.4) видно, что при $[H/B] \neq 0$ имеем $[\mathbf{B}] \parallel \mathbf{B}_{\tau_-}$. Такие разрывы будем в дальнейшем называть ударными волнами.

Если $[H/B] = [H_{\tau}/B_{\tau}] = 0$, то $U^2 = H_- / (\varepsilon B_-)$. В этом случае возможны разрывы, в которых вектор \mathbf{B} меняет свое направление. Среди них можно выделить вращательные разрывы, в которых модуль вектора \mathbf{B} не меняется, а также разрывы, в которых вектор \mathbf{B} меняется как по модулю, так и по направлению. Разрывы последнего типа можно рассматривать как слившиеся вращательный разрыв и ударную волну, движущиеся с одной и той же скоростью.

$$(1.5) \quad U^2 = \frac{H_-}{\varepsilon B_-} = \frac{[\mathbf{H}_{\tau}]}{\varepsilon [B_{\tau}]}$$

Таким образом, можно считать, что существуют только разрывы двух типов: ударные плоскополяризованные волны с $[\mathbf{B}] \parallel \mathbf{B}_{\tau_-}$ и вращательные разрывы с $[B] = 0$.

Отметим, что на вращательном разрыве нормальная составляющая вектора Пойнтинга не рвется. Действительно, соотношения на разрыве (1.3) инварианты относительно прибавления к напряженности электрического поля любого постоянного вектора \mathbf{E}_0 . Поэтому, наложив на первоначальное электромагнитное поле некоторое постоянное электрическое поле напряженности \mathbf{E}_0 , можно всегда сделать так, чтобы получившийся вектор $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}_0$ был направлен перпендикулярно вектору \mathbf{H} и имел модуль, удовлетворяющий условию $E' = H \Delta E / \Delta H$. В этом случае справедливо соотношение $|\mathbf{E}' + \Delta \mathbf{E}| = |\mathbf{E}'|$. Учитывая, что для вращательного разрыва $|\mathbf{H} +$

$+ \Delta \mathbf{H} | = | \mathbf{H} |$, можно показать, что

$$(\mathbf{E}' + \Delta \mathbf{E}) \times (\mathbf{H}' + \Delta \mathbf{H}) |_n = \mathbf{E}' \times \mathbf{H} |_n$$

2. **Изменение энтропии в сильных электромагнитных разрывах.** Покажем, что на вращательном разрыве энтропия среды не меняется. Это следует из отмеченного выше свойства вращательных разрывов: $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_n = 0$. Уравнение (1.2) инвариантно относительно прибавления любого постоянного вектора \mathbf{E}_0 . Члены, возникающие слева и справа, равны между собой в силу соотношений на разрыве $\mathbf{E}_{0\tau} [\mathbf{H}_\tau] / (4\pi) = v \mathbf{E}_{0\tau} \times [\mathbf{E}_\tau] / (4\pi)$, поэтому для вращательных разрывов справедливо соотношение

$$(2.1) \quad [W(s, B, E)] = 0$$

Функция $W(s, B, E)$ как функция s и модулей B и E в рассматриваемом разрыве может изменяться только за счет изменения энтропии, но из (2.1) следует, что $W(s_+) = W(s_-)$, а поскольку внутренняя энергия — однозначная функция своих аргументов то $s_+ = s_-$.

Рассмотрим изменение энтропии на ударных волнах. При помощи выбора системы координат и постоянного вектора \mathbf{E}_0 можно всегда добиться того, чтобы $\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_z \mathbf{e}_z$ и $\mathbf{E} = E_y \mathbf{e}_y$. В ударных волнах векторы электромагнитного поля не меняют своего направления, поэтому вектор \mathbf{B} будет лежать в плоскости XOZ , а вектор \mathbf{E} направлен по оси y и после прохождения разрыва. Тогда соотношения (1.2) и (1.3) можно привести к виду

$$(2.2) \quad \begin{aligned} [H] &= U^2 \epsilon [B], \quad [E] = U [B] \\ 2E_- [H] + 2H_- [E] + 2[H][E] &= U 8\pi [W^*(s, B)] + 2U \epsilon E_- [E] + U \epsilon [E]^2 \end{aligned}$$

Здесь и далее H, B и E означают переменные величины H_z, B_z и E_y . Функцию $W(s, \sqrt{B_x^2 + B_z^2}, E)$ будем рассматривать как функцию аргументов s, B, E , считая B_x постоянным параметром.

Из уравнений (2.2) получим уравнение «ударной адиабаты»

$$(2.3) \quad 8\pi [W^*] = 2H_- [B] + [H][B]$$

Функция $W^* = W^*(s, B)$ определяет рассматриваемую модель среды.

Интересно отметить, что если в уравнении (2.3) формально заменить $B/(4\pi)$ на удельный объем, а под W^* понимать внутреннюю энергию газа, то величина $H/(4\pi)$ будет представлять давление в газе и уравнение (2.3) переходит в известное уравнение ударной адиабаты в газовой динамике [4].

Рассмотрим следствия из уравнения (2.3) для некоторых наиболее простых и важных случаев задания функции W . Если намагничивание и нагревание среды происходят независимо, то внутреннюю энергию можно разбить на два слагаемых

$$W^* = W^{**}(s) + \frac{1}{4\pi} \int_0^B H(B) dB$$

Тогда величина W^{**} представляет собой энергию, которая превращается на разрыве в тепло.

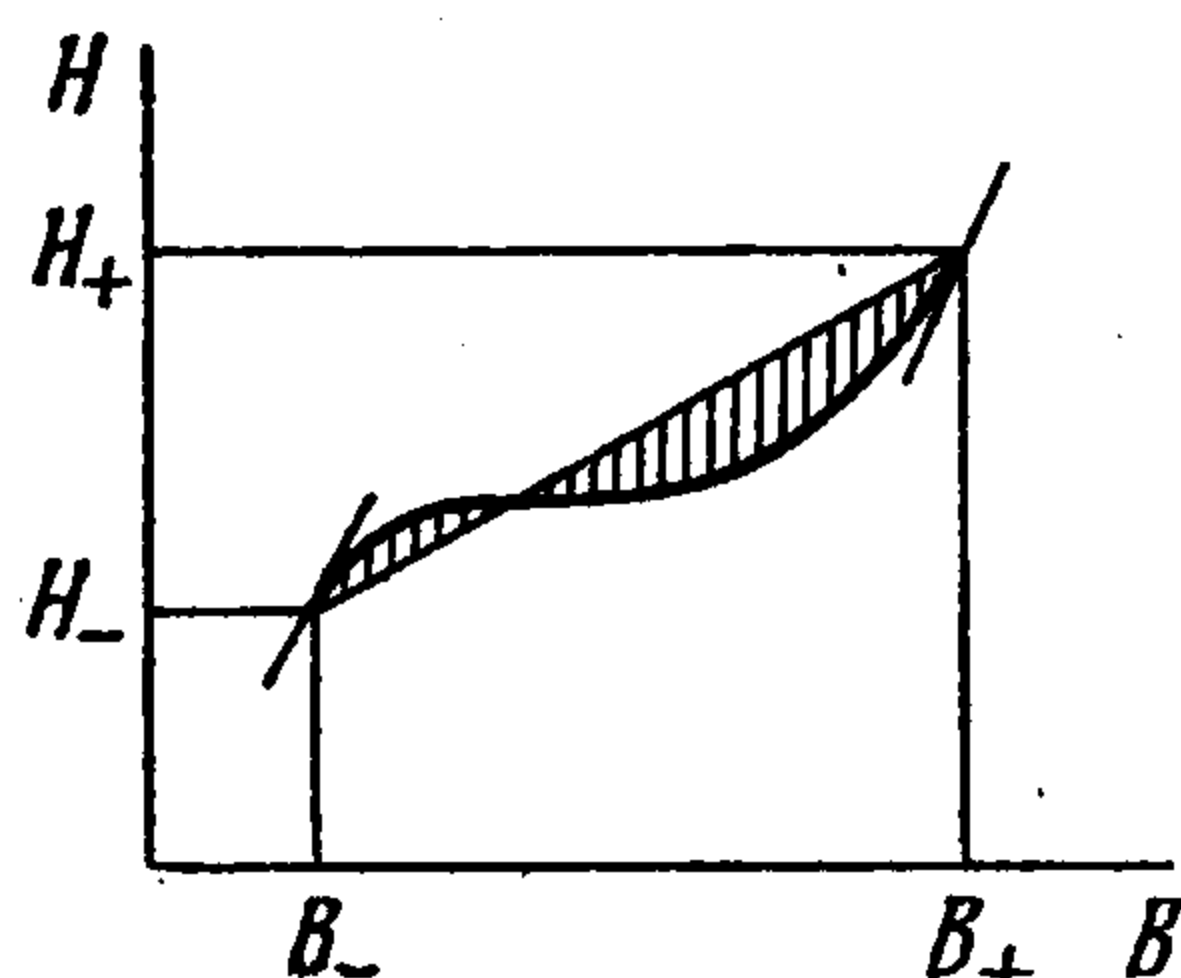
Уравнение (2.3) с учетом того, что $H_\pm = 4\pi(\partial W/\partial B)_\pm$, можно записать в виде

$$(2.4) \quad \begin{aligned} 4\pi [W^{**}(s)] &= - \int_{B_-}^{B_+} H(B) dB + \frac{H_+ - H_-}{2} (B_+ - B_-) = \\ &= \int_{B_-}^{B_+} \left\{ \frac{H_+ + H_-}{2} - H(B) \right\} dB \end{aligned}$$

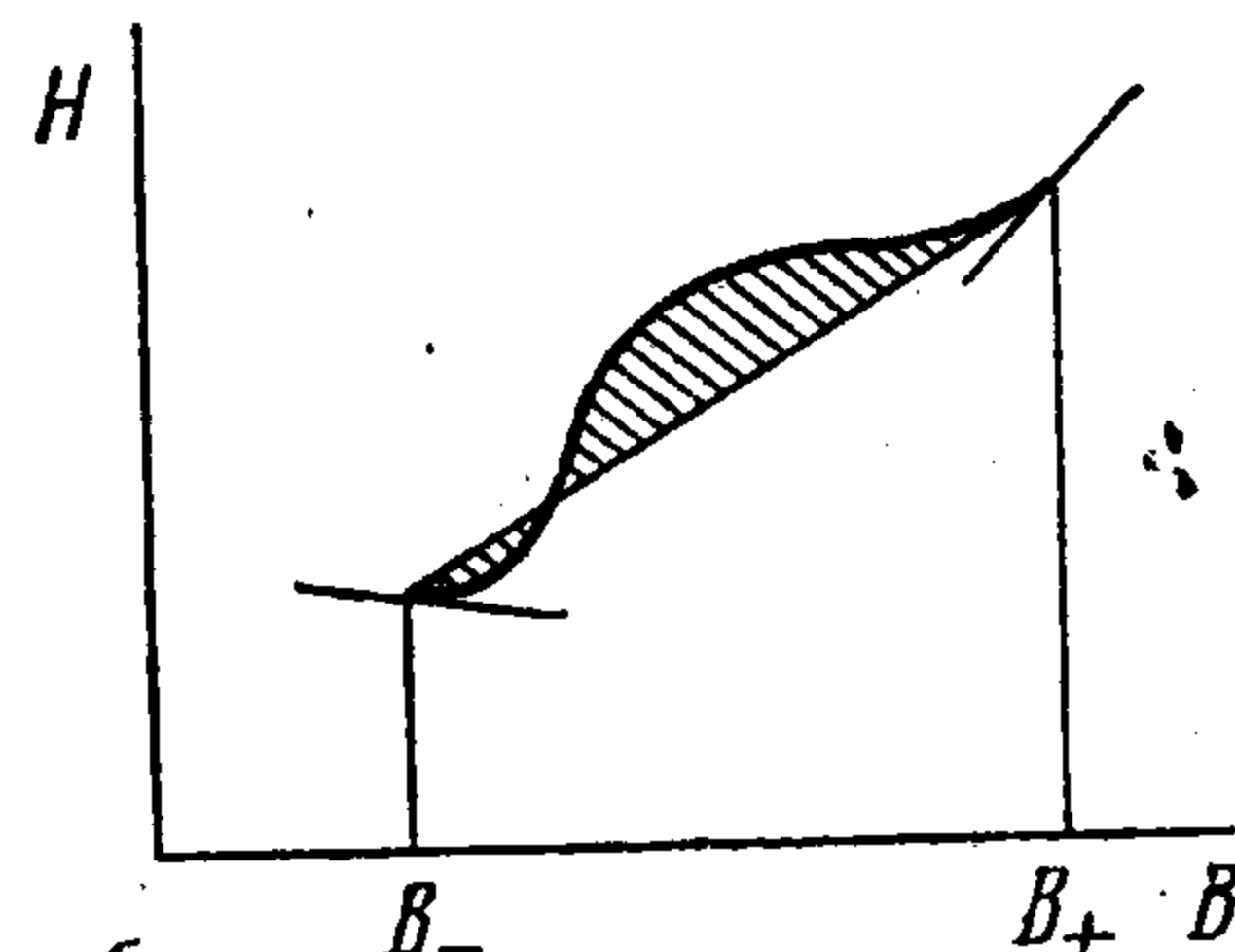
Правая часть интеграла (2.4) есть разность между площадью трапеции $B_- H_- B_+ H_+$ и фигуры, ограниченной кривой $H(B)$, осью абсцисс и прямыми $B = B_-$ и $B = B_+$ (фиг. 1).

Таким образом, при $B_+ > B_-$ имеем $[W^{**}(s)] > 0$ в том случае, если заштрихованная площадь под секущей, соединяющей точки (B_-, H_-) и (B_+, H_+) , больше, чем заштрихованная площадь над секущей, а при $B_+ < B_-$ будет $[W^{**}(s)] < 0$.

Внутренняя энергия является возрастающей функцией энтропии (приращения W^{**} и s связаны формулой $dW^{**} = \rho T ds$), поэтому условие $[W^{**}(s)] > 0$ переходит в условие возрастания энтропии на скачке. Условия возрастания энтропии и условие эволюционности независимы, поскольку наклон касательной в точках (B_-, H_-) и (B_+, H_+)



Фиг. 1



Фиг. 2

может удовлетворять условию эволюционности, т. е. лежать по разные стороны от секущей, а скачок энтропии при этом может быть отрицательным (фиг. 2) и наоборот (фиг. 1).

В случае, когда разрыв всех определяющих параметров на скачке мал, изменение величины внутренней энергии на скачке можно представить в виде следующего разложения:

$$(2.5) \quad [W^*] = \rho T_- [s] + \frac{H_-}{4\pi} [B] + \frac{1}{8\pi\mu} [B^2] + \frac{\eta}{8\pi} [B]^3$$

Коэффициенты $1/\mu$ и η можно считать постоянными. Подставив выражение для $[W^*]$ из (2.5) в (2.3), получаем выражение для скачка энтропии на разрыве

$$(2.6) \quad \rho T_- [s] = -\frac{\eta}{8\pi} [B]^3$$

Рассмотрим теперь случай, когда внутреннюю энергию W^* нельзя разбить на независимые слагаемые, зависящие только от одного параметра s или B . В этом случае внутреннюю энергию можно представить в виде

$$W^* = W^{**}(s) + \frac{1}{4\pi} \int_0^B H(B, s) dB$$

Предположим, что на сильном разрыве энтропия среды изменяется мало, т. е. разность $s_+ - s_-$ мала, тогда изменение внутренней энергии на скачке можно представить в виде

$$(2.7) \quad [W^*] = \frac{\partial W^*}{\partial s} [s] + \frac{1}{4\pi} \int_0^B \frac{\partial H}{\partial s} \Big|_{s=s_-} [s] dB + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{B_-}^{B_+} H(B, s_-) dB = \rho T(s_-, B_+) [s] + \frac{1}{4\pi} \int_{B_-}^{B_+} H(B, s_-) dB$$

Формула (2.7) дает возможность исследовать изменение энтропии на скачке так, как это было сделано в случае, когда внутреннюю энергию W^* можно было разбить на два независимых слагаемых, с учетом того, что теперь T зависит также от B_+ .

Отметим, что уравнение (2.3) есть следствие уравнений Максвелла, уравнения энергии в форме (1.2) и предположения о том, что зависимость плотности энергии W от электрического поля дается выражением $\partial W / \partial E = \epsilon E / (4\pi)$. При выполнении этих

предположений уравнение (2.3) останется справедливым, если под W^* понимать разность $W - \varepsilon E^2/(8\pi)$, но не считать, что W^* зависит только от s и B . В частности, это уравнение можно использовать при описании разрывов в средах, процесс намагничивания и размагничивания в которых сопровождается гистерезисом. В этом случае необходимо учитывать зависимость W^* , кроме s и B , также от вектора намагничивания M [5].]

Автор благодарит Куликовского А. Г. и Гогосова В. В. за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА]

1. Седова Г. Л. Нелинейные волны и сильные разрывы в ферромагнетиках.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 2, с. 155.
2. Бозорт Р. Ферромагнетизм. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 784 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 532 с.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976, 413 с.
5. Черный Л. Т. Некоторые задачи теории упругости сильно намагничивающихся тел.— Научн. тр. ин-та механики МГУ, 1974, № 31, с. 100.

Москва

Поступила в редакцию
14.X.1980

УДК 531.51

КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О НЕСИММЕТРИЧНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ СЖАТИИ ТЕЛА

Голубятников А. Н., Трускиновский Л. М.

В рамках ньютоновской механики строится класс точных решений уравнений движения гравитирующего газа при нулевом давлении (пыль), содержащий пять произвольных функций одной лагранжевой переменной и описывающий динамику тела, в целом не обладающего пространственной симметрией.

Ранее в рамках общей теории относительности соответствующие решения были найдены и исследованы в терминах сопутствующей синхронной метрики [1, 2]. Однако в ньютоновской механике требуется кроме сопутствующей метрики определить также и закон движения. С другой стороны, вместо формальных предположений о структуре метрического тензора здесь удается сразу сформулировать естественные физические условия, характеризующие вид закона движения, которые приводят к эквивалентной метрике. Кроме того, в конечном виде определяется ньютоновский гравитационный потенциал.

Существенной особенностью данного класса решений при наличии сферической симметрии границы тела является сферическая симметрия внешнего гравитационного поля, хотя внутри тела может происходить движение пыли, в целом не обладающее группой симметрий. Отметим, что в электростатическом приближении при постоянном отношении плотности заряда к плотности массы данный класс решений при подходящем изменении гравитационной постоянной описывает динамику пылевого заряженного тела.

1. В декартовой инерциальной системе координат (x^1, x^2, x^3) рассмотрим закон движения среды

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x^1 &= r \sin \theta \cos \varphi + x_0^1 \\ x^2 &= r \sin \theta \sin \varphi + x_0^2, \quad x^3 = r \cos \theta + x_0^3 \end{aligned}$$