равен 1. При некотором значении v_- скорости происходит обмен индексами, так что при $v > v_-$ точки A_1, A_2 становятся седловыми, а подвижные точки A_3, A_4 с новым индексом $j = 1$ по-прежнему удаляются от начала координат.

Если же $a_1 l_1 - a_2 l_2 > 0$, то при $v < v_+$ индекс начала координат равен единице. Подвижные седловые точки A_3, A_4 с увеличением скорости v подходят к началу координат, разрушая область устойчивости. При $v = v_+$ происходит слияние особых точек, в результате которого индекс начала координат при $v > v_+$ становится равным -1, т. е. оно превращается в неустойчивую особую точку.

Изложенный метод позволяет не только анализировать поведение особых точек для любой зависимости $Y_i = Y_i(\delta_i)$, но и управлять их поведением (подбирая соответствующим образом эту зависимость) таким образом, чтобы получить заданные наперед свойства нулевого решения уравнений возмущенного движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лобас Л. Г.* Вплив нахилу площини руху на шляхову стійкість автомобіля з еластичними за гіпотезою відведення колесами.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1970, № 11, с. 1008.
2. *Певзнер Я. М.* Теория устойчивости автомобиля. М.: Машгиз, 1947. 156 с.
3. *Sachs H. K., Chou C. C.* On the stability in the sense of Liapunov of a rubber tire vehicle.— Trans. ASME. Ser. G. J. Dyn. Syst., Measurement and Control, 1976, v. 98, No. 2, p. 180.
4. *Sachs H. K., Singh M.* Automobile stability — a study of the domain of attraction.— Vehicle syst. dyn., 1977, v. 6, No. 2—3, p. 169.
5. *Pacejka H. B.* Tyre factors and vehicle handling. [Paper], Delft University of Technology, 1978, No. 108, 31 p.

Киев

Поступила в редакцию 12.II.1980

УДК 532.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ В КАНАЛЕ

Гуревич И. Л.

Рассматривается плоская задача потенциального обтекания тяжелой жидкостью гладкого выпуклого профиля, симметричного относительно вертикальной оси, в канале с горизонтальным дном. Доказывается существование такого течения при достаточно больших значениях числа Фруда. Если длина профиля стремится к нулю и число Фруда остается больше единицы, то в пределе получается однородный поток. Ранее были получены аналогичные результаты для течения в канале с криволинейным дном при отсутствии обтекаемого профиля [1—3], для обтекания вихря в канале [4], а также для обтекания профиля в канале [5] (в отличие от настоящей работы в [5] задавался не сам профиль, а его образ в некоторой параметрической плоскости).

Течение в плоскости $z = x + iy$ предполагается симметричным относительно оси y — оси симметрии профиля. Ось x совпадает с дном канала. Известным считается угол $\Psi(s)$ между осью x и касательной к профилю, заданный как функция безразмерной величины $s = l/L$, где l — дуговая координата на профиле, отсчитываемая от верхней точки его, лежащей на оси y. При обходе профиля по часовой стрелке s возрастает; неизвестная длина профиля обозначена через $2L$, т. е. $0 \leqslant s \leqslant 2$. В силу симметрии и выпуклости $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = -\pi$, $d\Psi/ds \leqslant 0$. Безразмерная кривизна $d\Psi/ds$ ограничена. Известной считается также область G — образ области течения в плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$; это полоса $0 \leqslant \psi \leqslant Q$ с разрезом вдоль отрезка $|\varphi| \leqslant mQ$, $\psi = Q(1 - q)$, где $m > 0$, $0 < q < 1$. Наконец, известны скорость в бесконечно удаленных точках v_0 и ускорение силы тяжести g.

Отобразим G на область G_1 в плоскости переменного $\zeta = \xi + i\eta$ функцией $w = Q(\zeta + 1)$; G_1 — полоса $-1 \leqslant \eta \leqslant 0$ с разрезом вдоль отрезка $|\xi| \leqslant m$, $\eta = -q$. Кроме того, отобразим правые половины G и G_1 на полуплоскость $v \geqslant 0$ плоскости переменного $U = u + iv$, где отображение $U(\zeta)$ удовлетворяет условиям: $U(+\infty) = \infty$, $U(0) = -a < -1$, $U(-i) = b > 1$, $U(m - iq) = c \in (-1, 1)$, $U[(q \pm 0)i] = \mp 1$. По формуле Кристоффеля — Шварца

$$\frac{d\zeta}{dU} = \frac{1}{\pi} F(U), \qquad F(U) = (U - c)\left[(U + a)(U^2 - 1)(U - b)\right]^{-1/2} \tag{1}$$

$$\int_{-a}^{-1} f(u)\, d\ddot{u} = \pi q, \qquad \int_{-1}^{c} f(u)\, du = \int_{c}^{1} f(u)\, du = \pi m \tag{2}$$

$$(f(u) = |F(u)|)$$

Представим dw/dz в виде $dw/dz = v_0 e^{\omega}$, $\omega = \tau + i\theta$. Пусть $\omega = \omega_1 + \omega_2$, где $\omega_k = \tau_k + i\theta_k$ $(k = 1, 2)$, причем на свободной границе $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = 0$, на профиле $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \theta$, на дне канала и на оси симметрии $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Будем рассматривать как функции $\omega_k(U)$, так и функции $\omega_k(\zeta)$. Очевидно, на образе правой половины профиля при $|u| < 1$ будет $\theta_2(u) = \Phi[s(u)]$, где $\Phi(s) = -\Psi(s)$ при $0 \leqslant s \leqslant s_0$, $\Phi(s) = -\Psi(s) - \pi$ при $s_0 < s < 1$, $s_0 = s(c)$ — безразмерная дуговая координата точки схода потока, $s(u)$ — неизвестная функция, $s(-1) = 0$, $s(1) = 1$. Из соотношений $dw/dz = v_0 e^{\omega}$, $dw/d\zeta = Q$ и (1) получим при $|u| < 1$

$$s(u) = \gamma \int_{-1}^{u} f(u) \exp\left[-\tau_1(u) - \tau_2(u)\right] du \tag{3}$$

$$\gamma = \left\{\int_{-1}^{1} f(u) \exp\left[-\tau_1(a) - \tau_2(u)\right] du\right\}^{-1} \qquad \left(\gamma = \frac{Q}{\pi v_0 L}\right) \tag{4}$$

Обозначим $d\tau_1(\xi)/d\xi$ через $\mu(\xi)$. Из уравнения Бернулли и предположения о равенстве скорости в бесконечно удаленных точках величине v_0 вытекает

$$\mu(\xi) = -\lambda \sin\left[\theta_1(\xi) + \theta_2(\xi)\right]\left\{1 + 3\lambda \int_{\xi}^{\infty} \sin\left[\theta_1(\xi) + \theta_2(\xi)\right] d\xi\right\}^{-1} \tag{5}$$

$$\tau_1(\xi) = \int_{\infty}^{\xi} \mu(\xi)\, d\xi, \qquad \lambda = \frac{gQ}{v_0^3}$$

Из формулы Келдыша — Седова получим

$$\tau_2(u) = \int_{-1}^{1} S(t, u)\, \Phi[s(t)]\, dt, \qquad |u| \leqslant 1 \tag{6}$$

$$\theta_2(\xi) = \int_{-1}^{1} S[t, r(\xi)]\, \Phi[s(t)]\, dt, \qquad \xi \geqslant 0, \qquad r(\xi) \leqslant -a \tag{7}$$

$$\tau_1(u) = \int_{-a}^{-\infty} S(t, u)\, \tau_1[p(t)]\, dt, \qquad |u| \leqslant 1, \qquad p(t) \geqslant 0 \tag{8}$$

$$S(t, u) = \pi^{-1}(t - u)^{-1}\left|(a + u)(a + t)t^{-1}\right|^{1/2}$$

Здесь функция $u = r(\xi)$ — обратная к функции $\xi = p(u)$, определяемой из (1) при $u \leqslant -a$

$$p(u) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{u}^{-a} f(u)\,du \tag{9}$$

Интегрируя по частям формулу Келдыша — Седова с учетом (9), имеем при $\xi \geqslant 0$

$$\theta_1(\xi) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{-a} \mu[p(t)]\, f(t)\, D[t, r(\xi)]\,dt \tag{10}$$

$$D(t, u) = \ln|[\rho(t) + \rho(u)][\rho(t) - \rho(u)]^{-1}|, \quad \rho(t) = |a + t|^{1/2}$$

Равенства (3), (5) с учетом соотношений (4), (6)—(10) образуют нелинейную систему интегральных уравнений относительно функций $\mu(\xi)$ ($\xi \geqslant 0$) и $s(u)$ ($|u| \leqslant 1$). Ниже с помощью принципа Шаудера доказывается существование решения этой системы при определенных ограничениях на число Фруда $1/\lambda$, зависящих от величин m, q.

Пусть $x = \{\mu(\xi), s(u)\}$, H_α — пространство гельдеровых на $[-1, 1]$ функций с показателем α и нормой $\|s\|_\alpha$, C — пространство непрерывных на $[0, \infty]$ функций, $E = C \times H_\alpha$, $E_0 = E_0(N, \beta, R)$ — замкнутое подмножество элементов из E_0, удовлетворяющих условиям

$$|\mu(\xi)| \leqslant Ne^{-\pi\beta\xi/2}, \quad \|s\|_\alpha \leqslant R \tag{11}$$

$$s(-1) = 0, \quad s(1) = 1, \quad [s(u') - s(u')](u'' - u') \geqslant 0$$

Исследуемую систему уравнений можно записать в операторном виде: $x = Ax$. Покажем, что при некоторых значениях N, β, R оператор A переводит E_0 в себя. Пусть $x_1 = \{\mu_1(\xi), s(u)\} \in E_0$. Оценки элемента $x_2 = Ax_1$ проведем в несколько этапов.

1°. Правая часть (3) $s_2(u)$ возрастает и в силу (4) $s_2(-1) = 0$, $s_2(1) = 1$.

2°. При $u < -a$ имеем $f(u) \leqslant [(1 + u)(a + u)]^{-1/2}$, поэтому из (9) получаем

$$\xi = p(u) < \pi^{-1} \ln|(4u + 3a + 1)(a - 1)^{-1}|, \quad u = r(\xi) < \frac{1}{4}(1 - a)e^{\pi\xi} \tag{12}$$

3°. Так как $-\pi \leqslant \Psi(s) \leqslant 0$, то $|\Phi(s)| \leqslant \pi$ и из (7) получим неравенство $|\theta_2(\xi)| < 4|ar(\xi)|^{-1/2}$; в силу (12)

$$|\theta_2(\xi)| < k_1 e^{-\pi\xi/2}, \quad k_1 = 8[a(a-1)]^{-1/2} \tag{13}$$

4°. Продолжим $\mu_1(\xi)$ на полуось $\xi < 0$ нечетным образом. Тогда правая часть (10) $\theta_1(\xi)$ — граничное значение при $\zeta = \xi$ гармонической в двусвязной области G_1 функции $\theta_1(\xi)$, которая равна нулю при $\zeta = \xi - i$ и на берегах разреза и имеет при $\zeta = \xi$ нормальную производную, равную $\mu_1(\xi)$. С помощью (11) и принципа максимума можно показать, что $|\theta_1(\xi)| \leqslant \varkappa(\xi)$, где $\varkappa(\xi)$ — граничное значение при $\zeta = \xi$ гармонической в односвязной области ($-1 \leqslant \eta \leqslant 0$, $|\xi| < \infty$) функции, равной нулю при $\zeta = \xi - i$ и имеющей при $\zeta = \xi$ нормальную производную, равную $\delta(\xi) = Ne^{-\pi\beta|\xi|/2}$. Считая, что $0 < \beta < 1$, и используя лемму 1 из [3], приходим к неравенству $|\theta_1(\xi)| < (1 - \beta^2)^{-1}\delta(\xi)$. Отсюда и из (13) вытекает, что правая часть (5) $\mu_2(\xi)$ удовлетворяет при $\xi > 0$ неравенству $|\mu_2(\xi)| < \delta(\xi)$, если

$$1 - 6\lambda B(\pi\beta)^{-1} > 0, \quad \lambda B[1 - 6\lambda B(\pi\beta)^{-1}]^{-1} \leqslant N \tag{14}$$

$$(B = N/(1 - \beta^2) + k_1)$$

Анализ показывает, что если

$$\lambda \leqslant [(1 - \beta^2)^{-1/2} + (6k_1/(\pi\beta))^{1/2}]^{-2} \tag{15}$$

то справедливы следующие утверждения: число

$$N_0 = \frac{\pi\beta(1 - \beta^2)}{12}\left\{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1 - \lambda^2} - \frac{6k_1}{\beta\pi} - \left[\left(\frac{1}{\lambda} - k_2\right)\left(\frac{1}{\lambda} - k_3\right)\right]^{1/2}\right\} \tag{16}$$

$$(k_{2,3} = [(1 - \beta^2)^{-1/2} \pm (6k_1/(\pi\beta))^{1/2}]^2)$$

действительно и положительно; неравенства (14) выполняются при $N = N_0$, а второе из них не выполняется при $N < N_0$. Поскольку $0 < \beta < 1$, (15) является следствием неравенства

(17) $$\lambda \leqslant [(1-\beta)^{-1} + (6k_1/\pi)^{1/2}\beta^{-1}]^{-2} = \nu(\beta)$$

Максимальное значение $\nu(\beta)$ достигается при $\beta = \beta_0$, где

(18) $$\beta_0 = (1 + (6k_1/\pi)^{-1/4}]^{-1}, \quad \nu(\beta_0) = [1 + (6k_1/\pi)^{1/4}]^{-4}$$

В дальнейшем будем считать, что $\beta = \beta_0$, $N = N_0$ и выолнено неравенство (17).

5°. В силу неравенства (11) и формулы (8) $|\tau_1(u)| \leqslant \max|\tau_1(\xi)| < 2N_0/(\pi\beta) = k_4$ при $|u| \leqslant 1$. Пусть $f_1(u) = |u-c|(1-u^2)^{-1/2}$. Тогда $|u| \leqslant 1$ будет

(19) $$f_1(u)[(a+1)(b+1)]^{-1/2} \leqslant f(u) \leqslant f_1(u)[(a-1)(b-1)]^{-1/2}$$

Из (4), (19) оценки $|\tau_1(u)| < k_4$, неравенства Иенсена [6] и неравенства

$$\int\limits_{-1}^{1} f(u)\,du > 2$$

получим

$$\gamma < \frac{1}{2}[(a+1)(b+1)]^{1/2} \exp\left[k_4 - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\tau_2(u)\,du\right]$$

Последний интеграл оценивается с помощью формулы (6) с учетом неравенства $|\Phi(s)| \leqslant \pi$; в результате имеем

(20) $$\gamma < 4^{-1}\exp[k_4 + 2(1+\sqrt{2})][(a+1)(b+1)]^{1/2}$$

6°. Интегрируя по частям в (6) с учетом того, что $\Phi(s_0 - 0) - \Phi(s_0 + 0) = \pi$, получим при $|u| \leqslant 1$

(21) $$\tau_2(u) = \ln\frac{|u-c|}{[(c+a)^{1/2} + (u+a)^{1/2}]^2} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\Psi[s(t)]}{dt}\cdot D(t,u)\,dt$$

Учитывая, что $D(t,u) > \ln[2(a-1)]$, $\Psi(0) - \Psi(1) = \pi$, $|\tau_1(u)| < k_4$, а также (19), (20) имеем из (3) и (21)

$$\frac{ds_2}{du} < k_5(1-u^2)^{-1/2}, \qquad k_5 = \frac{1}{2}\exp[2(k_4 + 1 + \sqrt{2})]\times$$
$$\times\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^{3/2}\left(\frac{b+1}{b-1}\right)^{1/2}$$

Отсюда для любых $u', u'' \in [-1, 1]$

(22) $$|s_2(u'') - s(u')| \leqslant 2k_5|u'' - u'|^{1/2}, \quad \|s_2\|_{1/2} < 1 + 2k_5$$

Из полученных оценок вытекает, что оператор A переводит в себя замкнутое множество $E_0(N, \beta, R)$ из пространства $E = C \times H_\alpha$ ($\alpha < 1/2$, $\beta = \beta_0$ определяется из (18), $N = N_0$ — из (16), $R = 1 + k_5\sqrt{2}$), если λ удовлетворяет неравенству (17). Стандартными методами [1, 6] доказывается полная непрерывность оператора A на E_0 по норме пространства E. По теореме Шаудера уравнение $x = Ax$ имеет хотя бы одно решение в E_0 при выполнении эквиваленного (17), (18) неравенства

(23) $$\lambda \leqslant \{1 + 2[a(a-1)\pi^2/9]^{-1/8}\}^{-4} = \lambda_0$$

Значения параметров a, b, c находятся из системы уравнений (2) и зависят от заданных параметров $q \in (0, 1)$ и $m > 0$. Чтобы можно было эффективно проверить выполнение условия (23), дадим оценку величины $(a - 1)$ снизу.

Произведем в (2) замену переменной по формуле $u = (a+b)t - a$. Значениям $u = a, -1, c, 1, b$ соответствуют значения $t = 0, t_1, t_2, t_3, 1$ $(0 < t_k < 1)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\pi q = \int\limits_{0}^{t_1} f_2(t)\,dt, \quad \pi m = \int\limits_{t_1}^{t_2} f_2(t)\,dt = \int\limits_{t_2}^{t_3} f_2(t)\,dt \tag{24}$$

$$(f_2(t) = |t_2 - t|\ |t(t - t_1)(t - t_3)(t - 1)|^{-1/2})$$

причем $a - 1 = 2t_1(t_3 - t_1)^{-1}$.

При $t \in (t_1, t_2)$ имеем $f_2(t) > (t_2 - t)[(t - t_1)(t_3 - t)]^{-1/2}$; предполагая, что $t_3 - t_2 \leqslant t_2 - t_1$, получим из (24) $t_2 - t_1 < 2\pi m$. Отсюда $t_3 - t_1 < 4\pi m$.

При $t \in (0, t_1)$ имеем $f_2(t) < t_2^{1/2}[t(1 - t_2)(t_1 - t)]^{-1/2}$; из (24) $q < [t_2(1 - t_2)^{-1}]^{1/2}$, откуда $t_2 > q^2/2$.

При $t \in (t_1, t_2)$ имеем $f_2(t) > t_2/t - 1$; в силу (24) $\pi m > t_2[\ln(t_2/t_1) - 1]$; отсюда и из оценки $t_2 > q^2/2$ имеем $t_1 > (q^2/2)\exp[-(1 + 2\pi m/q^2)]$.

Из этого неравенства и неравенства $t_3 - t_1 < 4\pi m$ получим требуемую оценку

$$a - 1 > q^2(4\pi m)^{-1}\exp[-(1 + 2\pi m/q^2)] \tag{25}$$

Принимая во внимание (23), (25), заключаем, что $\lambda_0 \to 0$ при $m/q^2 \to \infty$ и $\lambda_0 \to 1$ при $m/q^2 \to 0$. Оценивая величину γ снизу, можно показать, что последнее условие эквивалетно $Lv_0/Q \to 0$. Кроме того, полученные оценки позволяют доказать, что $N_0 \to 0$ при $m/q^2 \to 0$, т. е. получаем однородное течение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gerber R.* Sur les solutions exactes des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant. J. math. pures et appl., 1955, vol. 34, No. 3. (Рус. перев.: М., Изд-во иностр. лит., 1959.)
2. *Красовский Ю. П.* О существовании апериодических течений со свободной границей. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 4.
3. *Киселев О. М.* О течении тяжелой жидкости в канале с криволинейным дном. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
4. *Тер-Крикоров А. М.* Точное решение задачи о движении вихря под поверхностью жидкости. Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, т. 22, № 2.
5. *Тер-Крикоров А. М.* Нелинейная задача теории подводного крыла. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 6.
6. *Birkhof G., Zarantonello E.* Jets, wakes and cavities. New York, Acad. press, 1957. (Рус. перев.: М., «Мир», 1964.)

Казань

Поступила в редакцию
5.XII.1979

УДК 533:538

СИЛЬНЫЕ РАЗРЫВЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МАГНЕТИКАХ

Седова Г. Л.

Изучаются различные типы сильных разрывов величин электромагнитного поля. Распространение таких разрывов в магнетиках может сопровождаться тепловыми и механическими эффектами. При выбранных характерных значениях поля не учитывается зависимость внутренней энергии среды и поля от деформаций. Показано, что на вращательном разрыве энтропия среды не меняется, и найдено выражение, определяющее рост энтропии при прохождении плоскополяризованных разрывов. Без учета тепловых эффектов разрывы электромагнитного поля в магнетиках рассматривались ранее в работе [1].