

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК И ИХ ХАРАКТЕРА В ЗАДАЧЕ О ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ КОЛЕСНОГО ЭКИПАЖА

В е р б и ц к и й В. Г., Л о б а с Л. Г.

Предлагается способ определения особых точек в задаче о плоскопараллельном движении колесного экипажа (автомобиля, самолета на взлетно-посадочной полосе и пр.), пригодный для произвольной зависимости боковых реакций от углов увода. Сочетание этого метода с теорией индексов Пуанкаре позволяет определять характер поведения нулевого решения уравнений возмущенного движения. Показано, что в случае произвольного закона бокового увода потере устойчивости начала координат соответствует либо рождение кратной особой точки в начале координат, либо слияние особых точек в начале координат. Рассматривается частный случай кубической аппроксимации боковых реакций.

Согласно [1], динамическое поведение модели колесного экипажа, движущегося по горизонтальной плоскости равномерно и прямолинейно, описывается двумя переменными — поперечной скоростью центра масс и угловой скоростью рысканья. Непосредственно воздействовать на эти величины водитель не может: управляемыми параметрами экипажа являются угол поворота передних колес (принятый в данной статье равным нулю) и продольная скорость экипажа (взятая постоянной). Такая постановка задачи соответствует работе [2].

Линеаризация зависимости боковой силы от угла увода, используемая в большинстве работ по динамике безрельсовых экипажей, имеет по крайней мере два недостатка. Она, с одной стороны, не отражает свойств экспериментальных характеристик, подавляющее большинство которых носит явно выраженный нелинейный характер. С другой стороны, находясь в рамках линейной модели, невозможно объяснить существование критической скорости движения экипажа с избыточной поворачиваемостью и ее отсутствие у экипажа с недостаточной поворачиваемостью.

Естественным и наиболее простым развитием линейной теории является кубическая (относительно углов увода δ_i) аппроксимация боковых реакций Y_i , принятая в [3, 4] и применимая тогда, когда кривая $Y_i = Y_i(\delta_i)$ — выпуклая. Нередко, однако, эта кривая имеет точки перегиба и довольно сложную конфигурацию. На этапе проектирования экипажа иногда представляется возможным варьировать функцию $Y_i(\delta_i)$, подбирая соответствующим образом его параметры. Перечисленные ситуации делают актуальной задачу об исследовании движения экипажа в случае произвольного закона увода.

В [5] предложен геометрический метод нахождения особых точек по виду зависимости $Y_i = Y_i(\delta_i)$, а анализ устойчивости проведен на основании фазового портрета, построенного методом изоклин. При этом на параметры экипажа наложены существенные ограничения.

Покажем, что при исследовании устойчивости прямолинейного движения можно избежать построения фазовых кривых, сочетая графический метод [5] с теорией индексов особых точек, на основании которой потеря устойчивости прямолинейного движения связана с появлением кратной особой точки в начале координат.

Если m — масса, I — момент инерции экипажа относительно вертикальной оси, проходящей через его центр масс D , v, u — продольная и поперечная скорости точки D , l_1, l_2 — расстояния от точки D до середин передней и соответственно задней осей, ω — угловая скорость рысканья, то уравнения движения имеют вид [1]

$$(1) \quad m(u' + v\omega) = Y_1 + Y_2, \quad I\omega' = Y_1 l_1 - Y_2 l_2$$

Нахождение особых точек сводится к решению системы

$$(2) \quad mv\omega = Y_1 + Y_2, \quad Y_1 l_1 = Y_2 l_2$$

Пусть N_i — вертикальная нагрузка на i -ю ось. Тогда $N_1 = mgl_2/l$, $N_2 = mgl_1/l$. Поэтому второе уравнение системы (2) записывается в виде: $Y_1 N_2 = Y_2 N_1$. Введя

в рассмотрение величину Y , такую, что

$$(3) \quad Y_1/N_1 = Y_2/N_2 = Y$$

из первого уравнения (2) находим $Y = v\omega/g$. Так как $\omega = (\delta_2 - \delta_1) v/l$, то

$$(4) \quad Y = v^2 g^{-1} l^{-1} (\delta_2 - \delta_1) \quad (l = l_1 + l_2)$$

Угловой коэффициент прямой (4) на плоскости декартовых координат Y и $\delta_2 - \delta_1$ всегда положителен и с увеличением скорости движения растет до $+\infty$. Из (3) следует, что Y — некоторая известная функция переменной $\delta_2 - \delta_1$, т. е.

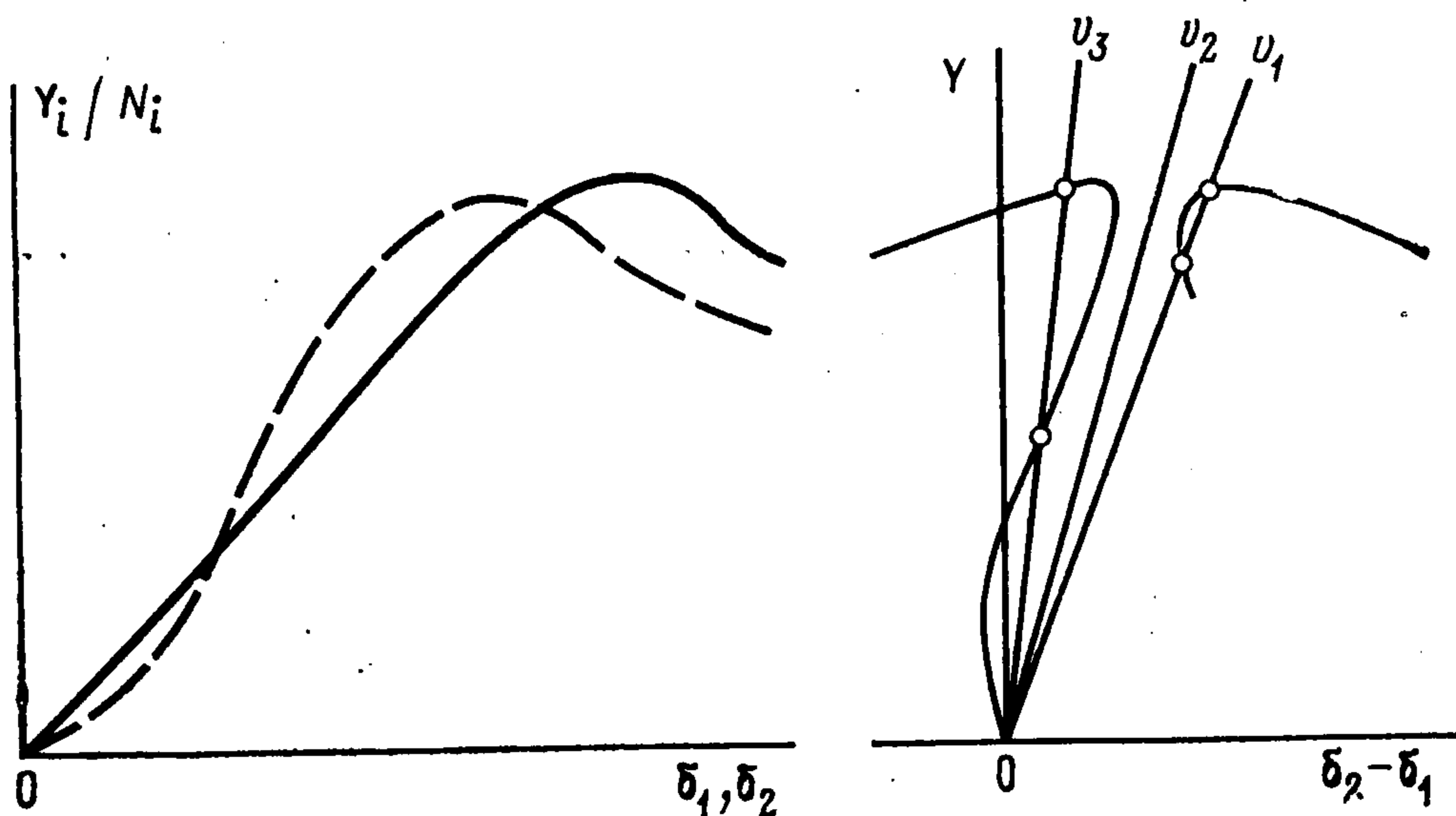
$$(5) \quad Y = Y(\delta_2 - \delta_1)$$

Точки пересечения прямой (4) с кривой (5) соответствуют особым точкам системы (1).

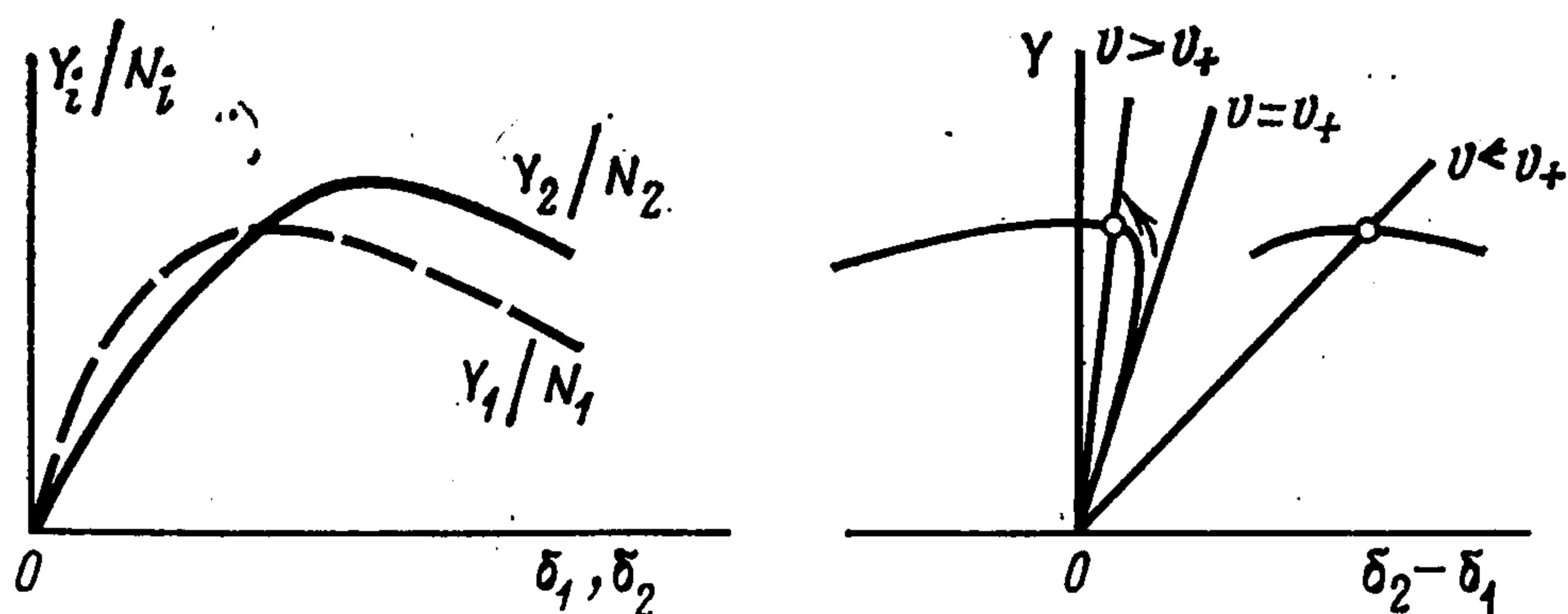
Проиллюстрируем метод на примере линейной гипотезы увода: $Y_1 = a_1 \delta_1$, $Y_2 = a_2 \delta_2$, где a_i — коэффициенты сопротивления уводу (постоянные). В этом случае (5) — прямая линия

$$(6) \quad Y = k_1 k_2 (k_1 - k_2)^{-1} (\delta_2 - \delta_1), \quad k_1 = a_1 l / (m g l_2), \quad k_2 = a_2 l / (m g l_1)$$

При $k_1 < k_2$, т. е. при $a_1 l_1 - a_2 l_2 < 0$, прямая (6) может пересечь кривую (4) лишь в начале координат. Таким образом, при любом значении v имеется только одна особая



Фиг. 1



Фиг. 2

точка в начале координат, что соответствует устойчивости движения при всех скоростях. Если же $k_1 > k_2$, т. е. $a_1 l_1 - a_2 l_2 > 0$, то с ростом v «подвижная» прямая (4) приближается к прямой (6). При некотором значении скорости $v = v_+$ имеется целая прямая особых точек, что соответствует потере устойчивости нулевого решения уравнений возмущенного движения.

Так как обычно закон увода линеен при малых углах увода, то устойчивость по Ляпунову начала координат в неособенных случаях определяется линейной частью. В случае, изображенном на фиг. 1 (здесь и далее штриховой кривой соответствует

$i = 1$, сплошной — $i = 2$), имеем

$$(7) \quad k_2 = [d(Y_2/N_2)/d\delta_2]_{\delta_2=0} > k_1 = [d(Y_1/N_1)/d\delta_1]_{\delta_1=0}$$

Но из рассмотрения линейной модели следует, что при $k_2 > k_1$ прямолинейное движение устойчиво при любом значении v . Поэтому (7) предопределяет устойчивость начала координат при любом значении v .

Следовательно, в случае произвольной гипотезы увода потере устойчивости начала координат соответствует либо рождение особой точки в начале координат, либо слияние особых точек в начале координат, т. е. вопрос устойчивости свелся к анализу поведения особых точек. Проиллюстрируем это утверждение примерами.

1°. *Рождение кратной особой точки.* Из анализа правой части фиг. 2 видно, что при $v < v_+$ в малой окрестности точки $(0,0)$ нет особых точек: начало координат — изолированная особая точка, а индекс Пуанкаре] начала координат при $v < v_+$ равен единице. Поэтому при остальных значениях параметра v сумма индексов всех особых точек должна быть также равной единице. При $v = v_+$ в начале координат рождается кратная особая точка. При $v > v_+$ в окрестности начала координат имеется две «подвижные» (т. е. зависящие от скорости v) особые точки — в первом и третьем квадрантах. Поскольку индекс начала координат при $v > v_+$ равен -1 (седло), то индекс каждой подвижной точки равен 1 .

Покажем, что в некоторой] окрестности начала координат, т. е. при $v_+ < v < v_+ + v'$, где $v' > 0$, эти подвижные особые точки устойчивы. С этой целью в уравнениях движения (1) заменим переменные: от u, ω перейдем к δ_1, δ_2 по формулам

$$u = -vl^{-1}(l_2\delta_1 + l_1\delta_2) + \dots, \quad \omega = vl^{-1}(\delta_2 - \delta_1) + \dots$$

В новых переменных уравнения движения будут

$$|\dot{\delta}_1 = P(\delta_1, \delta_2), \quad \dot{\delta}_2 = Q(\delta_1, \delta_2)$$

$$P = -[v/l + a_1v^{-1}(m^{-1} + l_1^2I^{-1})]\delta_1 + [v/l + a_2v^{-1}(l_1l_2I^{-1} - m^{-1})]\delta_2 + \dots$$

$$Q = [a_1v^{-1}(l_1l_2I^{-1} - m^{-1}) - vl^{-1}]\delta_1 + [v/l - a_2v^{-1}(l_2^2I^{-1} + m^{-1})]\delta_2 + \dots$$

$$a_1 = (dY_1/d\delta_1)_{\delta_1=0}, \quad a_2 = (dY_2/d\delta_2)_{\delta_2=0}$$

Отсюда

$$-p|_{(0,0)} = [\text{div}(P, Q)]_{(0,0)} = \left(\frac{\partial P}{\partial \delta_1} + \frac{\partial Q}{\partial \delta_2} \right)_{(0,0)} =$$

$$= -\frac{1}{v} \left(\frac{a_1 + a_2}{m} + \frac{a_1l_1^2 + a_2l_2^2}{I} \right)$$

$$q|_{(0,0)} = \left[\frac{D(P, Q)}{D(\delta_1, \delta_2)} \right]_{0,0} = \begin{vmatrix} \partial P/\partial \delta_1 & \partial P/\partial \delta_2 \\ \partial Q/\partial \delta_1 & \partial Q/\partial \delta_2 \end{vmatrix}_{(0,0)} = \frac{a_1a_2l^2 - mv^2(a_1l_1 - a_2l_2)}{mv^2I}$$

Всегда $p > 0$. Если $a_1l_1 - a_2l_2 \leq 0$, то $q > 0$ при любом значении v . При $a_1l_1 - a_2l_2 > 0$ имеем

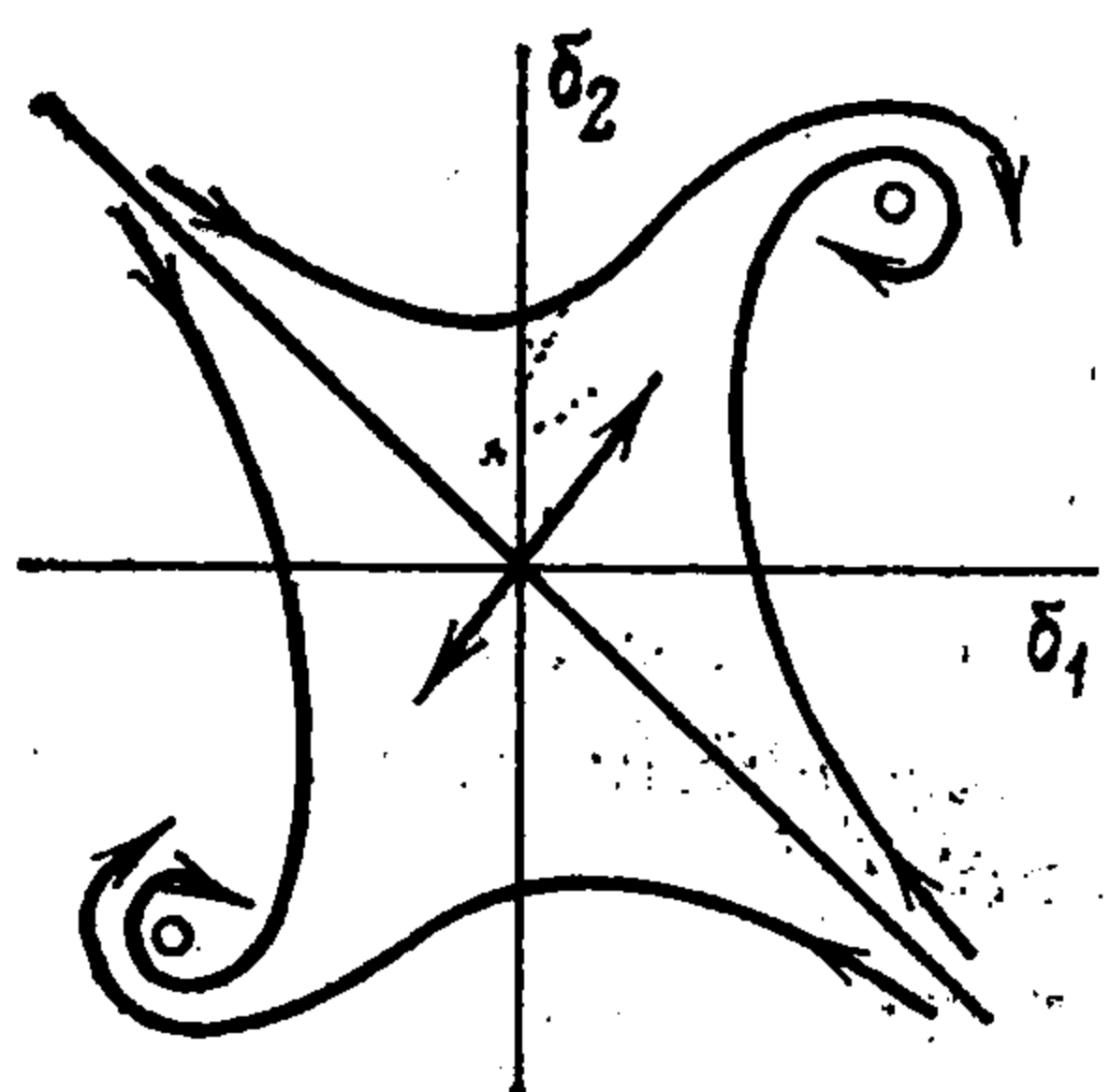
$$q = (a_1l_1 - a_2l_2) I^{-1}v^{-2}(v_+^2 - v^2), \quad v_+ = l[a_1a_2m^{-1}(a_1l_1 - a_2l_2)^{-1}]^{1/2}$$

Поэтому $q > 0$ при $v < v_+$, $q < 0$ при $v > v_+$. В силу непрерывности функции $\text{div}(P, Q)$ по обеим переменным δ_1, δ_2 в области определения $\exists \alpha > 0$: $|\delta_1^*| < \alpha$, $|\delta_2^*| < \alpha$ (т. е. $v_+ < v < v_+ + v'$, $v' > 0$) $\Rightarrow [\text{div}(P, Q)]_{(\delta_1^*, \delta_2^*)} > 0$.

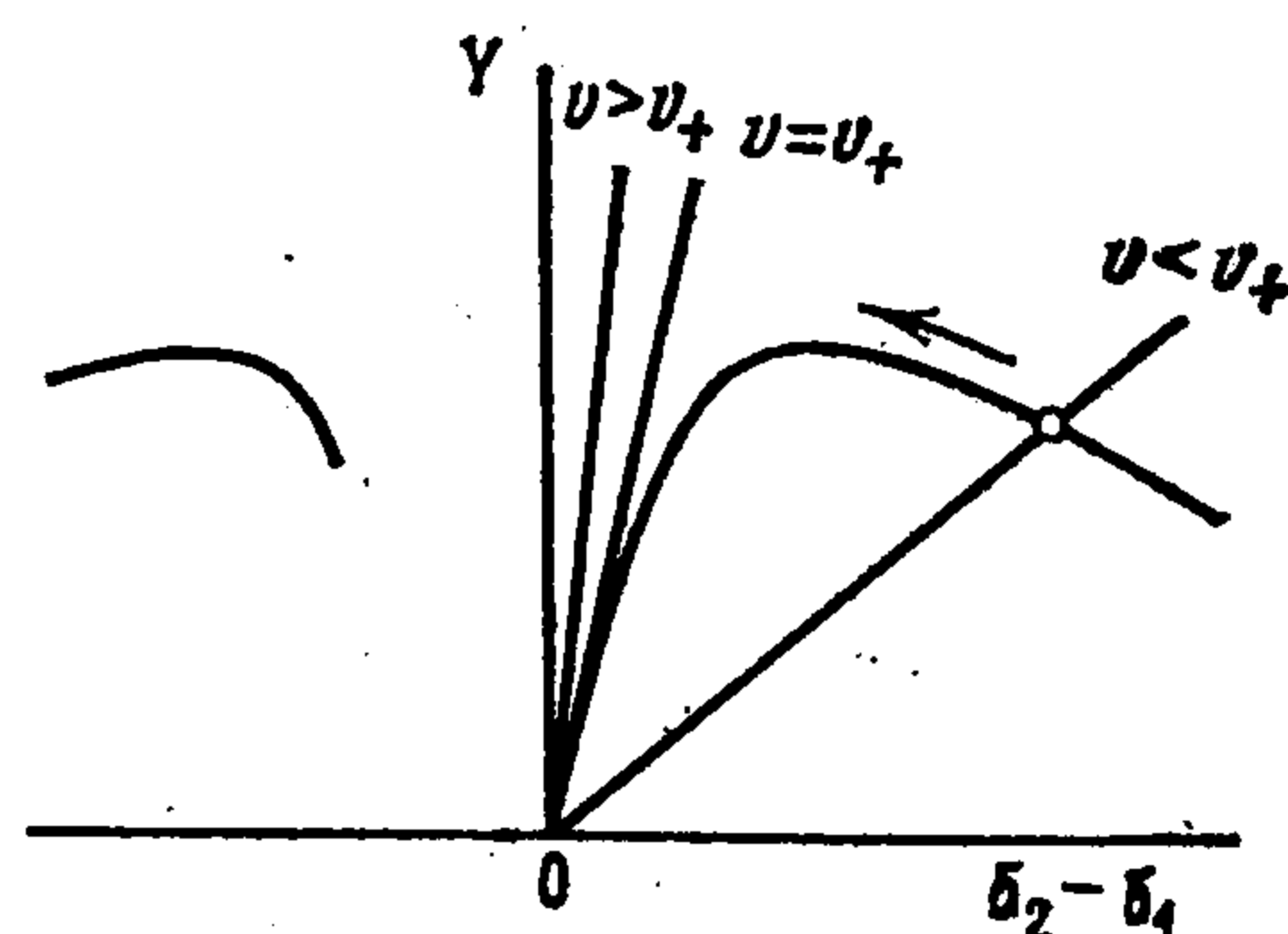
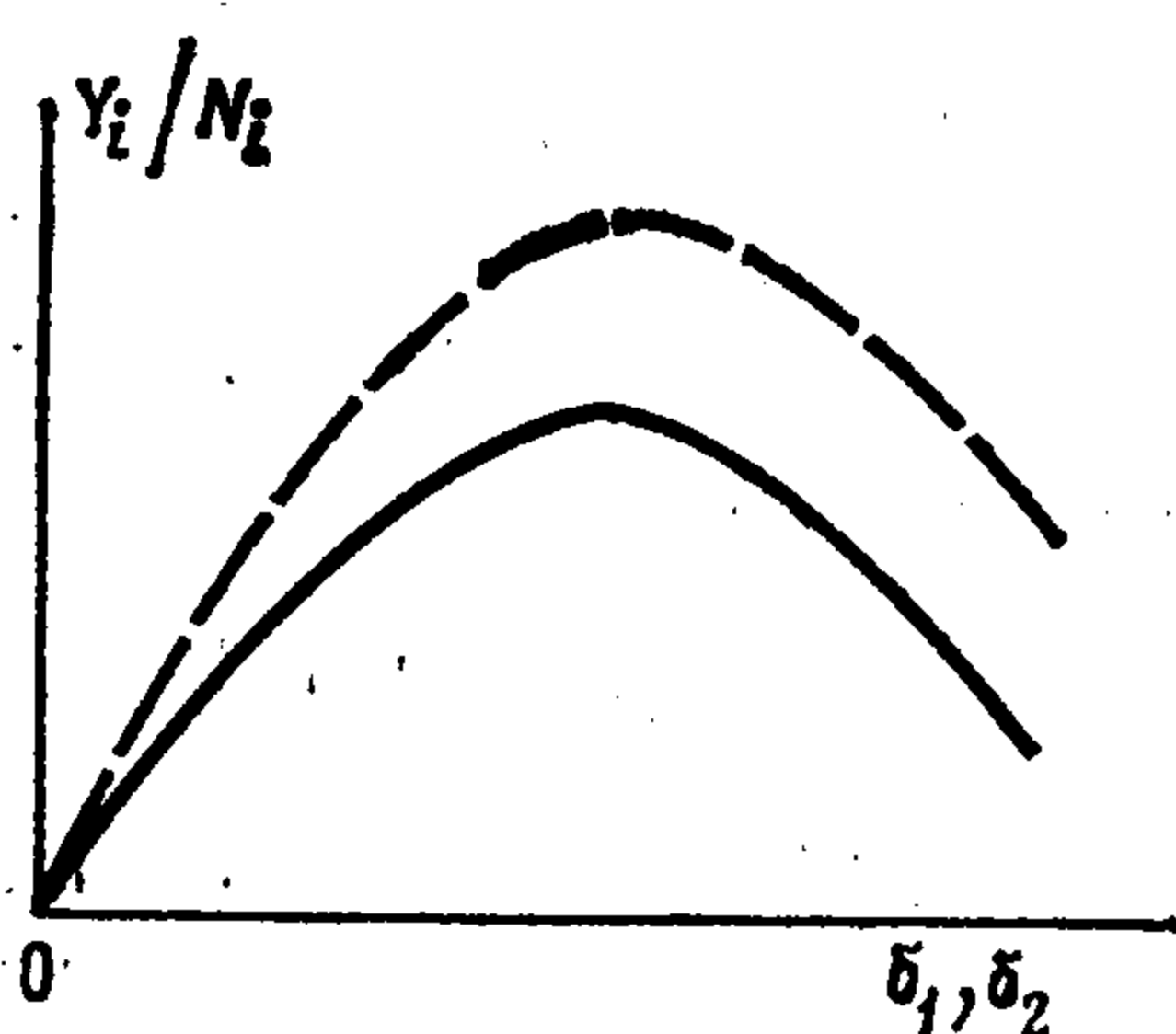
Поскольку индекс Пуанкаре] особой точки (δ_1^*, δ_2^*) равен единице, то эти точки устойчивы и являются либо узлами, либо фокусами, что и требовалось доказать.

Таким образом, хотя начало координат — неустойчивая особая точка (седло), но возмущения не превышают в этом случае некоторой конечной величины. На фиг. 3 показано поведение фазовых кривых в случае, когда подвижные особые точки — фокусы.

2°. *Слияние особых точек.* Реализация этого случая показана на фиг. 4. При $v < v_+$ начало координат имеет индекс 1 , и при $v < v_+$ имеются две подвижные особые точки (в первом и третьем квадрантах). При $v = v_+$ эти подвижные точки сливаются в начале координат. При $v > v_+$ начало координат — седло, поэтому сумма индексов



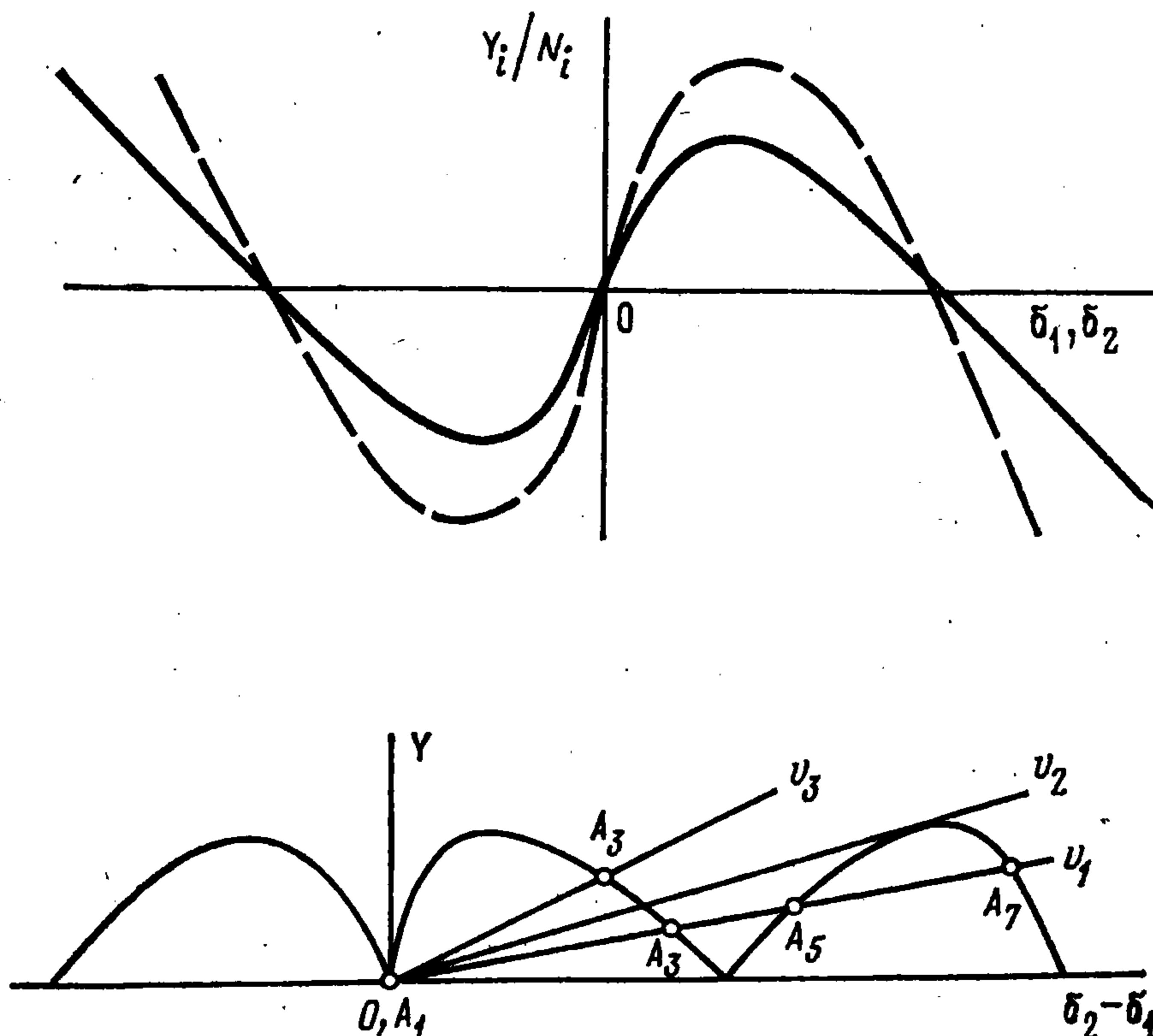
Фиг. 3



Фиг. 4

всех особых точек при $v < v_+$ равна -1 . Следовательно, подвижные особые точки были седловыми. В этом случае рост возмущений при $v > v_+$ не ограничен.

Частный случай: кубическая аппроксимация боковых реакций. Проиллюстрируем метод на примере $Y_i = a_i \delta_i - b_i \delta_i^3$ ($i = 1, 2$) [3, 4]. Этот случай допускает возможность аналитического исследования, по крайней мере при некоторых ограничениях на параметры экипажа. Эксперименты показывают, что практически реализуемы монотонно возрастающие функции $Y_i(\delta_i)$, а также падающие участки кривой $Y_i = Y_i(\delta_i)$, не достигающие до оси абсцисс. Кубические параболы, показанные на верхней части фиг. 5, этому условию не удовлетворяют, но для анализа поведения начала координат требуется информация обо всех особых точках, т. е. приходится рассматривать все особенности кривых. При небольших скоростях $v < v_2$ (нижняя часть фиг. 5) вместе с $(0,0)$ имеется девять особых точек, при $v > v_2$ — пять, поскольку с ростом скорости v точки A_5, A_7 (и симметричные им относительно начала координат точки A_6, A_8) исчезают. Остаются лишь A_1, A_2, A_3, A_4 . Точки A_1, A_2 находятся на биссектрисе первого и третьего квадрантов плоскости $\delta_1 \delta_2$; так же как и начало координат,



Фиг. 5

они неподвижны. Точки A_3, A_4 подвижны при изменении скорости v . Именно они играют решающую роль в поведении начала координат. Их индексы Пуанкаре равны -1 , в то время как индекс начала координат первоначально равнялся 1 . В случае $a_1 l_1 - a_2 l_2 < 0$ неустойчивые особые точки A_3, A_4 с ростом скорости v удаляются от начала координат и подходят к неподвижным особым точкам A_1, A_2 , индекс которых

равен 1. При некотором значении v_- скорости происходит обмен индексами, так что при $v > v_-$ точки A_1, A_2 становятся седловыми, а подвижные точки A_3, A_4 с новым индексом $j = 1$ по-прежнему удаляются от начала координат.

Если же $a_1 l_1 - a_2 l_2 > 0$, то при $v < v_+$ индекс начала координат равен единице. Подвижные седловые точки A_3, A_4 с увеличением скорости v подходят к началу координат, разрушая область устойчивости. При $v = v_+$ происходит слияние особых точек, в результате которого индекс начала координат при $v > v_+$ становится равным -1 , т. е. оно превращается в неустойчивую особую точку.

Изложенный метод позволяет не только анализировать поведение особых точек для любой зависимости $Y_i = Y_i(\delta_i)$, но и управлять их поведением (подбирая соответствующим образом эту зависимость) таким образом, чтобы получить заданные наперед свойства нулевого решения уравнений возмущенного движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лобас Л. Г. Вплив нахилу площини руху на шляхову стійкість автомобіля з еластичними за гіпотезою відведення колесами.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1970, № 11, с. 1008.
2. Певзнер Я. М. Теория устойчивости автомобиля. М.: Машигиз, 1947. 156 с.
3. Sachs H. K., Chou C. C. On the stability in the sense of Liapunov of a rubber tire vehicle.— Trans. ASME. Ser. G. J. Dyn. Syst., Measurement and Control, 1976, v. 98, No. 2, p. 180.
4. Sachs H. K., Singh M. Automobile stability — a study of the domain of attraction.— Vehicle syst. dyn., 1977, v. 6, No. 2—3, p. 169.
5. Pacejka H. B. Tyre factors and vehicle handling. [Paper], Delft University of Technology, 1978, No. 108, 31 p.

Киев

Поступила в редакцию
12.II.1980

УДК 532.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ В КАНАЛЕ

Гуревич И. Л.

Рассматривается плоская задача потенциального обтекания тяжелой жидкостью гладкого выпуклого профиля, симметричного относительно вертикальной оси, в канале с горизонтальным дном. Доказывается существование такого течения при достаточно больших значениях числа Фруда. Если длина профиля стремится к нулю и число Фруда остается больше единицы, то в пределе получается однородный поток. Ранее были получены аналогичные результаты для течения в канале с криволинейным дном при отсутствии обтекаемого профиля [1—3], для обтекания вихря в канале [4], а также для обтекания профиля в канале [5] (в отличие от настоящей работы в [5] задавался не сам профиль, а его образ в некоторой параметрической плоскости).

Течение в плоскости $z = x + iy$ предполагается симметричным относительно оси y — оси симметрии профиля. Ось x совпадает с дном канала. Известным считается угол $\Psi(s)$ между осью x и касательной к профилю, заданный как функция безразмерной величины $s = l/L$, где l — дуговая координата на профиле, отсчитываемая от верхней точки его, лежащей на оси y . При обходе профиля по часовой стрелке s возрастает; неизвестная длина профиля обозначена через $2L$, т. е. $0 \leq s \leq 2$. В силу симметрии и выпуклости $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = -\pi$, $d\Psi/ds \leq 0$. Безразмерная кривизна $d\Psi/ds$ ограничена. Известной считается также область G — образ области течения