Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 539.4.012

РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ТРЕЩИНОЙ, РАСПОЛОЖЕННОЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО К ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

Сметанин Б. И., Соболь Б. В.

Рассматривается задача об упругом равновесии полупространства, ослабленного плоской трещиной, которая расположена перпендикулярно к поверхности полупространства. К берегам трещины приложена нормальная нагрузка, симметричная относительно плоскости трещины. Задача сведена к решению интегрального уравнения первого рода. Для случая эллиптической трещины построено решение этого уравнения в простом виде, удобном для практического применения. Численное решение этой задачи ранее было проведено в работах [1, 2].

1. Пусть область, занимаемая трещиной в плоскости $y = 0$, есть Ω. Трещина находится в раскрытом состоянии под действием нагрузки $\sigma_y = -p(x, z)$ ($y = \pm 0$; $x, z \in \Omega$) (знаки плюс и минус соответствуют правому и левому берегам трещины). Границу $z = 0$ рассматриваемого полупространства $z \geqslant 0$ для определенности будем считать свободной от напряжений. Перемещения и напряжения при $z \to \infty$ исчезают.

При сведении указанной задачи к интегральному уравнению относительно функции $\chi(x, z) = V|_{y=+0} - V|_{y=-0}$, характеризующей раскрытия берегов трещины, использованы идеи работы [3]. Здесь и далее U, V, W — проекции вектора перемещения на оси x, y, z соответственно.

Применяя преобразование Фурье по переменным x и y к уравнениям Ламе, получим систему шести обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, которая в векторной форме может быть записана в виде

$$d\mathbf{L}/dz + \mathbf{PL} = \mathbf{F}(\Psi) \tag{1.1}$$

Компонентами вектор-функции $\mathbf{L}$ являются преобразования Фурье по переменным x, y функций U, V, W и их первые производные по z. Элементы матрицы $\mathbf{P}$ выражаются через параметры преобразования Фурье α и β. Функция Ψ имеет вид

$$\Psi(\alpha, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, z) e^{i\alpha x} dx$$

Уравнение (1.1) должно быть решено с учетом условий отсутствия напряжений при $z = 0$.

Схема построения решения (1.1) детально изложена в [3]. Реализация этой схемы дает возможность после некоторых преобразований получить следующее представление для функции $S(\alpha, \beta, z)$ (ввиду громоздкости промежуточные выкладки здесь не проводятся):

$$S(\alpha,\beta,z)=\mu\int_0^\infty \Psi(\alpha,\zeta)\,[K_1(\alpha,\beta,z-\zeta)+K_2(\alpha,\beta,z,\zeta)]\,d\zeta \tag{1.2}$$

$$S(\alpha,\beta,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_y(x,y,z)\,e^{i(\alpha x+\beta y)}dxdy$$

$$K_1(\alpha,\beta,\eta)=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\beta^4\gamma\,|\,\eta\,|+\beta^4-4\gamma^2\beta^2}{\gamma^3}+4\delta(\eta)\right]e^{-\gamma|\eta|}$$

$$K_2(\alpha,\beta,z,\zeta)=\frac{1}{\lambda+2\mu}\left[-\frac{2\lambda\gamma^2+(\lambda+3\mu)\beta^2}{\gamma^2}\beta(z+\zeta)+\right.$$

$$\left.+\frac{2(\lambda+\mu)\beta^4}{\gamma}z\zeta+\frac{2\lambda^2\gamma^4+4(\lambda^2+3\lambda\mu+\mu^2)\gamma^2\beta^2-(\lambda^2+2\lambda\mu-\mu^2)\beta^4}{(\lambda+\mu)\gamma^3}\right]\times$$

$$\times\, e^{-\gamma(z+\zeta)}$$

$\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, λ, μ — постоянные Ламе, $\delta(\eta)$ — дельта-функция Дирака.

Применяя к (1.2) теорему о свертке и переходя к оригиналам, получим следующее интегральное уравнение относительно функции χ:

$$\Delta\iint_\Omega \chi(\xi,\zeta)\,k_1(x-\xi,z-\zeta)\,d\Omega+ \tag{1.3}$$

$$+\iint_\Omega \chi(\xi,\zeta)\,k_2(x-\xi,z,\zeta)\,d\Omega=-\pi\frac{p(x,z)}{\mu}\qquad (x,z\in\Omega)$$

Здесь

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad k_1(\eta,t)=\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}(\eta^2+t^2)^{-1/2} \tag{1.4}$$

$$k_2(\eta,z,\zeta)=\frac{9(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{z\zeta}{[(z+\zeta)^2+\eta^2]^{5/2}}-$$

$$-\frac{6\mu}{\lambda+\mu}(z+\zeta)\frac{[(z+\zeta)^2+\eta^2]^{5/2}-(z+\zeta)^5-{}^5\!/_2(z+\zeta)^3\eta^2}{\eta^4[(z+\zeta)^2+\eta^2]^{5/2}}-$$

$$-\frac{\lambda-7\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{\eta^2}{[(z+\zeta)^2+\eta^2]^{5/2}}-\frac{\lambda^2-18\lambda\mu-43\mu^2}{2(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}\frac{(z+\zeta)^2}{[(z+\zeta)^2+\eta^2]^{5/2}}$$

Отметим, что ядро k_1 соответствует задаче о трещине в пространстве, а особенность в ядре k_2 является устранимой. Если Ω — полоса, определяемая условиями : $0<z_0\leqslant z\leqslant z_1$, $|\,x\,|<\infty$, а p не зависит от x, то уравнение (1.3) преобразуется к интегральному уравнению соответствующей плоской задачи [4].

2. При решении уравнения (1.3) может быть применен асимптотический метод [5]. Для определенности далее будем считать, что Ω — эллипс с осями, равными $2a$ и $2b$. Ось величины $2b$ параллельна плоскости $z=0$ и находится от нее на расстоянии h. Сместим начало координат в центр эллипса. Не вводя новых обозначений для χ и p, из (1.3) получим

$$\Delta\iint_\Omega \chi(\xi,\zeta)\,k_1(x-\xi,z-\zeta)\,d\Omega+ \tag{2.1}$$

$$+\iint_\Omega \chi(\xi,\zeta)\,k_2(x-\xi,z+h,\zeta+h)\,d\Omega=-\pi\frac{p(x,z)}{\mu}\qquad (x,z\in\Omega)$$

Ядра уравнения (2.1) k_1 и k_2 по-прежнему имеют вид (1.4). Введем параметр $\varepsilon=a/h$ $(0\leqslant\varepsilon<1)$ и представим ядро k_2 в виде следующего разложения:

$$k_2(\eta, z+h, \zeta+h) = \sum_{n=3}^{\infty} k_{2n}(\eta, z, \zeta)\,\varepsilon^n \tag{2.2}$$

Решение уравнения (2.1) будем искать в виде следующего асимптотического ряда по степеням ε [5]:

$$\chi(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \chi_m(x, z)\,\varepsilon^m \tag{2.3}$$

Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, придем к бесконечной системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
&\Delta \iint_\Omega \chi_0(\xi, \zeta)\, k_1(x-\xi, z-\zeta)\, d\Omega = -\pi \frac{p(x,z)}{\mu} \\
&\Delta \iint_\Omega \chi_1(\xi, \zeta)\, k_1(x-\xi, z-\zeta)\, d\Omega = 0 \\
&\Delta \iint_\Omega \chi_2(\xi, \zeta)\, k_1(x-\xi, z-\zeta)\, d\Omega = 0 \qquad\qquad (x, z) \in \Omega \\
&\Delta \iint_\Omega \chi_3(\xi, \zeta)\, k_1(x-\xi, z-\zeta)\, d\Omega = \\
&= -\iint_\Omega \chi_0(\xi, \zeta)\, k_{23}(x-\xi, z, \zeta)\, d\Omega
\end{aligned} \tag{2.4}$$

и т. д.

Используя результат, полученный Галиным Л. А. [6], можно показать, что если

$$p(x, z) = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{l} p_{ij} x^i z^j \quad \begin{pmatrix} r+l=n \\ p_{ij} - \text{const} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

то решение первого из уравнений (2.4) для эллиптической области Ω имеет вид

$$\chi_0(x, z) = (1 - z^2/a^2 - x^2/b^2)^{1/2} \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{l} q_{ij} x^i z^j \quad \begin{pmatrix} r+l=n \\ q_{ij} - \text{const} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Коэффициенты q_{ij} выражаются через p_{ij} по схеме, изложенной, например, в [5].

Рассмотрим случай $p(x, z) = p = \text{const}$. Решая систему (2.4), с использованием формул вида (2.5) и (2.6) получим

$$\begin{aligned}
&\chi(x, z) = \frac{2Ap}{\theta E(k)} (1 - z^2/a^2 - x^2/b^2)^{1/2} \times \\
&\times \left\{1 + B\frac{c\varepsilon^3}{8}\left[\frac{2}{3E(k)} - \frac{\varepsilon k^2 z}{aD(k)}\right] + O(\varepsilon^5)\right\} \\
&A = \begin{cases} a, & a \leqslant b \\ b, & a > b \end{cases}, \quad B = \begin{cases} b/a, & a \leqslant b \\ b^2/a^2, & a > b \end{cases} \\
&D(k) = \begin{cases} (k^2+1)E(k) + (k^2-1)K(k), & a \leqslant b \\ (2k^2-1)E(k) + (k^2-1)K(k), & a > b \end{cases} \\
&k = \begin{cases} (1 - a^2/b^2)^{1/2}, & a \leqslant b \\ (1 - b^2/a^2)^{1/2}, & a > b \end{cases}, \quad c = \frac{7\lambda^2 + 9\lambda\mu + 5\mu^2}{4(\lambda+\mu)^2}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, $\theta = \mu(1-\nu)^{-1}$, ν — коэффициент Пуассона. Из (2.7) получим

$$N = 1 + B\frac{c\varepsilon^3}{8}\left[\frac{2}{3E(k)} - \frac{\varepsilon k^2 \cos\varphi}{D(k)}\right] + O(\varepsilon^5) \tag{2.8}$$

Здесь $N = K_I/K_{I0}$, K_I — коэффициент интенсивности нормальных напряжений для рассматриваемого случая, K_{I0} — для случая трещины в пространстве ($\varepsilon = 0$) [7]. Угол φ отсчитывается от положительного направления оси z.

a/b	$\varphi = \pi$		$\varphi = 0$	
	(2.8)	[2]	(2.8)	[2]
1	1,01	1,015	1,00	1,005
0,5	1,03	1,033	1,01	1,013
0,25	1,07	1,055	1,03	1,026

Как показали вычисления, полученные формулы (2.7) и (2.8) можно с достаточной для практики точностью использовать при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0,5$, $a/b \geqslant 0,25$ и $0 \leqslant \nu \leqslant 0,5$. В таблице приведены значения величины N, вычисленные по формуле (2.8) и полученные в [2] при $\varepsilon = 0,5$, $\nu = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shah R. C., Kobayashi A. S.* Stress intensity factors for an elliptical crack approaching the surface of a semi-infinite solid.— Internat. J. Fract., 1973, v. 9, No 2, p. 133—146.
2. *Nisitani A., Murakami Y.* Stress intensity factors of an elliptical crack or a semi-elliptical crack subject to tension.— Internat. J. Fract., 1974, v. 10, No. 3, p. 353—368.
3. *Попов Г. Я.* Об одном способе решения задач механики для областей с разрезами или тонкими включениями.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 122.
4. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
5. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
6. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 28.V.1980