Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 539.374

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ К ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Быковцев Г. И., Цветков Ю. Д.

Рассматривается общий подход к решению задачи о нахождении упругопластической границы при кручении упругопластических стержней. Предполагается, что границей поперечного сечения стержня является гладкая кривая. Определяющие соотношения выводятся из предположения малости углов охвата границы стержня пластической областью, а также выполнения условий сопряжения на упругопластической границе. Используется метод малого параметра.

Методом возмущений решены многие упругопластические задачи, в которых весь контур тела охвачен пластической зоной; их изложение можно найти в монографии [1]. Если пластическое течение начинается с некоторой точки контура, то этот метод требует определенной модификации, которая и предлагается ниже на примере кручения упругопластических стержней. Приближенные решения упругопластических стержней полигонального сечения были построены в работах [2, 3] методом теории функций комплексного переменного.

1. Рассмотрим кручение прямолинейного цилиндрического стержня из идеального упругопластического материала с поперечным сечением D и границей L. Полагаем упругое решение для данного стержня известным. Пусть $\tau = \{\tau_\alpha\}$ $(\alpha = 1,\ 2)$ — касательное напряжение, возникающее в цилиндре при кручении, а $\gamma = \{\gamma_\alpha\}$ — полная деформация, складывающаяся из упругой γ^e и пластической γ^p составляющих

$$(1.1)\qquad \gamma_\alpha = \gamma_\alpha^e + \gamma_\alpha^p$$

В случае упругого кручения стержня компоненты тензора деформации связаны с перемещением следующим соотношением:

$$(1.2)\qquad \gamma_\alpha = {}^1/_2\omega\,(\varphi_{,\alpha} + \varepsilon_{\beta\alpha}x_\beta)$$

Здесь ω — крутка, $\varphi\,(x_1,\ x_2)$ — функция напряжений Сен-Венана, $\varepsilon_{\beta\alpha}$ — единичный антисимметричный тензор, x_β — координата точки, в которой определяется деформация.

При возникновении в стержне пластических областей компоненты полной деформации в них будут иметь вид

$$(1.3)\qquad \gamma_\alpha = f_{,\alpha} + \omega\varepsilon_{\beta\alpha}x_\beta$$

где $f\,(x_1,\ x_2,\ \omega)$ — функция, характеризующая депланацию поперечного сечения стержня.

Уравнение равновесия будет иметь место в упругой и пластической зонах стержня

$$(1.4)\qquad \tau_{\alpha,\alpha} = 0$$

Напряжения связаны с упругими деформациями законом Гука

(1.5) $\tau_\alpha = 2\mu\gamma_\alpha{}^e$

На границе стержня L должно иметь место краевое условие

(1.6) $\tau_\alpha n_\alpha = 0$

где n_α — компоненты единичного вектора нормали к контуру поперечного сечения стержня L.

Напряжения, возникающие в пластической области стержня, удовлетворяют условию пластичности

(1.7) $\tau_\alpha\tau_\alpha = k^2$

и имеет место ассоциированный закон течения

(1.8) $\gamma_\alpha{}^\cdot = \lambda\tau_\alpha$

Точкой обозначена производная от компонент полной деформации по крутке ω.

На границе упругой и пластической областей L^S должно выполняться условие сопряжения решений

(1.9) $[\tau_\alpha] = [\gamma_\alpha] = 0$

2. В пластической зоне должны выполняться условия (1.4) и (1.7), т. е. задача является статически определимой и решение ее имеет вид [4]

(2.1) $\tau_\alpha = ks_\alpha, \quad s_\alpha = \{-\sin\theta, \ \cos\theta\}$

где s_α — компоненты единичного вектора касательной к контуру поперечного сечения стержня L, а θ — угол наклона прямолинейных характеристик поля напряжений к оси x_1. В данном случае он совпадает с углом наклона единичной нормали $n_\beta = \varepsilon_{\beta\alpha}s_\alpha$ контура L к оси x_1.

Используя соотношение ассоциированного закона течения (1.8), а также выражение (2.1), для функции депланаций поперечного сечения стержня в пластической области можно записать

(2.2) $f^\cdot = x_\alpha s_\alpha r + C$

где x_α — координата точки, в которой определяется $f^\cdot(\omega, x_1, x_2)$, r — расстояние вдоль нормали к L от точки, принадлежащей границе L_S до рассматриваемой точки, а C — постоянная, своя вдоль каждой характеристики, при заданном ω.

Интегрируя (2.2), можно найти депланацию поперечного сечения скручиваемого стержня $f(\omega, x_1, x_2)$ в пластической области, если граница L_S упругой области определена. Найденное решение должно в пластической области удовлетворять следующему неравенству:

(2.3) $\gamma_\alpha{}^\cdot\tau_\alpha \geqslant 0$

Пусть при $\omega < \omega_0$ скручиваемый стержень находится в упругом состоянии, а при $\omega = \omega_0$ найдется хотя бы одна точка границы стержня L, в которой будет реализоваться пластическое состояние, т. е. при $\omega > \omega_0$ не будет существовать упругого решения, не превышающего предела текучести.

Предположим, что при $\omega = \omega_0$ в точке A (фиг. 1) контура возникает напряжение, компоненты которого удовлетворяют равенству (1.7). Выберем декартову прямоугольную систему координат $x_1 0 x_2$ таким образом, чтобы ось x_2 проходила через эту точку перпендикулярно касательной, проведенной к контуру L в точке A. Через $x_\alpha^{(0)}(\theta_*)$ обозначим координаты точки пересечения упругопластической границы L_S при $\omega > \omega_0$ с контуром стержня.

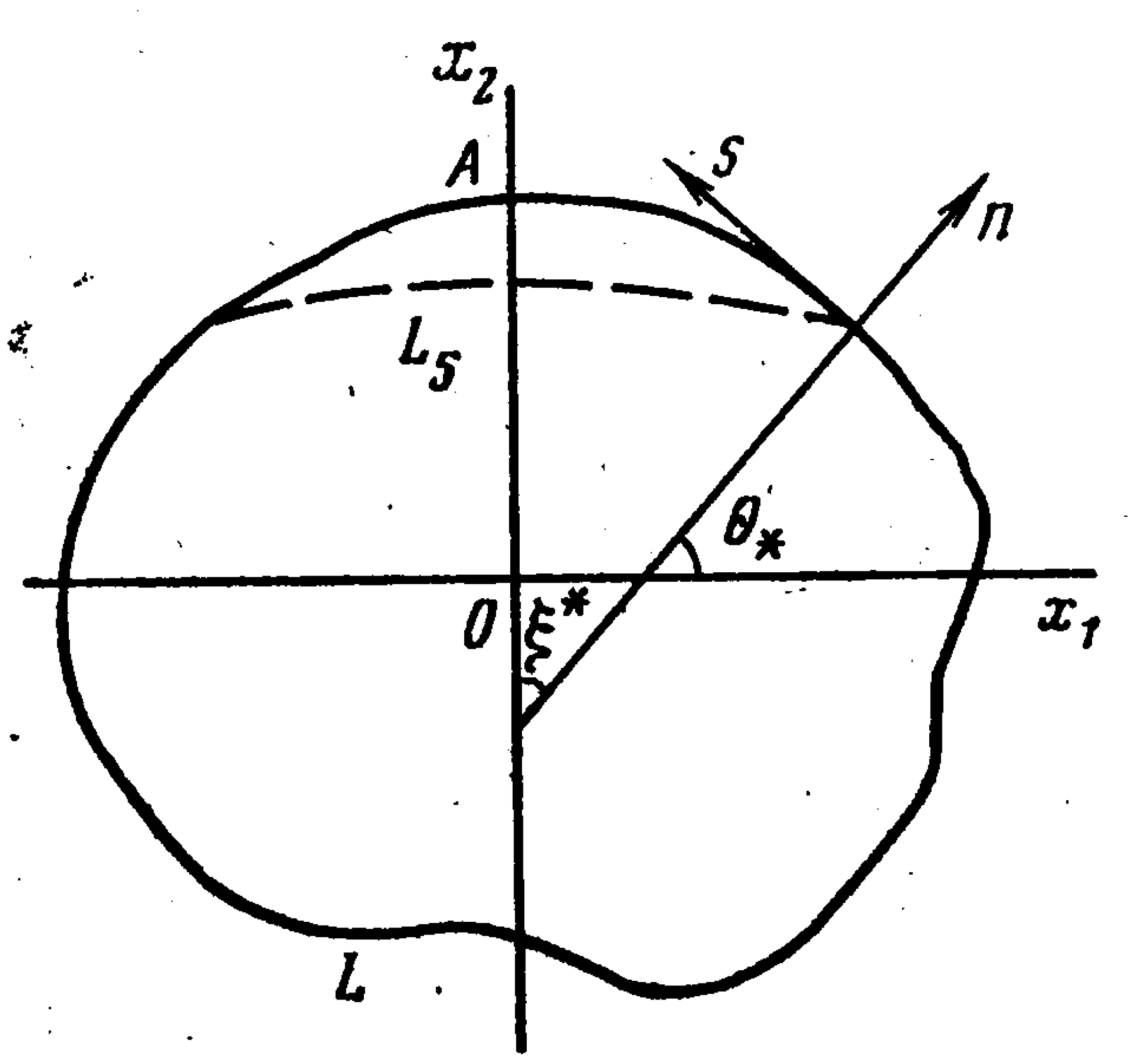
Принимая во внимание соотношения (1.2), (1.5), (1.9), а также условие (2.1), на границе L_S можно записать следующее равенство:

$$\mu\omega(\varphi_{,\alpha} + \varepsilon_{\beta\alpha}x_\beta) = ks_\alpha \tag{2.4}$$

Уравнение упругопластической границы L_S представим в виде

$$x_\alpha(\theta) = x_\alpha^{(0)}(\theta) - r(\theta)n_\alpha \tag{2.5}$$

где $x_\alpha^{(0)}(\theta)$ — координаты точек границы поперечного сечения стержня L, а $r(\theta)$ — величина отрезка вдоль нормали к границе L с началом на L.



Фиг. 1

Подставляя в (2.4) соотношение (2.5), а также разложение функции φ в ряд Тейлора по нормали к контуру поперечного сечения стержня L, получим

$$\mu\omega\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}r^m\varphi_{,\alpha n\ldots n}^{(m+1)} + \varepsilon_{\beta\alpha}x_\beta^{(0)} - \varepsilon_{\beta\alpha}n_\beta r\right\}\Big|_L = ks_\alpha \tag{2.6}$$

Здесь $\varphi_{,\alpha n\ldots n}^{(m+1)}$ обозначает m-ю производную по нормали к L от первой производной функции φ по x_α.

Умножив левую и правую части выражения (2.6) на n_α и просуммировав результат по повторяющемуся индексу α, получим

$$\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}r^m\varphi_{,n\ldots n}^{(m+1)} + \varepsilon_{\beta\alpha}n_\alpha x_\beta^{(0)}\right\}\Big|_L = 0 \tag{2.7}$$

Умножив равенство (2.6) на s_α и произведя действия, аналогичные тем, которые были выполнены выше, придем к следующему выражению:

$$\mu\omega\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}r^m\varphi_{,sn\ldots n}^{(m+1)} + \varepsilon_{\beta\alpha}s_\alpha x_\beta^{(0)} - r\right\}\Big|_L = k \tag{2.8}$$

Таким образом, получены два условия (2.7) и (2.8) на границе для решения уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2.9}$$

и нахождения неизвестной функции $r(\theta)$, определяющей границу L_S в задаче кручения упругопластического стержня.

Пусть искомое решение зависит от некоторого параметра δ. Будем искать решение в виде ряда по степеням этого параметра

$$(2.10)\qquad \varphi(\delta,\theta)=\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i\delta^i=\varphi_0+\delta\overline{\varphi}$$

где φ_0 — функция напряжений Сен-Венана, соответствующая крутке ω_0.

Уравнение упругопластической границы L_S представим в виде

$$(2.11)\qquad x_\alpha(\delta,\theta)=\sum_{i=0}^{\infty}x_\alpha^{(i)}\delta^i=x_\alpha^{(0)}-\delta\bar{r}n_\alpha,\quad \bar{r}=\sum_{i=0}^{\infty}r_{i+1}\delta^i$$

Пусть далее

$$(2.12)\qquad \omega=\sum_{i=0}^{\infty}\omega_i\delta^i=\omega_0+\delta\overline{\omega}$$

Подставляя разложения (2.10) — (2.12) в соотношения (2.7), (2.8) и (2.9), получим соответственно

$$(2.13)\qquad \left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\delta^m\bar{r}^m\varphi_{0,n\ldots n}^{(m+1)}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\delta^{m+1}\bar{r}^m\overline{\varphi}_{,n\ldots n}^{(m+1)}\right\}\Big|_L=0$$

$$(2.14)\qquad \mu(\omega_0+\delta\overline{\omega})\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\delta^m\bar{r}^m(\varphi_0+\delta\overline{\varphi})_{,sn\ldots n}^{(m+1)}+e_{\beta\alpha}s_\alpha x_\beta^{(0)}-\delta\bar{r}\right\}\Big|_L=k$$

$$(2.15)\qquad \Delta\varphi_i=0\quad i=0,1,2,\ldots$$

Предположим, что величина $\xi_*=\pi/2-\theta_*$ (фиг. 1) — малая порядка δ. Из этого допущения следует, что s_2 и n_1 также являются величинами порядка δ.

Рассмотрим следующее выражение:

$$(2.16)\qquad F(\theta)=\{\mu\omega_0(\varphi_{0,s}+x_\alpha^{(0)}n_\alpha)-k\}\,|_L$$

Разложим функцию $F(\theta)$ в ряд Тейлора по дуге контура L в окрестности точки A, тогда

$$(2.17)\qquad F(\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}F_{,S\ldots S}^{(m)}(\theta)\,|_{S=S_A}(S-S_A)^m$$

$$F(\theta)\,|_{S=S_A}=\{\mu\omega_0(\varphi_{0,s}+x_\alpha^{(0)}n_\alpha)-k\}\,|_{S=S_A}=0$$

В точке A касательное напряжение на контуре L принимает свое максимальное значение, т. е.

$$(2.18)\qquad F_{,S}(\theta)\,|_{S=S_A}=\mu\omega_0(\varphi_{0,s}+x_\alpha^{(0)}n_\alpha)_{,S}\,|_{S=S_A}=0$$

Таким образом, соотношение (2.17) можно переписать в следующем виде:

$$(2.19)\qquad F(\theta)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}F_{,S\ldots S}^{(m)}\,|_{S=S_A}(S-S_A)^m$$

Пусть R — некоторый конечный параметр, такой, что

$$S-S_A=R\xi=R(\pi/2-\theta)$$

Тогда равенство (2.19) запишется в виде

$$F(\theta)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}F^{(m)}_{,s\ldots s}|_{s=s_A}R^m(\pi/2-\theta)^m$$

Но $\xi=\pi/2-\theta$ при $\theta\in[\theta_*,\ \pi/2]$ — величина порядка δ, следовательно, функция $F(\theta)$ — величина порядка δ^2.

Приравнивая в (2.13) члены при первой степени δ, получим

(2.20) $$\{\varphi_{1,n}-\tau\varphi_{0,nn}\}|_L=0$$

Используя соотношения (1.3) — (1.5), справедливые для упругой и пластической областей, можно записать $\varphi_{0,\alpha\alpha}=0$, причем в точке A должно выполняться условие (2.18)

$$\mu\omega_0(\varphi_{0,s}+x_\alpha^{(0)}n_\alpha),\ _s|_{s=s_A}=\varphi_{0,ss}|_{s=s_A}=0$$

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые были сделаны выше, заключаем, что $\varphi_{0,nn}$ на дуге S_AS — величина порядка δ, а следовательно, $\varphi_{1,n}=0$.

В связи с тем, что r_1 — функция угла θ, получим $r_1=\omega_1=\varphi_1=0$, т. е. разложения (2.10), (2.11) в ряд по малому параметру искомых решений начинаются со второй степени δ, а именно

$$\varphi(\delta,\theta)=\varphi_0(\theta)+\sum_{i=2}^{\infty}\varphi_i(\delta,\theta)\delta^i=\varphi_0+\delta^2\bar\varphi$$

(2.21) $$x_\alpha(\delta,\theta)=x_\alpha^{(0)}(\theta)-\sum_{i=2}^{\infty}r_i(\delta,\theta)n_\alpha\delta^i=x_\alpha^{(0)}-\delta^2\bar r n_\alpha$$

Без ограничения общности можно положить

(2.22) $$\omega=\omega_0(1+\delta^2)$$

тем самым определив малый параметр δ, который во всех предыдущих разложениях был неопределенным.

С учетом (2.21), (2.22) соотношения (2.13)—(2.15) примут соответственно вид

(2.23) $$\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\delta^{2m}\bar r^m\varphi^{(m+1)}_{0,n\ldots n}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\delta^{2(m+1)}\bar r^m\bar\varphi^{(m+1)}_{,n\ldots n}\right\}\Big|_L=0$$

(2.24) $$\mu\omega_0(1+\delta^2)\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\delta^{2m}\bar r^m(\varphi_0+\delta^2\bar\varphi)^{(m+1)}_{,sn\ldots n}+\right.$$
$$\left.+\,e_{\beta\alpha}s_\alpha x_\beta^{(0)}-\delta^2\bar r\right\}\Big|_L=k$$

(2.25) $$\Delta\varphi_i=0\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

3. В качестве примера рассмотрим задачу об отыскании границы L_S при упругопластическом кручении прямолинейного стержня с эллиптическим поперечным сечением. Уравнение контура L в плоскости x_10x_2 будет

(3.1) $$x_1^2/a_1^2+x_2^2/a_2^2=1$$

При $\omega=\omega_0$ в двух точках контура L возникает напряжение, компоненты которого удовлетворяют равенству (1.7). Координаты этих точек $(0,\ a_2)$ и $(0,\ -a_2)$. Функция Сен-Венана $\varphi_0(x_1,\ x_2)$, а также максимальное касательное напряжение на L будут соответственно равны

$$\varphi_0(x_1, x_2) = -\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} x_1 x^2 \tag{3.2}$$

$$\tau_{1\,\max}|_L = -2\mu\omega_0 \frac{a_1^2 a_2}{a_1^2 + a_2^2} = -k \tag{3.3}$$

Приравнивая в условии (2.23) члены при второй степени δ, получим

$$\varphi_{2,n}(\delta, \theta)|_L = 0 \tag{3.4}$$

Решение уравнения Лапласа (2.25) при граничном условии (3.4) будет

$$\varphi_2(\delta, \theta) = \mathrm{const} \tag{3.5}$$

Приравнивая в условии (2.24) члены при второй степени δ, с учетом (3.3) и (3.5) получим

$$\left\{\frac{2}{\delta^2}\left(\frac{a_1^2 a_2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{a_1^2 x_2^{(0)} \sin\theta + a_2^2 x_1^{(0)} \cos\theta}{a_1^2 + a_2^2}\right) - 2\frac{a_1^2 x_2^{(0)} \sin\theta + a_2^2 x_1^{(0)} \cos\theta}{a_1^2 + a_2^2} + \right.$$

$$\left. + r_2(\delta, \theta)\left(1 - \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}(\mathrm{coc}^2\theta - \sin^2\theta)\right)\right\}\Big|_L = 0 \tag{3.6}$$

$$x_1^{(0)} = \frac{a_1^2 \cos\theta}{\sqrt{a_1^2 \cos^2\theta + a_2^2 \sin^2\theta}}, \quad x_2^{(0)} = \frac{a_2^2 \sin\theta}{\sqrt{a_1^2 \cos^2\theta + a_2^2 \sin^2\theta}} \tag{3.7}$$

Здесь $x_1^{(0)}(\theta)$ и $x_2^{(0)}(\theta)$ — координаты контура поперечного сечения стержня L.

Подставляя (3.7) в (3.6) и учитывая допущения, сделанные выше относительно компонент единичных векторов s_2 и n_1, получим

$$2\frac{a_1^2 a_2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{a_1^2 (a_1^2 - a_2^2)}{a_2 (a_1^2 + a_2^2)} \frac{\cos^2\theta}{\delta^2} - r_2 \frac{2a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} = 0$$

Отсюда

$$r_2(\delta, \theta) = a_2 - \frac{a_1^2 - a_2^2}{2a_2} \frac{\cos^2\theta}{\delta^2} \tag{3.8}$$

Расположение упругопластической границы в данной задаче симметрично относительно координатных осей, поэтому в дальнейшем будем рассматривать ее поведение только в первом квадранте $x_1 0 x_2$. Очевидно, что при некотором угле $\theta = \theta_*^{(2)}$ границы L и L_S будет иметь общую точку, т. е.

$$x_\alpha(\delta, \theta_*^{(2)}) - x_\alpha^{(0)}(\theta_*^{(2)}) = 0$$

откуда

$$\theta_*^{(2)} = \mathrm{arccoc}\left(\delta\sqrt{\frac{2a_2^2}{a_1^2 - a_2^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \delta\sqrt{\frac{2a_2^2}{a_1^2 - a_2^2}} + O(\delta^2) \tag{3.9}$$

Приравнивая в условии (2.23) члены при третьей степени δ, получим

$$\left\{\varphi_{3,n} - r_2 \frac{\varphi_{0,\,nn}}{\delta}\right\}\Big|_L = 0$$

или с учетом сделанных выше предположений

$$\varphi_{3,n}|_L = \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2}{a_2(a_1^2 + a_2^2)} \sin\theta \frac{\cos^3\theta}{\delta^3} - 2\frac{a_2(a_1^2 - a_2^2)}{a_1^2 + a_2^2} \sin\theta \frac{\cos\theta}{\delta} \tag{3.10}$$

Известно [5], что задача кручения может считаться решенной, если найдена функция, отображающая односвязную область D на круг. В рассматриваемом случае соотношение, отображающее область D на круг $|\zeta| < 1$, будет

$$z = x_1 + ix_2 = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \quad \zeta = \rho e^{i\alpha}$$

Граничное условие (3.10) перепишется следующим образом:

(3.11) $$\varphi_{3,\rho}\,|_L = (3B/8 - D/2)(\sigma + \bar\sigma) + B\,(\sigma^3 + \bar\sigma^3)/8,\quad \alpha \in [\alpha_*,\ \pi - \alpha_*]$$

$$\varphi_{3,\rho}\,|_L = (D/2 - 3B/8)(\sigma + \bar\sigma) - B\,(\sigma^3 + \bar\sigma^3)/8,\ \alpha \in [\pi + \alpha_*,\ 2\pi - \alpha_*]$$

$$B = \frac{1}{\delta^3}\frac{a_2^2(a_1^2 - a_2^2)^2}{2a_1^2(a_1^2 + a_2^2)},\qquad D = \frac{1}{\delta}\frac{a_2^2(a_1^2 - a_2^2)}{a_1^2 + a_2^2},\qquad [\sigma = e^{i\alpha}$$

Причем из [5] известно, что если

(3.12) $$F_3 = \varphi_3 + i\psi_3$$

где ψ_3 — гармоническая функция, сопряженная с φ_3, то

(3.13) $$\zeta F_3' = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\varphi_{3,\rho}\,|_L}{\sigma - \zeta}\,d\sigma$$

Подставляя в (3.13) граничное условие (3.11), получим

$$\zeta F_3' = \frac{1}{2\pi i}\left\{C\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + L^\circ\left(\zeta^3 + \frac{1}{\zeta^3}\right)\ln\frac{(\sigma_* + \zeta)(\bar\sigma_* + \zeta)}{(\sigma_* - \zeta)(\bar\sigma_* - \zeta)}\right\} -$$

(3.14) $$-\frac{L^\circ}{2\pi i}\left\{2\left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right)(\sigma_* + \bar\sigma_*) - \frac{4}{3}(\sigma_*^3 + \bar\sigma_*^3)\right\}$$

$$C = 3B/8 - D/2,\quad L^\circ = B/8$$

Из выражения (3.12) видно, что на контуре круга $|\zeta| = 1$ должны выполняться следующие соотношения:

(3.15) $$\frac{1}{2}\{\sigma F_3'(\delta, \sigma) + \overline{\sigma F_3'(\delta, \sigma)}\} = \varphi_{3,\rho}\,|_{\rho=1}$$

$$\frac{i}{2}\{\sigma F_3'(\delta, \sigma) - \overline{\sigma F_3'(\delta, \sigma)}\} = \varphi_{3,\alpha}\,|_{\rho=1}$$

Используя равенство (3.14), второе условие (3.15) можно записать в виде

$$\varphi_{3,\alpha}\,|_{\rho=1} = -\frac{2B}{\pi}\left(\cos^2\alpha\cos\alpha_* - \frac{2}{3}\cos^3\alpha_*\right)$$

или в декартовой прямоугольной системе координат

(3.16) $$\varphi_{3,S}\,|_L = -\frac{(a_1^2 - a_2^2)^2}{\pi a_2(a_1^2 + a_2^2)}\left(\frac{\cos^2\theta\cos\theta_*^{(2)}}{\delta^3} - \frac{2}{3}\frac{\cos^3\theta_*^{(2)}}{\delta^3}\right)$$

Приравнивая далее в выражении (2.24) члены при δ^3, получим

$$\{\varphi_{3,S} - r_3(1 + \varphi_{0Sn})\}\,|_L = 0$$

или с учетом сделанных выше предположений

(3.17) $$\varphi_{3,S} = \frac{2a_1^2}{a_1^2 + a_2^2}\,r_3(\delta, \theta)$$

Подставляя (3.17) в (3.16), определим $r_3(\delta, \theta)$

$$r_3(\delta, \theta) = \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2}{2\pi a_1^2 a_2}\left(\frac{2}{3}\frac{\cos^3\theta_*^{(2)}}{\delta^3} - \frac{\cos^2\theta\cos\theta_*^{(2)}}{\delta^3}\right)$$

При $\theta = \theta_*^{(3)}$ границы L и L_S будут иметь общую точку, т. е.

$$\delta^2 r_2(\delta, \theta_*^{(3)}) + \delta^3 r_3(\delta, \theta_*^{(3)}) = 0$$

откуда

$$\theta_*^{(3)} = \arccos\left\{\delta\sqrt{\frac{2a_2^2}{a_1^2 - a_2^2}}\left[1 + \frac{2}{3}\delta\frac{a_2\sqrt{2(a_1^2 - a_2^2)}}{\pi a_1^2}\right]^{1/2}\times\right.$$

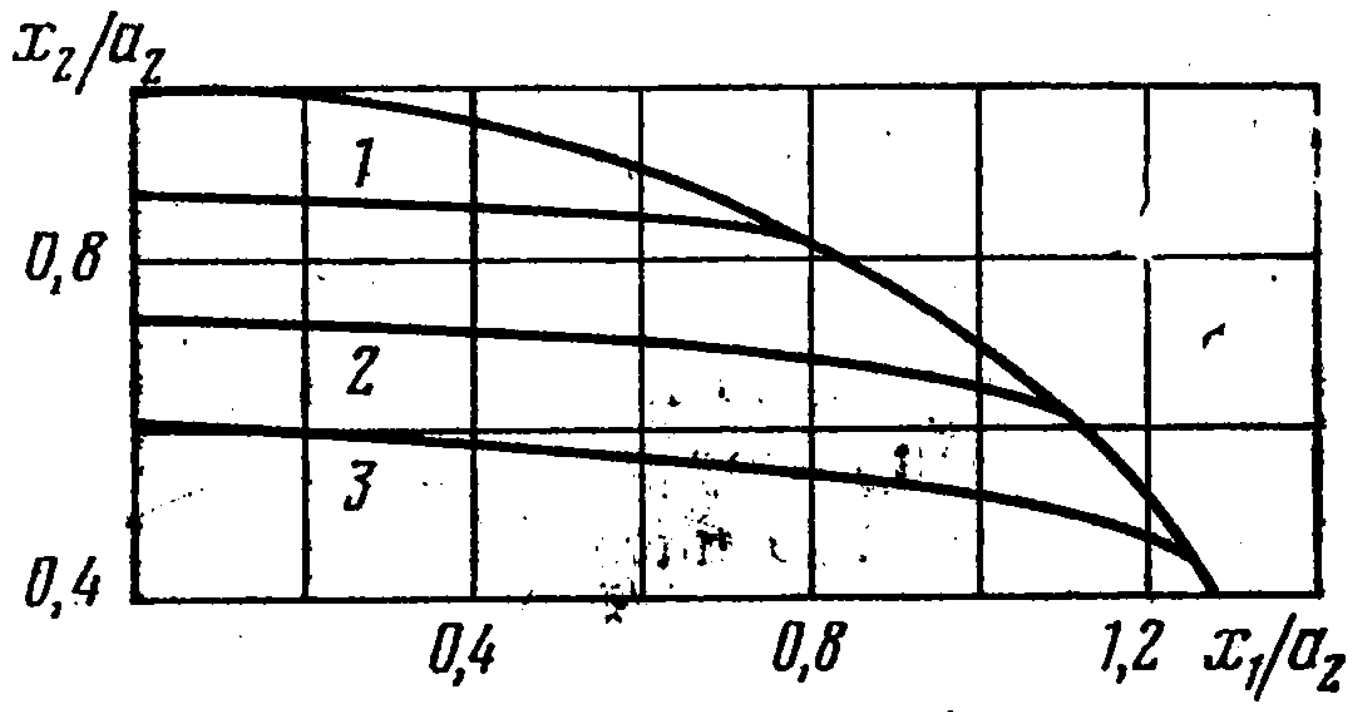
$$\left.\times\left[1 + \delta\frac{a_2\sqrt{2(a_1^2 - a_2^2)}}{\pi a_1^2}\right]^{-1/2}\right\} =$$

$$= \pi/2 - (\delta C_1 + \delta^2 C_2 + \delta^3 C_3) + O(\delta^4)$$

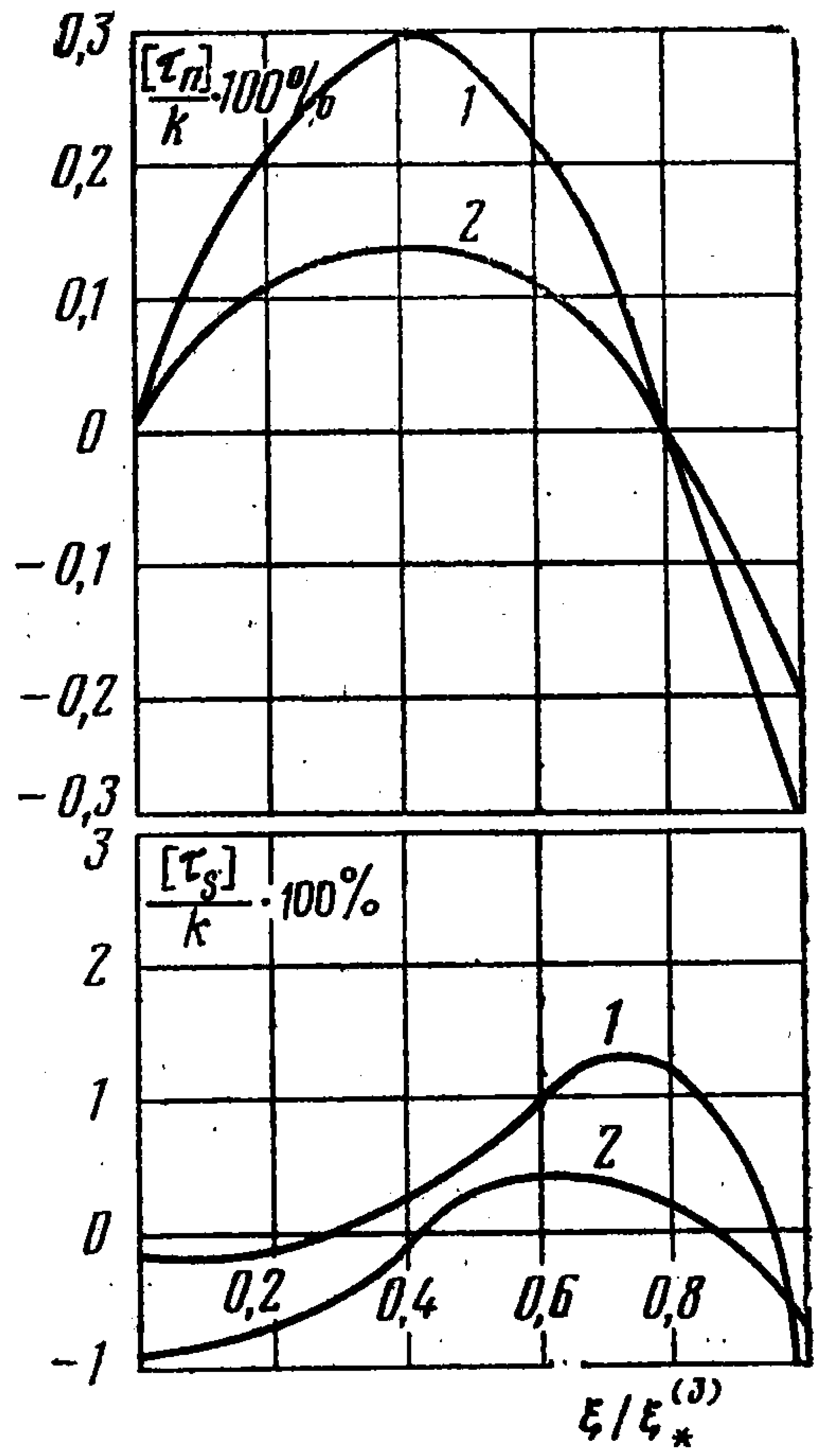
$$C_1 = \left(\frac{2a_2^2}{a_1^2 - a_2^2}\right)^{1/2},\quad C_2 = -\frac{a_2^2}{3\pi a_1^2},\quad C_3 = \frac{\sqrt{2}a_2^3}{12\pi a_1^4}\frac{3(a_1^2 - a_2^2)^2 + 4\pi^2 a_1^4}{(a_1^2 - a_2^2)^{3/2}}$$

На фиг. 2 показано расположение границы L_s при следующих значениях критического угла охвата пластической областью контура $\theta_*^{(3)}$ и параметра δ: 1) $\theta_*^{(3)} = 1{,}032$ и $\delta = 0{,}35$; 2) $\theta_*^{(3)} = 0{,}875$ и $\delta = 0{,}5$; 3) $\theta_*^{(3)} = 0{,}74$ и $\delta = 0{,}6$.

На фиг. 3 даны графики зависимости $[\tau_n]/k$ и $[\tau_s]/k$ от θ при следующих значениях $\theta_*^{(3)}$ и δ: 1) $\theta_*^{(3)} = 0{,}74$ и $\delta = 0{,}6$; 2) $\theta_*^{(3)} = 0{,}876$ и $\delta = 0{,}5$. Здесь $\tau_n = \tau_\alpha n_\alpha$, $\tau_s = \tau_\alpha s_\alpha$, а n_α и s_α — компоненты единичных векторов нормали и



Фиг. 2



Фиг. 3

касательной, проведенных к контуру L. Значения τ_α определялись с помощью соотношений (1.5) и (3.14).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упруго-пластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. *Галин Л. А.* Упругопластическое кручение призматических стержней полигонального сечения.— ПММ, 1944, т. 8, вып. 4, с. 307.
3. *Галин Л. А.* Упругопластическое кручение призматических стержней.— ПММ, 1949, т. 13, вып. 3, с. 287.
4. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М.: Наука, 1966. 707 с.

Куйбышев

Поступила в редакцию 5.XI.1980