Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 539.374

СТРУКТУРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В МЕХАНИКЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Леонов М. Я., Нисневич Е. Б.

Предлагается неупругую (пластическую) деформацию представлять как некоторое структурное искажение в упругом теле. Рассматривается возможность применения такого представления неупругой деформации к исследованию процессов развития микротрещин и решению упругопластических задач. Определяются структурные несовершенства и дефекты, вызывающие в теле напряженные состояния, полученные [1, 2] в задачах о растяжении бесконечной плоскости с отверстием.

1. Основные положения. Пусть в твердом теле произошло некоторое структурное искажение, определяемое компонентами тензора неупругих (пластических) деформаций Γ_{jk} (j, $k = x$, y, z). Количественно неупругая деформация определяется разностью между полной γ_{jk} и упругой γ_{jk}^e деформациями, или

$$\Gamma_{jk}=\frac{\partial u_j}{\partial k}+\frac{\partial u_k}{\partial j}-\gamma_{jk}^e \tag{1.1}$$

где u_j, u_k — компоненты перемещений в направлении соответствующей оси.

Предполагается, что упругая деформация определяется через напряжения по закону Гука, а пластическая — результат скольжений по межатомным плоскостям в упругом теле (здесь и далее повторяющийся индекс опускается)

$$\Gamma_x + \Gamma_y + \Gamma_z = 0 \tag{1.2}$$

В дальнейшем будем рассматривать плоскую задачу (все величины — функции двух переменных x, y и $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$), включающую плоскую деформацию, характеризуемую условием

$$\gamma_z = 0 \tag{1.3}$$

и плоское напряженное состояние, при котором

$$\sigma_z = 0 \tag{1.4}$$

Выражая тензор напряжений по закону Гука через тензор упругих деформаций и учитывая (1.1), уравнения равновесия в перемещениях для плоской задачи можно представить в таком виде (G — модуль сдвига) [3]:

$$G\Delta u_x+\frac{2G}{(\varkappa-1)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)+\rho_x=0 \tag{1.5}$$

$$G\Delta u_y+\frac{2G}{(\varkappa-1)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)+\rho_y=0;\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

При плоской деформации

$$\rho_x = -G\left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial y}\right), \quad \rho_y = -G\left(\frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial x}\right), \quad \varkappa = 3 - 4\nu \tag{1.6}$$

причем ν — коэффициент Пуассона, а в случае плоского напряженного состояния

$$\begin{gathered}\rho_x = -G\left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial y}\right) + \frac{G\nu}{1-\nu}\frac{\partial \Gamma_z}{\partial x} \\ \rho_y = -G\left(\frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial x}\right) + \frac{G\nu}{1-\nu}\frac{\partial \Gamma_z}{\partial y}, \quad \varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}\end{gathered} \tag{1.7}$$

На границе L пластической зоны к внешним нагрузкам нужно добавить следующие силы, отнесенные к единице длины границы (n — внешняя нормаль к границе):

при плоской деформации

$$\begin{gathered}X_L = G\,[\Gamma_x \cos(nx) + \Gamma_{xy}\cos(ny)] \\ Y_L = G\,[\Gamma_y \cos(ny) + \Gamma_{xy}\cos(nx)] \quad (x, y \in L)\end{gathered} \tag{1.8}$$

при плоском напряженном состоянии

$$\begin{gathered}X_L = G\left[\left(\Gamma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\Gamma_z\right)\cos(nx) + \Gamma_{xy}\cos(ny)\right] \\ Y_L = G\left[\left(\Gamma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\right)\Gamma_z\cos(ny) + \Gamma_{xy}\cos(nx)\right] \quad (x, y \in L)\end{gathered} \tag{1.9}$$

Из уравнений (1.5) следует, что задача определения перемещений при заданной неупругой деформации (1.1) сводится [3] к плоской задаче теории упругости с дополнительными (фиктивными) массовыми (1.5) или (1.7) и поверхностными (1.8) или (1.9) нагрузками.

2. Прямая структурная задача. Определим напряженное состояние, вызванное заданными деформациями (1.1). Это напряженное состояние связано законом Гука с упругими деформациями и может быть представлено как разность компонент $\sigma_{jk}{}^\circ$ фиктивных напряжений (от фиктивных нагрузок) и напряжений, вычисленных по закону Гука через неупругие деформации [3].

Из сказанного следует, что при плоской деформации будет

$$\begin{gathered}\sigma_x + \sigma_y = \sigma_x{}^\circ + \sigma_y{}^\circ - G\,(\Gamma_x + \Gamma_y) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = \sigma_y{}^\circ - \sigma_x{}^\circ + 2i\sigma_{xy}{}^\circ - G\,(\Gamma_y - \Gamma_x + 2i\Gamma_{xy})\end{gathered} \tag{2.1}$$

а при плоском напряженном состоянии

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_x{}^\circ + \sigma_y{}^\circ - G\frac{1+\nu}{1-\nu}(\Gamma_x + \Gamma_y) \tag{2.2}$$

Второе соотношение останется таким же, как и при плоской деформации.

Будем пока считать, что тело неограничено и на границе области скольжений компоненты тензора неупругих деформаций равны нулю. Тогда функции Колосова — Мусхелишвили для фиктивных напряжений находятся [4] как интегралы по области скольжений D от функций напряжений, соответствующих сосредоточенной силе, приложенной в произвольной точке $z_0 = x_0 + iy_0$ бесконечной плоскости

$$\Phi_*(z) = -\iint_D \frac{A}{z - z_0} dx_0 dy_0, \quad \Psi_*(z) = \iint_D \left[\frac{\varkappa \bar{A}}{z - z_0} - \frac{A\bar{z}_0}{(z - z_0)^2}\right] dx_0 dy_0 \tag{2.3}$$

$$A = \frac{\rho_x + \rho i_y}{2\pi(1+\varkappa)}$$

Непрерывную дважды дифференцируемую в области функцию, равную нулю на границе, можно записать следующим образом:

$$\Gamma(x, y) = -\frac{1}{4\pi}\int_L \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \ln r^2 dl + \frac{1}{4\pi}\iint_D \Delta\Gamma \ln r^2 dx_0 dy_0 \tag{2.4}$$

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Здесь n — внешняя нормаль к линии L, l — длина этой линии, характеризующая положение точки (x_0, y_0) на ней.

Представляя по формуле (2.4) последние члены в выражениях (2.1) и (2.2) в виде интегралов и применяя интегрирование по частям к соотношениям (2.3), получим функции напряжений от структурного искажения (преобразования) в таком виде:

$$\Phi(z) = -\frac{G}{\pi(1+\varkappa)}\left[\iint_D p(x_0, y_0)\ln(z - z_0)\, dx_0 dy_0 + \int_L p_L(l)\ln(z - z_0)\, dl\right] \tag{2.5}$$

$$\Psi(z) = \frac{G}{\pi(1+\varkappa)}\left[\iint_D \frac{p(x_0, y_0)\bar{z}_0}{z - z_0} dx_0 dy_0 + \int_L \frac{p_L(l)\bar{z}_0}{z - z_0} dl\right]$$

$$p(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Gamma_x}{\partial y_0^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Gamma_y}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \Gamma_{xy}}{\partial x_0 \partial y_0} + \chi \tag{2.6}$$

$$p_L(l) = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Gamma_y}{\partial x_0} - \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial y_0}\right)\cos(nx_0) + \left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial y_0} - \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial x_0}\right)\cos(ny_0)\right] + \chi_L \tag{2.7}$$

причем при плоском напряженном состоянии

$$\chi = 0, \ \chi_L = 0$$

при плоской деформации

$$\chi = \frac{\nu}{2}\Delta\Gamma_z, \quad \chi_L = -\frac{\nu}{2}\frac{\partial \Gamma_z}{\partial n}$$

Величина $p(x_0, y_0)$ — компонента тензора несовместности [5] деформаций при плоском напряженном состоянии и при плоскопластической деформации ($\Gamma_z \equiv 0$).

Из сравнения полученных выражений (2.5) с напряженным состоянием [6] от клиновидной дислокации, расположенной в бесконечной плоскости, видно, что напряженное состояние, вызванное структурным преобразованием, можно представить как напряжения от клиновидных дислокаций, распределенных по области D с плотностью $p(x_0, y_0)$ и по границе области с плотностью $p_L(l)$.

Очевидно, чтобы найти напряженное состояние, возникающее от структурного преобразования, сделанного в произвольном односвязном теле, необходимо определить напряжения от клиновидной дислокации, расположенной в этом теле, а затем вычислить соответствующие интегралы по области скольжений и по ее границе. Двусвязное тело рассматривается ниже (п. 4).

3. Обратная структурная задача. Такой задачей будем называть определение неупругих деформаций, вызвавших известное напряженное состояние. Ее решение состоит из двух этапов. Первый — вычисление структурных несовершенств (дислокаций) по заданным напряжениям, второй — определение неупругих деформаций, по найденным несовершенствам. Вообще говоря, второй этап не имеет однозначного решения [3]. Чтобы доопределить задачу, необходимо знать историю возникновения напряженного состояния, что позволяет в каждый момент находить линии скольжения и распределить несовершенства по области D; тем самым в принципе можно найти неупругую деформацию.

На первом этапе задача решается достаточно просто, если представить, что деформации, через которые выражены плотности клиновидных дислокаций $p\,(x_0,\ y_0)$ и $p_L\,(l)$, получены при разгрузке, т. е они определяются по закону Гука через заданные компоненты напряжений.

Тогда, учитывая условия (1.3) и (1.4), из соотношения (2.6) находим

$$p\,(x_0\,y_0) = -\frac{1+\varkappa}{8G}\,\Delta\,(\sigma_x + \sigma_y) \tag{3.1}$$

Здесь $\varkappa$ определяется последними формулами (1.6) и (1.7) соответственно для плоской деформации и плоского напряженного состояния.

Чтобы найти плотность клиновидных дислокаций, распределенных по границе L области скольжений, необходимо производные от деформаций в выражении (2.7) вычислять при разрузке через разрывы производных компонент напряжений на линии L

$$p_L\,(l) = -\frac{1+\varkappa}{8G}\left[\frac{\partial\,(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial n}\right] \tag{3.2}$$

Квадратные скобки означают разрыв величины, стоящей в них, на границе области скольжений; он вычисляется при переходе от точек, лежащих внутри области, к точкам вне области. Отметим, что при получении выражений (3.1) и (3.2) были использованы уравнения равновесия.

4. Примеры. Пусть в плоскости с круговым отверстием (радиуса R) при действии осесимметричной нагрузки на бесконечности достигнут предел текучести. Затем происходит подгрузка, такая, что на бесконечности напряжения $\sigma_x = q_1$, $\sigma_y = q_2$. Предполагается, что область пластичности будет монотонно расширяться. Для таких догрузок рассмотрим две задачи идеальной пластичности, в которых сопротивление сдвигу [7] считается величиной постоянной, равной пределу текучести (τ_T).

Задача Галина Л. А. В зоне пластичности компоненты напряжений в полярной системе координат таковы:

$$\sigma_r = 2\tau_T \ln\frac{r}{R}, \quad \sigma_\varphi = 2\tau_T\left(1 + \ln\frac{r}{R}\right), \quad \tau_{r\varphi} = 0 \tag{4.1}$$

Им соответствуют комплексные потенциалы

$$\Phi_1(z) = \tau_T\left(\ln\frac{z}{R} + \frac{1}{2}\right), \quad \Psi_1(z) = 0 \tag{4.2}$$

В упругой области функции напряжений Мусхелишвили будут [1]

$$\Phi_2(z)=\frac{q_1+q_2}{4}-\tau_T\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2z}\sqrt{z^2-4\lambda b^2}\right) \tag{4.3}$$

$$\Psi_2(z)=\tau_T\left[\lambda+\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-4\lambda b^2}}-1\right)\right]$$

$$\lambda=\frac{q_2-q_1}{2\tau_T},\quad b=R\exp\left(\frac{q_1+q_2}{4\tau_T}-\frac{1}{2}\right)$$

Граница L между областями — эллипс, внешность которого отображается на внешность круга единичного радиуса функцией

$$z=b\,(\zeta+\lambda/\zeta) \tag{4.4}$$

Приведенное решение справедливо, пока максимальное касательное напряжение лежит в площадках, перпендикулярных плоскости действия нагрузок. Для большинства материалов $(0{,}5\geqslant\nu\geqslant 0{,}3)$ это условие выполняется при $b\,(1+\lambda)/R\leqslant 2{,}5$.

Сумма нормальных напряжений (4.1) представляет собой гармоническую функцию. Тогда из выражения (3.1) следует, что распределенных по области пластичности структурных несовершенств нет, т. е. $p\,(x_0,\,y_0)=0$.

На границе L области скольжений производная от суммы нормальных напряжений разрывна. Это означает, что на ней внедрены клиновидные дислокации, плотность которых можно найти по формуле (3.2)

$$p_L(l)=\frac{2\,(1-\nu)\,\tau_T}{G}\frac{\partial|\zeta|}{\partial n} \tag{4.5}$$

Проведем разрез от контура кругового отверстия в бесконечность. Тогда относительное смещение и поворот сечений в месте разреза будут определяться компонентами напряжений (упругой деформацией) на самом контуре.

Очевидно, что напряженному состоянию (4.1) соответствует такое относительное перемещение сечений, при котором образуется кольцевая дислокация с углом расхождения:

$$\alpha=-4\pi\tau_T\,(1-\nu)/G \tag{4.6}$$

Таким образом получены структурные несовершенства (клиновидные дислокации) и дефекты (кольцевая дислокация), возникающие в плоскости с круговым отверстием при рассмотренном процессе деформации.

Теорема. Напряженное состояние в задаче Л. А. Галина есть напряженное состояние, возникающее в упругой плоскости с отверстием от внешней нагрузки, от структурных несовершенств (4.5) и от кольцевой дислокации (4.6).

Для доказательства вычислим напряженное состояние от каждого из факторов.

Функции Мусхелишвили от внешней нагрузки [4]

$$\Phi_q(z)=\frac{(q_2-q_1)R^2}{2z^2}+\frac{q_1+q_2}{4} \tag{4.7}$$

$$\Psi_q(z)=\frac{q_2-q_1}{2}\left(1+\frac{3R^4}{z^4}\right)+\frac{(q_1+q_2)R^2}{2z^2}$$

Для вычисления напряженного состояния от структурных несовершенств представим функции напряжений для клиновидной дислокации мощностью ε, внедренной в произвольной точке (z_0) бесконечной плоскости, в виде [6]

$$\Phi(z) = -\frac{\varepsilon G}{4\pi(1-\nu)}\ln(z-z_0), \quad \Psi(z) = \frac{\varepsilon G\bar{z}_0}{4\pi(1-\nu)(z-z_0)} \tag{4.8}$$

Эти функции определены с точностью до всестороннего растяжения на бесконечности. Используя их, получим функции Мусхелишвили для клиновидной дислокации, помещенной в произвольной точке бесконечной плоскости с круговым отверстием радиуса R

$$\Phi_R(z) = \frac{\varepsilon G}{4\pi(1-\nu)} f_1(z, z_0), \quad \Psi_R(z) = \frac{\varepsilon G}{4\pi(1-\nu)} f_2(z, z_0) \tag{4.9}$$

$$f_1(z, z_0) = \ln\frac{R^2 - z\bar{z}_0}{z\bar{z}_0(z_0 - z)R} - \frac{R^2(z - z_0)}{z(R^2 - z\bar{z}_0)}$$

$$f_2(z, z_0) = \frac{\bar{z}_0}{z - z_0} - \frac{R^2}{z^2}\ln z_0\bar{z}_0 + \frac{2R^2 z_0}{z^3} + \frac{R^2 z_0(R^2 z_0 + R^2 z - 2zz_0\bar{z}_0)}{z^2(R^2 - z\bar{z}_0)^2}$$

Напряженное состояние от кольцевой дислокации определим как напряжение от клиновидной дислокации, расположенной в плоскости с круговым отверстием в его центре

$$\Phi_k = \tau_T \ln z, \quad \Psi_k(z) = \tau_T\frac{R^2}{z^2}(2\ln R - 1) \tag{4.10}$$

Имея в виду, что граница L между областью пластичности и упругой зоной преобразованием (4.4) переводится в единичную окружность γ, напряженное состояние от клиновидных дислокаций, внедренных на этой границе, можно записать в виде интеграла по контуру γ. Учитывая выражения (4.5) и (4.9) получим

$$\Phi_L(z) = \frac{\tau_T}{2\pi i}\int_\gamma f_1[z, \omega(\zeta_0)]\frac{d\zeta_0}{\zeta_0}, \quad \Psi_L(z) = \frac{\tau_T}{2\pi i}\int_\gamma f_2[z, \omega(\zeta_0)]\frac{d\zeta_0}{\zeta_0} \tag{4.11}$$

Вычисляя последние интегралы, находим функции напряжений от распределённых по границе клиновиных дислокаций:

в пластической области ($|z + \sqrt{z^2 - 4\lambda b^2}| \leqslant 2b$)

$$\Phi_L(z) = -\tau_T\ln b - \frac{(q_2 - q_1)R^2}{2z^2} \tag{4.12}$$

$$\Psi_L(z) = 2\tau_T\frac{R^2}{z^2}\ln b - \frac{q_2 - q_1}{2}\left(1 + \frac{3R^4}{z^4}\right)$$

в упругой области ($|z + \sqrt{z^2 - 4\lambda b^2}| \geqslant 2b$)

$$\Phi_L(z) = -\frac{\tau_T}{2}\ln(z + \sqrt{z^2 - 4\lambda b^2}) + \frac{(q_2 - q_1)R^2}{2z^2} \tag{4.13}$$

$$\Psi_L(z) = \tau_T\left[\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - 4\lambda b^2}} - 1\right) - \frac{3\lambda R^4}{z^4} - \frac{R^2}{z^2}(2\ln R - 1)\right] - \frac{(q_1 + q_2)R^2}{2z^2}$$

Можно проверить, что

$$\Phi_{1,2}(z) = \Phi_q(z) + \Phi_k(z) + \Phi_L(z) \tag{4.14}$$

$$\Psi_{1,2}(z) = \Psi_q(z) + \Psi_k(z) + \Psi_L(z)$$

Значит, теорема доказана.

Задача *Черепанова Г. П.* [2]. Рассматривается тонкая пластинка с круговым отверстием, растягиваемая за предел упругости нагрузками, рассмотренными выше. Компоненты напряжений в пластической области будут

$$\sigma_r = 2\tau_T\left(1 - \frac{R}{r}\right), \quad \sigma_\varphi = 2\tau_T, \quad \tau_{r\varphi} = 0 \tag{4.15}$$

Границей между областью пластичности и упругой зоной служит овал, внешность которого конформно отображается на внешность единичного круга функцией

$$\omega(\zeta) = \frac{R\,(2\zeta^2 + a)^2}{c\,(a^2 - 4)\,\zeta^3}, \quad c = \frac{q_1 + q_2 - 4\tau_T}{2\tau_T} \tag{4.16}$$

Параметр a — действительный корень кубического уравнения

$$a^3 + 4a + \frac{8\,(q_2 - q_1)}{q_1 + q_2 - 4\tau_T} = 0$$

Функции Мусхелишвили в упругой зоне таковы:

$$\Phi(\zeta) = 2\tau_T - \frac{q_1 + q_2}{4} + \frac{2c\tau_T\zeta^2}{2\zeta^2 + a} \tag{4.17}$$

$$\Psi(\zeta) = -ac\tau_T\,\frac{\zeta^4\,(1 + \zeta^2)\,[2\,(a^2 + 4)\,\zeta^2 - a\,(4 - 3a^2)]}{(2\zeta^2 + a)^3\,(2\zeta^2 - 3a)}$$

Чтобы в области пластичности не возникло разгрузки, параметры a и c должны удовлетворять условиям $0 < a < {}^2/_3$, $-1 < c < -0{,}5$.

Сумма нормальных напряжений (4.15) в этом случае не является гармонической функцией и плотность распределенных по области клиновидных дислокаций не равна нулю

$$p(r) = \frac{\tau_T R}{(1 + \nu)\,G r^3} \tag{4.18}$$

Аналогично предыдущей задаче находится плотность структурных несовершенств, распределенных по границе упругой и пластической зон

$$p_L(l) = -\frac{c\tau_T\,(4 + 3a^2)}{(1 + \nu)\,G\,[4 + a^2 + 2a\,(\zeta + \bar{\zeta})]}\,\frac{\partial\,|\zeta|}{\partial n} \tag{4.19}$$

Кроме найденных несовершенств в рассматриваемой задаче, так же как и при плоской деформации, имеется структурный дефект в виде кольцевой дислокации с параметром

$$\alpha = -\frac{2\pi\tau_T}{(1 + \nu)\,G} \tag{4.20}$$

Аналогично тому, как это было сделано в задаче Галина Л. А., можно показать, что напряженное состояние (4.15), (4.17), полученное Г. П. Черепановым при решении упругопластической задачи, есть напряженное состояние, возникающее в упругом теле от структурных несовершенств (4.18), (4.19), дефекта (4.20) и заданной внешней нагрузки.

В реальном твердом теле структурные несовершенства имеют конечную величину и сосредоточены в очень малых объемах. Ядра этих несовершенств являются острыми концентраторами напряжений и перед ними фактически всегда образуются микротрещины. Очевидно, что разрушение материала связано с этим процессом.

Для строгого рассмотрения процессов разрушения необходимо вводить дискретную модель. Но во многих случаях развитой пластической деформации плотность непрерывно распределенных структурных искажений также может служить характеристикой прочности материала.

Представление пластической деформации твердого тела в виде структурного преобразования позволяет при решении краевых задач механики неупругих деформаций рассматривать его как единое упругое тело, в котором происходят структурные искажения. При этом нет необходимости разделять тело на упругую и пластическую части с неизвестной границей, что дает возможность более просто и строго формулировать упругопластическую задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Плоская упругопластическая задача.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 3, с. 367.
2. *Черепанов Г. П.* Об одном методе решения упругопластической задачи.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 428.
3. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. испр. и доп. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
6. *Вит Р. де.* Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир., 1977. 208 с.
7. *Леонов М. Я.* Элементы аналитической теории пластичности. Докл. АН СССР, 1972, т. 205, № 2, с. 303.

Фрунзе

Поступила в редакцию
25.IX.1980