Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 539.3

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОБОБЩЕННОЙ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Мокрик Р. И., Пырьев Ю. А.

Изучаются аналитические свойства решений основных динамических задач связанной обобщенной термоупругости с учетом конечной скорости распространения тепла. Полученные результаты в частном случае бесконечной скорости распространения тепла уточняют результаты, приведенные в работах [1, 2], и выводы, которые из них следуют. Рассматривается задача о тепловом ударе на поверхности сферической полости.

1. Фундаментальные решения обобщенной термоупругости. Динамические процессы, происходящие в термоупругих средах описываются следующей системой уравнений [3]:

$$A(\partial_x)u - \gamma \operatorname{grad} u_4 - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho F, \quad \gamma = \alpha_\theta(3\lambda + 2\mu) \tag{1.1}$$

$$\Delta u_4 - \frac{1}{\varkappa} l \frac{\partial u_4}{\partial t} - \eta l \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u = -\frac{l}{\varkappa} Q, \quad l = 1 + t_r \frac{\partial}{\partial t}$$

$$A(\partial_x) = \| A_{kj}(\partial_x) \|_{3\times 3}, \quad A_{kj}(\partial_x) = \delta_{kj}\mu\Delta + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j},$$

$$k, j = 1, 2, 3.$$

Здесь $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений, u_4 — температура, $F = (F_1, F_2, F_3)$ — вектор плотности массовых сил, $Q(x, t)$ — удельная мощность источников тепла, α_θ — коэффициент линейного теплового расширения, λ, μ — коэффициенты Ламе, t_r — время релаксации теплового потока, η — коэффициент связанности, $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности, Δ — оператор Лапласа.

Наряду с уравнениями (1.1) будем рассматривать соответствующую эллиптическую систему для трансформант Фурье по времени искомых функций, которая описывает термоупругие псевдоколебания при $\operatorname{Im}\omega > 0$ и установившиеся термоупругие колебания при $\operatorname{Im}\omega = 0$:

$$B(\partial_x, \omega)\, U^F = H^F \tag{1.2}$$

$$B(\partial_x, \omega) = \| B_{kj}(\partial_x, \omega) \|_{4\times 4}$$

$$B_{kj}(\partial_x, \omega) = A_{kj}(\partial_x) + \rho\omega^2, \quad B_{k4}(\partial_x, \omega) = -\gamma \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$B_{4j}(\partial_x, \omega) = \eta\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad B_{44}(\partial_x, \omega) = \Delta + \Omega\varkappa^{-1}, \quad \Omega = i\omega(1 - i\omega t_r)$$

$$H^F = (H_1^F, H_2^F, H_3^F, H_4^F), \; H_k^F = -\rho F_k^F, \; H_4^F = -\varkappa^{-1}(1 - i\omega t_r)\, Q^F, \; k, j = 1, 2, 3$$

Здесь U^F — преобразование Фурье по времени четырехкомпонентного вектора $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$:

(1.3) $$U^F_{\cdot}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

а H^F — четырехкомпонентный вектор трансформант Фурье вектора массовых сил и источников тепла.

Матрица фундаментальных решений однородного уравнения (1.2) имеет вид

(1.4) $$T(x, \omega) = \| T_{kj}(x, \omega) \|_{4\times 4}$$

$$T_{kj}(x, \omega) = \sum_{p=1}^{3} \left\{ (1 - \delta_{k4})(1 - \delta_{j4}) \left(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu} \delta_{3p} - \alpha_p \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \right) + \right.$$
$$+ \beta_p \left[\eta\Omega\delta_{k4}(1 - \delta_{j4}) \frac{\partial}{\partial x_j} - \gamma\delta_{j4}(1 - \delta_{k4}) \frac{\partial}{\partial x_k} \right] +$$
$$\left. + \delta_{k4}\delta_{j4}\gamma_p \right\} \frac{\exp(i\lambda_p |x|)}{|x|}$$

$$\alpha_p = (1 - \varkappa^{-1}\Omega\lambda_p^{-2})\beta_p - \frac{\delta_{3p}}{2\pi\rho\omega^2}, \quad \beta_p = \frac{(-1)^p(\delta_{1p} + \delta_{2p})}{2\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}$$

$$\gamma_p = (\lambda_p^2 - k_1^2)(\lambda + 2\mu)\beta_p, \quad k_1^2 = \rho\omega^2(\lambda + 2\mu)^{-1}$$

$$\sum_{p=1}^{3} \alpha_p = 0, \quad \sum_{p=1}^{3} \beta_p = 0, \quad 2\pi \sum_{p=1}^{3} \gamma_p = 1$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \Omega\varkappa^{-1} + \gamma\eta\Omega(\lambda + 2\mu)^{-1} + k_1^2, \quad \lambda_1^2\lambda_2^2 = \Omega\varkappa^{-1}k_1^2$$
$$\lambda_3^2 = \rho\omega^2\mu^{-1}.$$

Отметим, что из (1.4) при $t_r \to 0$ следует представление матрицы фундаментальных решений соответствующей системы уравнений термоупругости с бесконечной скоростью распространения тепловых возмущений, полученное в [1, 4].

Характеристические параметры термоупругости на основании последних формул (1.4) представим в следующем виде (c_q — скорость распространения тепла):

(1.5) $$\lambda_k = \frac{c_1}{\varkappa} \sqrt{\frac{\chi}{2}} [a\chi + i(1 + \varepsilon) \pm \sqrt{p}E]^{1/2}, \quad k = 1, 2$$

$$E = [(\chi + i\chi_2^0 - \chi_1^0)(\chi + i\chi_2^0 + \chi_1^0)]^{1/2}$$

$$\chi = \frac{\omega}{\omega^*}, \quad \omega^* = \frac{c_1^2}{\varkappa}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad M = \frac{c_1}{c_q}$$

$$c_q^2 = \frac{\varkappa}{t_r}, \quad \varepsilon = \frac{\varkappa\gamma\eta}{\lambda + 2\mu}, \quad \chi_1^0 = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{p}, \quad \chi_2^0 = \frac{q}{p}$$

$$p = a^2 - 4M^2, \quad q = a(1 + \varepsilon) - 2, \quad a = 1 + M^2(1 + \varepsilon)$$

2. Основные свойства решений динамических задач термоупругости. *Лемма 1.* Характеристические параметры λ_k обладают следующими свойствами:

а) функции $\lambda_k = \lambda_k(\omega)$, $k = 1, 2$, при $M^2 < (1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)^{-2}$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\omega = \sigma > 0$ имеют точки ветвления второго порядка

(2.1) $$\chi_\pm = \pm\chi_1^0 - i\chi_2^0$$

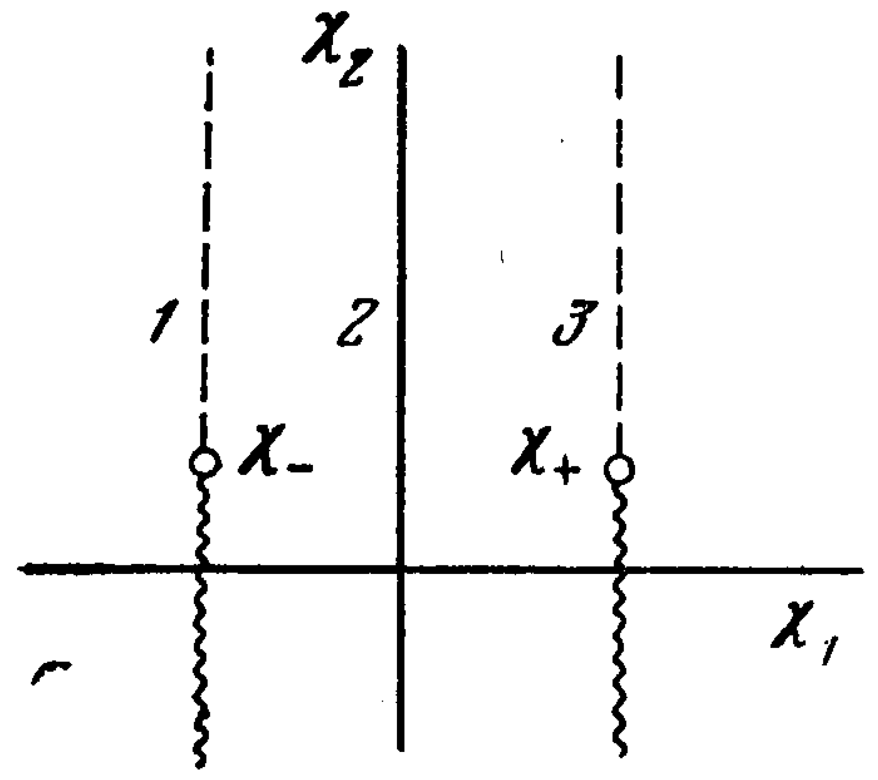
б) $\lambda_k(\omega) = O(|\omega|)$ при $|\omega| \to \infty$, $k = 1, 2, 3$;

в) $\operatorname{Im}\lambda_k > 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\omega > 0$, $k = 1, 2, 3$;

г) $\operatorname{Re}\lambda_k \gtrless 0$ при $\operatorname{Re}\omega \gtrless 0$, $k = 1, 2, 3$.

Доказательство. Свойства а) и б) непосредственно следуют из представления характеристических параметров в виде (1.5). Свойства в), г) для $k = 3$ очевидны.

Для доказательства свойства в) при $k = 1, 2$ рассматривается функция E комплексной переменной χ. Для однозначного определения E рассмотрим комплексную плоскость $\chi = \chi_1 + i\chi_2$ как двулистную поверхность, листы которой соединяются по берегам разрезов, изображенных на фигуре. Тогда, фиксируя ветвь корня условием $\operatorname{Im} E > 0$ при $\chi_1 = 0$, получаем



$$\operatorname{Re} E = \begin{cases} -L_2N_1 - L_1N_2 & \text{в области } 1 \\ L_2N_1 - L_1N_2 & \text{в области } 2 \\ L_2N_1 + L_1N_2 & \text{в области } 3 \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\operatorname{Im} E = \begin{cases} L_1N_1 - L_2N_2 & \text{в областях 1 и 3} \\ L_1N_1 + L_2N_2 & \text{в области } 2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Здесь

$$L_{1,2} = \left[\frac{R_2 \pm (\chi_2 + \chi_2^0)}{2}\right]^{1/2}, \qquad N_{1,2} = \left[\frac{R_1 \pm (\chi_2 + \chi_2^0)}{2}\right]^{1/2}$$

$$R_{1,2} = [(\chi_2 + \chi_2^0)^2 + (\chi_1 \mp \chi_1^0)^2]^{1/2}$$

Фиксируя ветви функций $\lambda_m(\omega)$ $(m = 1, 2)$ на верхних листах четырехлистных римановых поверхностей условиями $\operatorname{Im}\lambda_m > 0$ при $\chi_2 \to +\infty$, из (2.2) и (2.3) получаем

$$\operatorname{Im}\lambda_m = \frac{c_1}{\sqrt{8\varkappa}}\left(\sqrt{Z_m + X_m}\sqrt{k_2 + \chi_2} - \sqrt{Z_m - X_m}\sqrt{k_2 - \chi_2}\right) \tag{2.4}$$

$$Z_m = \sqrt{X_m^2 + Y_m^2}, \qquad X_m = a\chi_2 + 1 + \varepsilon - (-1)^m\sqrt{p}\operatorname{Im} E$$

$$Y_m = a\chi_1 - (-1)^m\sqrt{p}\operatorname{Re} E, \qquad k_2 = \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2}$$

Согласно (2.4), условие $\operatorname{Im}\lambda_m > 0$ $(m = 1, 2)$ при $\chi_2 > 0$ эквивалентно неравенству

$$X_m > 0 \tag{2.5}$$

которое очевидно для $m = 1$ в области 2 и в частях областей 1 и 3 при $\chi_2 > \max\{-\chi_2^0, 0\}$, так как здесь $\operatorname{Im} E > 0$ согласно (2.2). Неравенство (2.5) также очевидно для $m = 2$ в частях областей 1 и 3 при $0 < \chi_2 < \max\{-\chi_2^0, 0\}$, так как здесь $\operatorname{Im} E < 0$ согласно (2.2).

В остальных частях областей 1, 2 и 3, где неравенство (2.5) не столь очевидно, его можно привести к виду

$$[\chi_2^2(p + 4M^2) + 2\chi_2(1 + \varepsilon)a + (1 + \varepsilon)^2 + p\chi_1^2]\chi_2(1 + M^2\chi_2) + \varepsilon\chi_1^2 > 0 \tag{2.6}$$

которое уже очевидно. Свойство в) доказано.

Аналогично доказывается свойство г).

Отметим, что для частного случая $M = 0$ свойство в) доказано в работе [1] при ограничении $\operatorname{Im}\chi > -\chi_2^0$ (т. е. при $\operatorname{Im}\omega > (\lambda + 2\mu)(1 - \varepsilon)(\rho\varkappa)^{-1}$).

Теорема 1. Элементы матрицы фундаментальных решений $T_{kj}(x, \omega)$ однородной системы уравнений (1.2) — аналитические функции комплексной переменной ω в полуплоскости $\operatorname{Im}\omega > 0$.

Доказательство. Из представления (1.4) и свойства а) леммы 1 следует, что единственными особенностями элементов матрицы фундаментальных решений в полуплоскости $\operatorname{Im}\omega > 0$ могут быть точки ветвления (2.1).

Можно показать, что элементы матрицы (1.4) представимы в виде

$$T_{kj} = A_{kj}\frac{e^{i\lambda_1|x|} - e^{i\lambda_2|x|}}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + B_{kj}\left(e^{i\lambda_1|x|} + e^{i\lambda_2|x|}\right) \tag{2.7}$$

где A_{kj} и B_{kj} — аналитические функции параметра ω при $\operatorname{Im}\omega > 0$. Из (2.7), раскладывая радикалы λ_1 и λ_2 в окрестности точек ветвления (2.1) в обобщенные степенные ряды, получаем

$$T_{kj} = A_{kj}^* E_\pm^{-1} \sin(E_\pm C \mid x \mid) + B_{kj}^* \cos(E_\pm C \mid x \mid) \tag{2.8}$$

$$E_\pm = (\chi \pm \chi_1^0 + i\chi_2^0)^{1/2}$$

Здесь A_{kj}^*, B_{kj}, C — аналитические функции переменной ω в окрестностях точек разложения.

Выражение элементов матрицы фундаментальных решений в окрестности точек $\chi_\pm$ в виде (2.8) доказывает теорему.

Перенося классификацию основных граничных задач термоупругости I±, II±, III±, IV± [1] в обобщенную термоупругость, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Если $\operatorname{Im}\omega > 0$, то задачи, соответствующие I±, II±, III±, IV± для трансформант Фурье (псевдоколебаний), разрешимы, их решения единственны и представляются в виде термоэластопотенциалов соответствующих задач работы [1].

Данное утверждение следует из свойства в) характеристических параметров после проведения выкладок, аналогичных проведенным в работе [1] (гл. X).

Предположим теперь, что первоначальные данные задач, т. е. функции, описывающие поведение компонент полей деформаций и температуры и требуемых их производных на границе области, а также плотность массовых сил и источников тепла, могут экспоненциально возрастать по времени. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если $\sigma > 0$ — максимальный показатель экспоненциального роста по времени первоначальных данных соответствующих граничных задач I±, II±, III±, IV±, то трансформанты Фурье их решений являются аналитическими функциями переменной ω при $\operatorname{Im}\omega \geqslant \sigma' > \sigma > 0$.

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из теорем 1 и 2 по аналогии с [1].

Следствие. Если показатель экспоненциального роста по времени первоначальных данных соответствующих задач равен нулю, то трансформанты Фурье их решений — аналитические функции при $\operatorname{Im}\omega \geqslant \sigma' > 0$.

Приведенные свойства трансформант Фурье решений соответствующих задач дают возможность представить сами решения в виде

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_\Gamma U^F(x,\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

где контур Γ находится в верхней полуплоскости и выбирается согласно принципу причинности [5, 6] так, что обходит все особенности трансформант сверху. В важном частном случае, когда показатель экспоненциального роста по времени первоначальных данных задач $\sigma = 0$, контур Γ совпадает с действительной осью, обходя возможные особенности на этой оси через верхнюю полуплоскость комплексной переменной ω.

Из приведенных результатов следует, что термоупругая среда не может быть активной (неустойчивой, усиливающей) [6], т. е. в ней возмущения не могут возрастать во времени после прекращения действия источника возмущений, а также быстрее, чем возмущения источника, что удовлетворяет аналитическому критерию принципа причинности [6]. Это следствие исправляет выводы работы [7]. Указанные результаты следуют из теоремы 3, которая обобщает и уточняет свойства трансформант аналогичных задач для частного случая бесконечной скорости распространения тепла $c_p = \infty$, приведенные в [1], на основании которых в работе [7] сделан вывод, что динамическая связанная задача термоупругости не удовлетворяет принципу причинности.

3. Обобщенная центросимметричная задача III^-. Рассмотрим бесконечную термоупругую среду со сферической полостью радиуса r_0. Поверхность полости подвергается механическому и тепловому воздействию следующим образом:

$$\sigma_{rr} = -f_1(t)H(t),\quad \theta = u_4 = f_2(t)H(t),\quad r = r_0 \tag{3.1}$$

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Возникающие нестационарные поля напряжений, деформаций и температуры удовлетворяют системе (1.1), граничному условию (3.1) и условию причинности [6].

Используя комплексное преобразование Фурье, представим решение в виде

$$\theta = \frac{\Phi}{r},\quad u_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi}{r}\right) \tag{3.2}$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda\frac{u_r}{r} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_\theta\theta$$

$$\Phi(r,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\Gamma \left[\sum_{p=1}^{2} C_p e^{i\lambda_p(r-r_0)}\right] e^{-i\omega t}\,d\omega \tag{3.3}$$

$$\Psi(r,t) = \frac{m_1}{\sqrt{2\pi}}\int_\Gamma \left[\sum_{p=1}^{2} C_p\left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \lambda_p^2\right)^{-1} e^{i\lambda_p(r-r_0)}\right] e^{-i\omega t}\,d\omega$$

$$C_p = (-1)^p\frac{1}{m_1}\left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \lambda_p^2\right)\left\{f_1^F(\omega)\frac{r_0^3}{\rho}\left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \lambda_{p\pm1}^2\right) - r_0 m_1 f_2^F(\omega)\times\right.$$

$$\left.\times[\omega^2 r_0^2 + 4c_2^2(ir_0\lambda_{p\pm1} - 1)]\right\}D^{-1},\quad p = 1, 2,$$

$$f_j^F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f_j(t)e^{i\omega t}\,dt,\quad j = 1, 2$$

$$D = (\lambda_2 - \lambda_1)\left[(\lambda_1 + \lambda_2)(\omega_2 r_0^2 - 4c_2^2) + 4ic_2^2 r_0\left(\lambda_1\lambda_2 + \frac{\omega_2}{c_1^2}\right)\right]$$

$$m_1 = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu},\quad c_2^2 = \frac{\lambda}{\rho}$$

Контур Γ в (3.3) выбирается как указано в п. 2.

Приведем здесь полностью решение на основе вычисления интегралов (3.3), с использованием свойств характеристических параметров $\lambda_{1,2}$ леммы 1, для случая, когда поля напряжений и температуры возникают в результате действия на поверхности сферической полости теплового удара $f_2(t) = \theta_0 = \text{const}$, $f_1(t) = 0$ при $\mu = 0$, что соответствует физической модели жидкой термоупругой среды

$$\theta_0^{-1}\frac{R}{R_0}\theta(R,\tau) = H(\tau_+) + I_1(R,\tau)[H(\tau_-) - H(\tau_+)] + \Gamma_1(R,\tau) \tag{3.4}$$

$$(\theta_0\rho m_1 c_1^2)^{-1}\frac{R}{R_0}\sigma_{rr}(R,\tau) = I_2(R,\tau)[H(\tau_-) - H(\tau_+)] + \Gamma_2(R,\tau)$$

$$I_n(R,\tau) = \frac{1}{\pi}e^{-\chi_2{}^0\tau}\int\limits_0^{\chi_1{}^0}(e^{-\alpha_+}\Psi_+ + e^{-\alpha_-}\Psi_-)\,dx,\quad n = 1, 2$$

$$\Psi_\pm = \frac{x\psi_\pm\delta_{1n}}{2dk_0^2}\sin\varphi_\pm - \frac{[(a-2)k_0^2 - \chi_2{}^0\psi_\pm]\delta_{1n} + \delta_{2n}}{d(2k_0^2\delta_{1n} + \delta_{2n})}\cos\varphi_\pm$$

$$\psi_\pm = 1 + \varepsilon \pm d,\quad d = \sqrt{p}\,[(\chi_1{}^0)^2 - x^2]^{1/2},\quad k_0 = [(\chi_2{}^0)^2 + x^2]^{1/2}$$

$$\varphi_\pm = (R - R_0)\gamma_\pm - \tau x,\quad \alpha_\pm = (R - R_0)\beta_\pm,$$

$$\tau_\pm = \tau - (R - R_0)c_\pm^{-1}$$

$$c_\pm = \sqrt{2}\,(a \pm \sqrt{p})^{-1/2},\quad \gamma_\pm = 2^{-3/2}(\sqrt{Z^0 + X_\pm{}^0}K_+ + $$
$$+ \sqrt{Z^0 - X_\pm{}^0}K_-)$$

$$Z^0 = [(X_\pm{}^0)^2 + (Y^0)^2]^{1/2},\quad \beta_\pm = 2^{-3/2}(\sqrt{Z^0 + X_\pm{}^0}K_- -$$
$$- \sqrt{Z^0 - X_\pm{}^0}K_+)$$

$$K_\pm = (k_0 \pm \chi_2{}^0)^{1/2},\quad X_\pm{}^0 = -\chi_2{}^0 a + 1 + \varepsilon \pm d,\quad Y^0 = -ax$$

$$\Gamma_n(R,\tau) = \begin{cases} J_n(0)H(\tau_-) + H(\tau_-) - H(\tau_+), & 0 \leqslant M^2 < (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-2} \\ J_n(\chi_2{}^0)[H(\tau_-) - H(\tau_+)] + J_n(0)H(\tau_+), & (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-2} < M^2 \leqslant (1-\varepsilon)^{-1} \\ J_n(0)H(\tau_+), & (1-\varepsilon)^{-1} \leqslant M^2 < \infty \end{cases}$$

$$J_n(b) = \frac{1}{\pi}\int\limits_b^{M^{-2}} e^{-\tau x}\sin[(R - R_0)\sqrt{Ax}]\,\frac{\delta_{2n} - 2(A + x)\delta_{1n}}{h(2x\delta_{1n} + \delta_{2n})}\,dx, n = 1,2$$

$$A = 2^{-1}(h + 1 + \varepsilon - ax),\quad h = \sqrt{p}\,[(\chi_2{}^0 - x)^2 + (\chi_1{}^0)^2]^{1/2}$$

$$\tau = \frac{c_1^2}{\varkappa}t,\quad R = \frac{c_1}{\varkappa}r,\quad R_0 = \frac{c_1}{\varkappa}r_0$$

Из приведенного решения (3.4) можно сделать вывод, что в обобщенной связанной задаче термоупругости в центросимметричном случае при действии механических и тепловых воздействий на границу области возникающие поля температуры и напряжения распространяются со скоростью c и испытывают скачок при $\tau = (R - R_0)c_+^{-1}$.

Полученные решения верны для произвольных значений параметров R, τ, M, ε, в то время как в работе [8] для частного случая рассматриваемой задачи при пренебрежении инерционными членами решение строилось методом возмущений по параметру ε и асимптотически для малых времен $\tau_\pm$.

Отметим также, что из представления решения в виде (3.4) можно получить поведение полей напряжения и температуры при $\tau \to \infty$:

$$(\theta_0\rho m_1 c_1^2)^{-1}\frac{R}{R_0}\sigma_{rr}(R,\tau) = (R - R_0)\,\frac{\tau^{-3/2}}{2\sqrt{\pi(1+\varepsilon)}}$$

$$\theta_0^{-1}\frac{R}{R_0}\theta(R,\tau)=1-(R-R_0)\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\pi}}\,\tau^{-1/2}$$

что согласуется с выводами, приведенным в п. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 663 с.
2. *Кахниашвили Н. С.* К доказательству теорем существования для основных динамических задач термоупругости.— Сообщ. АН ГрузССР, 1972, т. 66, № 3, с. 549.
3. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. Киев: Наукова думка, 1976. 312 с.
4. *Купрадзе В. Д., Бурчуладзе Т. В.* Граничные задачи термоупругости.— Дифференциальные уравнения, 1969, вып. 5, № 1, с. 3.
5. *Мокрик Р. И., Баран В. П.* Об условии излучения в динамических задачах теории упругости.— Доп. АН УССР, Сер. А, 1977, № 8, с. 713.
6. *Вайнштейн Л. А.* Распространение импульсов.— Успехи физ. наук, 1976, т. 118, вып. 2, с. 339.
7. *Баран В. П., Грилицкий Д. В., Мокрик Р. И.* К теории динамической термоупругости.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 1093.
8. *Wadhawan M. C.* Radially Symmetrical Thermoelastic Dusturbances in Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity.— Pure and Appl. Geophys., 1972, v. 99, No. 7, p. 61.

Львов

Поступила в редакцию
8.X.1979