Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Рогачева Н. Н.

Асимптотическим методом [1] выполнено сведение трехмерных уравнений электроупругости к двумерным уравнениям пьезокерамических оболочек для случая предварительной поляризации вдоль одного из семейств координатных линий срединной поверхности. Показано, что для оболочек, полностью покрытых электродами, на которых поддерживается разность потенциалов, полная задача расчленяется на механическую и электрическую, причем механическая задача качественно отличается от теорий, основанных на гипотезах типа Кирхгофа — Лява. Для оболочек, не покрытых электродами, нагруженных механической поверхностной нагрузкой, полная задача, вообще говоря, не допускает расчленения на механическую и электрическую, в связи с чем система дифференциальных уравнений имеет десятый порядок.

1. Выберем систему триортогональных координат α_1, α_2, γ таким образом, чтобы линии α_1, α_2 совпадали с линиями кривизны срединной поверхности, а γ-линии были им ортогональны. Выпишем в выбранной системе координат уравнения электроупругости пьезокерамической оболочки, предварительно поляризованной вдоль α_2-линий [2]:

уравнения пьезоэффекта

$$\tau_i = n_{ii}\frac{a_j}{a_i}e_i + n_{ij}e_j - p_i\frac{\tau_3}{a_i} - c_i a_j E_2 \tag{1.1}$$

$$\tau_{ij} = \frac{1}{s_{44}^E}\left(\frac{a_i}{a_j}m_i + m_j\right) - \frac{d_{15}}{s_{44}^E}a_i E_1$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial\gamma} = s_{12}^E\frac{\tau_1}{a_2} + s_{13}^E\frac{\tau_2}{a_1} + s_{11}^E\frac{\tau_3}{a_1a_2} + d_{31}E_2$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial\gamma} + \frac{g_1}{a_1} = s_{66}^E\frac{\tau_{13}}{a_2}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial\gamma} + \frac{g_2}{a_2} = s_{44}^E\frac{\tau_{23}}{a_1} + d_{15}E_3$$

$$D_1 = \varepsilon_{11}^T E_1 + d_{15}\frac{\tau_{12}}{a_2}$$

$$D_2 = \varepsilon_{33}^T E_2 + d_{31}\left(\frac{\tau_1}{a_2} + \frac{\tau_3}{a_1a_2}\right) + d_{33}\frac{\tau_2}{a_1}$$

$$D_3 = \varepsilon_{11}^T E_3 + d_{15}\frac{\tau_{23}}{a_1}, \quad k_i = \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}, \quad a_i = 1 + \frac{\gamma}{R_i}$$

уравнения электростатики

$$\frac{\partial D_3}{\partial\gamma} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2D_1)}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1D_2)}{\partial\alpha_2} = 0 \tag{1.2}$$

$$E_3 = -\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}, \quad E_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i}$$

формулы деформации — смещения

$$e_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + k_i v_j + \frac{v_3}{R_i}, \quad m_i = \frac{1}{A_j}\frac{\partial v_i}{\partial \alpha_j} - k_j v_j \tag{1.3}$$

$$g_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_i} - \frac{v_i}{R_i}$$

Здесь и в дальнейшем из каждого равенства с индексами i и j можно получить два различных — одно, полагая $i = 1$, $j = 2$, другое, полагая $i = 2$, $j = 1$.

В (1.1) введен несимметричный тензор, связанный с симметричным тензором σ_{ij}, σ_{i3}, σ_{33} формулами

$$\tau_i = a_j\sigma_{ii}, \quad \tau_{ij} = a_i\sigma_{ij}, \quad \tau_{i3} = a_j\sigma_{i3}, \quad \tau_3 = a_1a_2\sigma_{33} \tag{1.4}$$

В уравнениях пьезоэффекта для сокращения записи введены следующие обозначения для констант, характеризующих электрические и механические свойства материала оболочки:

$$n_{11} = \frac{s_{33}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - (s_{13}^E)^2}, \quad n_{12} = n_{21} = -\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - (s_{13}^E)^2} \tag{1.5}$$

$$n_{22} = \frac{s_{11}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - (s_{13}^E)^2}, \quad p_1 = \frac{s_{12}^E s_{33}^E - (s_{13}^E)^2}{s_{11}^E s_{33}^E - (s_{13}^E)^2}, \quad p_2 = \frac{s_{11}^E s_{13}^E - s_{12}^E s_{13}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - (s_{13}^E)^2}$$

$$c_1 = \frac{d_{31}s_{33}^E - d_{33}s_{13}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - (s_{13}^E)^2}, \quad c_2 = \frac{d_{33}s_{11}^E - d_{31}s_{13}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - (s_{13}^E)^2}$$

В формулах (1.1)—(1.5) v_i, v_3 — перемещения, A_i — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, R_i — ее главные радиусы кривизны, $s_{11}{}^E$, $s_{12}{}^E$, $s_{13}{}^E$, $s_{33}{}^E$, $s_{44}{}^E$ — упругие податливости при нулевом электрическом поле, d_{31}, d_{15}, d_{33} — пьезоэлектрические постоянные, $\varepsilon_{11}{}^T$, $\varepsilon_{33}{}^T$ — диэлектрические проницаемости при нулевых напряжениях, **E** — вектор напряженности электрического поля, **D** — вектор электрической индукции.

Уравнения равновесия имеют такой же вид, как и в теории неэлектрических оболочек, поэтому будем строить только соотношения электроупругости.

2. Рассмотрим непокрытую электродами оболочку, на лицевых поверхностях которой задана поверхностная нагрузка

$$\left.\frac{\tau_3}{a_1a_2}\right|_{\gamma=\pm h} = \pm q_3^{\pm}, \quad \left.\frac{\tau_{i3}}{a_j}\right|_{\gamma=\pm h} = \pm q_i^{\pm} \tag{2.1}$$

Электрические условия в случае отсутствия электродов имеют следующий вид:

$$D_3 |_{\gamma=\pm h} = 0 \tag{2.2}$$

Чтобы получить условия на внешней поверхности оболочки, надо из двойных знаков в (2.1), (2.2) оставить только плюсы, условия на внутренней поверхности получаются, если взять минусы.

Для искомых величин рассматриваемого электроупругого состояния примем следующее асимптотическое представление:

$$
\begin{gathered}
v_i = \eta^s v_{i*},\ v_3 = \eta^c v_{3*},\ \tau_i = \tau_{i*},\ \tau_{ij} = \tau_{ij*} \\
\tau_3 = \eta^{1-c}\tau_{3*},\ \tau_{i3} = \eta^{1-s}\tau_{i3*},\ E_3 = \eta^{1-s}E_{3*} \\
E_i = E_{i*},\ D_3 = \eta^{2-3s+c}D_{3*},\ D_i = D_{i*},\ \psi = \eta^{2-s}\psi_* \\
c = 0,\quad 0 \leqslant s < {}^1/_2;\quad c = -1 + 2s,\quad {}^1/_2 \leqslant s < 1
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

Здесь η — относительная полутолщина оболочки, s — согласно принятой в [1] терминологии, показатель изменяемости электроупругого состояния.

Формулами (2.3) искомые величины заменяются величинами со звездочками, имеющими при $\eta \to 0$ одинаковый асимптотический порядок. Принятое асимптотическое представление (2.3) приводит в первом приближении к непротиворечивой теории. Кроме того, формулы (2.3) находят подтверждение в простых решениях [3].

Выполним в уравнениях пьезоупругости обычное для асимптотических методов растяжение масштаба по координатным линиям (R — характерный размер оболочки):

$$
\alpha_i = \eta^s R\xi_i,\ \gamma = \eta^1 R\zeta \tag{2.4}
$$

Координаты ξ_i и ζ вводятся таким образом, чтобы дифференцирование по ним не приводило к существенному увеличению искомых функций. Формулы (2.4) означают, что искомые величины при дифференцировании по координатам α_i увеличиваются в η^{-s} раз, а при дифференцировании по γ — в η^{-1} раз.

Подставим (2.3), (2.4) в (1.1) — (1.4). В результате получим следующие уравнения:

$$
\begin{gathered}
\tau_{i*} = n_{ii}\frac{a_j}{a_i}\frac{1}{R}e_{i*} + n_{ij}\frac{1}{R}e_{j*} - \eta^{1-c}p_i\frac{\tau_{3*}}{a_i} - c_i a_j E_{2*} \\
\tau_{ij*} = \frac{1}{s_{44}^E}\frac{1}{R}\left(\frac{a_i}{a_j}m_{i*} + m_{j*}\right) - \frac{d_{15}}{s_{44}^E}|a_i E_{1*} \\
\frac{1}{R}\frac{\partial v_{3*}}{\partial\zeta} = \eta^{1-c}\left(s_{12}^E\frac{\tau_{1*}}{a_2} + s_{13}^E\frac{\tau_{2*}}{a_1}\right) + \eta^{2-2c}s_{11}^E\frac{\tau_{3*}}{a_1a_2} + \eta^{1-c}d_{31}E_{2*} \\
\frac{\partial v_{1*}}{\partial\zeta} + \eta^{1-2s+c}\frac{g_{1*}}{a_1} = \eta^{2-2s}s_{66}^E R\frac{\tau_{13*}}{a_2} \\
\frac{\partial v_{2*}}{\partial\zeta} + \eta^{1-2s+c}\frac{g_{2*}}{a_2} = \eta^{2-2s}s_{44}^E R\frac{\tau_{23*}}{a_1} + \eta^{2-2s}Rd_{15}E_{3*} \\
D_{1*} = \varepsilon_{11}^T E_{1*} + d_{15}\frac{\tau_{12*}}{a_1} \\
\eta^{1-2s+c}D_{3*} = \varepsilon_{11}^T E_{3*} + d_{15}\frac{\tau_{23*}}{a_1} \\
D_{2*} = \varepsilon_{33}^T E_{2*} + d_{31}\left(\frac{\tau_{1*}}{a_2} + \eta^{1-c}\frac{\tau_{3*}}{a_1a_2}\right) + d_{33}\frac{\tau_{2*}}{a_1} \\
\eta^{1-2s+c}\frac{\partial D_{3*}}{\partial\zeta} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2D_{1*})}{\partial\xi_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1D_{2*})}{\partial\xi_2} = 0 \\
E_{3*} = -\frac{1}{R}\frac{\partial\psi_*}{\partial\zeta},\quad E_{i*} = -\frac{1}{R}\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_*}{\partial\xi_i} \\
e_{i*} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{i*}}{\partial\xi_i} + \eta^s Rk_i v_{j*} + \eta^c\frac{R}{R_i}v_{3*} \\
m_{i*} = \frac{1}{A_j}\frac{\partial v_{i*}}{\partial\xi_j} - \eta^s Rk_j v_{j*},\quad g_{i*} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{3*}}{\partial\xi_i} - \eta^{2s-c}\frac{R}{R_i}v_{i*}
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

В выписанных формулах порядок каждого члена уравнения относительно главных членов того же уравнения задается стоящим перед ним множителем η в неотрицательной степени.

Двумерные уравнения состояния будем строить с точностью до величин порядка ε, где

(2.6) $$\varepsilon = O(\eta^{2-2s})$$

Последовательно интегрируя уравнения (2.5) по ζ с точностью до величин порядка (2.6), получим разложения следующего вида:

(2.7) $$P_* = \sum_{i=0}^{n} \zeta^i a_i P_{,i}$$

где под P_* следует понимать любую из искомых величин $v_{i*}, \ldots, \psi_*$, а n, a_i для каждой из этих величин принимают такие значения:

(2.8) $$\begin{aligned}
&a_0 = 1;\ n = 1,\ a_1 = \eta^{1-2s+c} \text{ для } v_{i*},\ e_{i*},\ m_{i*},\ \tau_{i*},\ \tau_{ij*},\ D_{i*}\\
&n = 1,\ a_1 = \eta^{1-c} \text{ для } v_{3*},\ g_{i*},\ n = 0 \text{ для } E_{i*}\\
&n = 2,\ a_1 = 1,\ a_2 = \eta^{1-2s+c} \text{ для } v_{i3*},\ E_{3*}\\
&n = 3,\ a_1 = 1,\ a_2 = \eta^{1-2s+c},\ a_3 = \eta^{2-4s+2c} \text{ для } \tau_{3*}\\
&n = 3,\ a_1 = a_3 = \eta^{1-c},\ a_2 = 1 \text{ для } D_{3*}\\
&n = 3,\ a_1 = a_2 = \eta^{2-2s},\ a_3 = \eta^{3-4s+c} \text{ для } \psi_*
\end{aligned}$$

Подставим разложение (2.7), (2.8) в формулы (2.5). После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ζ получим следующие уравнения:

(2.9) $$\begin{aligned}
&\tau_{i,0} = \frac{1}{R}(n_{ii}e_{i,0} + n_{ij}e_{j,0}) - \eta^{1-c}p_i\tau_{3,0} - c_iE_{2,0}\\
&\tau_{ij,0} = \frac{1}{R}\frac{1}{s_{44}^E}(m_{i,0} + m_{j,0}) - \frac{d_{15}}{s_{44}^E}E_{1,0}\\
&\tau_{i,1} = \frac{1}{R}(n_{ii}e_{i,1} + n_{ij}e_{j,1}) + \eta^{2s-c}n_{ii}\left(\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_i}\right)e_{i,0} -\\
&\quad - \eta^{2s-2c}p_i\tau_{3,1} - \eta^{2s-c}c_i\frac{R}{R_j}E_{2,0}\\
&\tau_{ij,1} = \frac{1}{R}\frac{1}{s_{44}^E}(m_{i,1} + m_{j,1}) + \eta^{2-s-c}\frac{1}{s_{44}^E}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_j}\right)m_{i,0} -\\
&\quad - \eta^{2s-c}\frac{d_{15}}{s_{44}^E}\frac{R}{R_i}E_{1,0}\\
&v_{3,1} = R(s_{12}^E\tau_{1,0} + s_{13}^E\tau_{2,0}) + d_{31}RE_{2,0}, \quad v_{i,1} = -g_{i,0}\\
&D_{1,0} = \varepsilon_{11}^T F_{1,0} + d_{15}\tau_{12,0}, \quad D_{1,1} = d_{15}\left(\tau_{12,1} - \eta^{2s-c}\frac{R}{R_1}\tau_{12,0}\right)\\
&D_{2,0} = \varepsilon_{33}^T E_{2,0} + d_{31}\tau_{1,0} + d_{33}\tau_{2,0} + \eta^{1-c}d_{31}\tau_{3,0}\\
&D_{2,1} = d_{31}\tau_{1,1} + d_{33}\tau_{2,1} - \eta^{2s-c}\left(d_{31}\frac{R}{R_2}\tau_{1,0} + d_{33}\frac{R}{R_1}\tau_{2,0}\right) +\\
&\quad + \eta^{2s-2c}d_{31}\tau_{3,1}\\
&\eta^{1-2s+c}D_{3,0} = \varepsilon_{11}^T E_{3,0} + d_{15}\tau_{23,0}\\
&\varepsilon_{11}^T E_{3,1} + d_{15}\tau_{23,1} - \eta^1 d_{15}\frac{R}{R_1}\tau_{23,0} = 0\\
&D_{3,2} = \varepsilon_{11}^T E_{3,2} + d_{15}\tau_{23,2} - \eta^{2s-c}d_{15}\frac{R}{R_1}\tau_{23,1}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(A_2D_{1,0})}{\partial\xi_1}+\frac{\partial(A_1D_{2,0})}{\partial\xi_2}=0$$

$$D_{3,2}=-\frac{1}{2A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2D_{1,1})}{\partial\xi_1}+\frac{\partial(A_1D_{2,1})}{\partial\xi_2}\right]$$

$$E_{i,0}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_{,0}}{\partial\xi_i},\quad E_{3,k}=-\frac{k+1}{R}\psi_{,k+1}\quad(k=0,1,2)$$

$$\tau_{i3,0}+\eta^{1-2s+c}\tau_{i3,2}=\frac{\eta^{-1+s}}{2}\left[q_i^+-q_i^-+\eta^1\frac{R}{R_j}(q_i^++q_i^-)\right]$$

$$\tau_{i3,1}=\frac{\eta^{-1+s}}{2}\left[q_i^++q_i^-+\eta^1\frac{R}{R_j}(q_i^+-q_i^-)\right]$$

$$\tau_{3,0}+\eta^{1-2s+c}\tau_{3,2}=\frac{\eta^{-1+c}}{2}\left[q_3^+-q_3^-+\eta^1\left(\frac{R}{R_1}+\frac{R}{R_2}\right)(q_3^++q_3^-)\right]$$

$$\tau_{3,1}+\eta^{2-4s+2c}\tau_{3,3}=\frac{\eta^{-1+c}}{2}\left[q_3^++q_3^-+\eta^1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(q_3^+-q_3^-)\right]$$

Величины $e_{i,0}$, $g_{i,0}$, $m_{i,0}$, $m_{i,1}$ расшифровываются по последним формулам (2.5), в которых следует заменить звездочки нуликом или единицей соответственно, а для $e_{i,1}$, $g_{i,1}$ имеют место следующие формулы:

$$e_{i,1}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{i,1}}{\partial\xi_i}+\eta^sRk_iv_{j,1}+\eta^{2s-c}R\frac{v_{3,1}}{R_i}$$

$$g_{i,1}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{3,1}}{\partial\xi_i}-\eta^cR\frac{v_{i,1}}{R_i}$$

Перейдем в полученных уравнениях к принятым в теории оболочек величинам.

Воспользовавшись формулами (2.7), (2.3), найдем, что перемещения срединной поверхности оболочки u_i, w связаны с трехмерными перемещениями следующим образом:

(2.10) $$u_i=v_i|_{\zeta=0}=\eta^s v_{i,0},\quad w=-v_3|_{\zeta=0}=-\eta^c v_{3,0}$$

Усилия и моменты выражаются через напряжения с помощью формул (2.7), (2.8), (2.3) так:

(2.11) $$T_i=\int_{-h}^{+h}\tau_i\,d\gamma=2h\tau_{i,0},\quad S_{ij}=\int_{-h}^{+h}\tau_{ij}\,d\gamma=2h\tau_{ij,0}$$

$$G_i=-\int_{-h}^{+h}\tau_i\gamma\,d\gamma=-\eta^{1-2s+c}\frac{2h^2}{3}\tau_{i,1}$$

$$H_{ij}=\int_{-h}^{+h}\tau_{ij}\gamma\,d\gamma=\eta^{1-2s+c}\frac{2h^2}{3}\tau_{ij,1}$$

$$N_i=-\int_{-h}^{+h}\tau_{i3}\,d\gamma=-\eta^{1-s}2h\left(\tau_{i3,0}+\frac{\eta^{1-2s+c}}{3}\tau_{i3,2}\right)$$

Выразим с помощью формул (2.10), (2.3), (2.9) величины $v_{i,1}$, $v_{3,1}$, $e_{i,0}$, ..., $e_{i,1}$ через углы поворота и компоненты деформации срединной поверхности

$$(2.12)\quad e_{i,0} = R\varepsilon_i,\quad m_{i,0} = R\omega_j,\ g_{i,0} = \eta^{-1-c}\gamma_i$$

$$v_{i,1} = -\eta^{s-c}R\gamma_i,\ v_{3,1} = R\,(s_{12}{}^E n_{11} + s_{13}{}^E n_{21})\varepsilon_1 +$$

$$+ R\,(s_{12}{}^E n_{12} + s_{13}{}^E n_{22})\varepsilon_2 + RE_2{}^{(0)}(d_{31} - s_{12}{}^E c_1 - s_{13}{}^E c_2)$$

$$m_{i,1} = \eta^{-c+2s}R^2\left(\tau - \frac{\omega_i}{R_j}\right)$$

$$e_{i,1} = \eta^{-c+2s}R^2\varkappa_i + \eta^{-c+2s}\frac{R^2}{R_i}\,[(s_{12}^E n_{11} + s_{13}^E n_{21})\,\varepsilon_1 +$$

$$+ (s_{12}^E n_{12} + s_{13}^E n_{22})\,\varepsilon_2 + E_2^{(0)}\,(d_{31} - s_{12}^E c_1 - s_{13}^E c_2)]$$

Углы поворота ω_j, γ_i и компоненты деформации срединной поверхности ε_i, ω, $\varkappa_i$, τ выражаются через перемещения срединной поверхности по формулам работы [1].

В результате преобразования уравнений (2.9) с учетом (2.11), (2.12) получим формулы в терминах теории оболочек, которые разобьем на две группы.

К первой группе отнесем следующие уравнения:

$$(2.13)\quad T_i = 2h\,(n_{ii}\varepsilon_i + n_{ij}\varepsilon_j) - 2hc_iE_2{}^{(0)} - \{hp_i\,(q_3{}^+ - q_3{}^-)\}$$

$$S_{ij} = \frac{2h}{s_{44}^E}\,(\omega - d_{15}E_1^{(0)})$$

$$G_i = -\frac{2h^3}{3}(n_{ii}\varkappa_i + n_{ij}\varkappa_j) + \left\{-\frac{2h^3}{3}\left(\frac{n_{ii}}{R_i} + \frac{n_{ij}}{R_j}\right)[(s_{12}^E n_{11} +\right.$$

$$+ s_{13}^E n_{21})\,\varepsilon_1 + (s_{12}^E n_{12} + s_{13}^E n_{22})\,\varepsilon_2 + (d_{31} - s_{12}^E c_1 - s_{13}^E c_2)\,E_2^{(0)}] -$$

$$\left. - \frac{2h^3}{3}\,n_{ii}\left(\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_i}\right)\varepsilon_i + \frac{2h^3}{3}\,c_i\,\frac{E_2^{(0)}}{R_j} + \frac{h^2}{3}\,p_i\,(q_3{}^+ + q_3{}^-)\right\}$$

$$H_{ij} = \frac{2h^3}{3s_{44}^E}\,\tau - \left\{\frac{h^3}{3s_{44}^E}\,\frac{1}{R_i}\,(\omega + 2d_{15}E_1^{(0)}\right\}$$

$$E_i^{(0)} = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial\alpha_i},\quad D_1^{(0)} = \varepsilon_{11}^T E_1^{(0)} + \frac{d_{15}}{2h}\,S_{12}$$

$$D_2^{(0)} = \varepsilon_{33}^T E_2^{(0)} + \frac{d_{31}}{2h}\,T_1 + \frac{d_{33}}{2h}\,T_2 + \left\{\frac{d_{31}}{2}\,(q_3{}^+ - q_3{}^-)\right\}$$

$$\frac{\partial\,(A_2D_1^{(0)})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\,(A_1D_2^{(0)})}{\partial\alpha_2} = 0$$

Здесь и в дальнейшем величины с верхним числовым индексом в круглых скобках являются коэффициентом в разложениях искомых величин по степеням γ. Эти разложения получаются, если в формулах (2.7), (2.8) заменить ζ на γ с помощью (2.4) и учесть (2.3). Они имеют вид

$$(2.14)\quad P = \sum_{i=0}^{n}\gamma^i P^{(i)}$$

где число n определяется для каждой из искомых величин формулами (2.8). В фигурные скобки всюду заключены малые члены порядка η^1 по сравнению с главными членами.

Кроме уравнений (2.13) в первую группу следует включить уравнения равновесия и формулы деформации—перемещения. В результате получим замкнутую систему дифференциальных уравнений десятого порядка относительно неизвестных механических и электрических величин.

Все остальные уравнения отнесем ко второй группе

$$D_1^{(1)} = \frac{3d_{15}}{2h^3} H_{12} - \left\{\frac{d_{15}}{2h}\frac{S_{12}}{R_1}\right\} \tag{2.15}$$

$$D_2^{(1)} = -\frac{3}{2h^3}(d_{31}G_1 + d_{33}'G_2) + \left\{-\frac{1}{2h}\left(d_{31}\frac{T_1}{R_2} + d_{33}\frac{T_2}{R_1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{d_{31}}{2h}(q_3^+ + q_3^-)\right\}$$

$$D_3^{(0)} = -h^2 D_3^{(2)} = \frac{h^2}{2A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2D_1^{(1)})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_1D_2^{(1)})}{\partial\alpha_2}\right]$$

$$E_3^{(0)} = \frac{1}{\varepsilon_{11}{}^T} D_3^{(0)} + \frac{d_{15}}{4\varepsilon_{11}{}^T}\left[\frac{3N_2}{h} + (q_2^+ - q_2^-) + \left\{\frac{h}{R_1}(q_2^+ + q_2^-)\right\}\right]$$

$$E_3^{(1)} = -\frac{d_{15}}{2h\varepsilon_{11}{}^T}(q_2^+ + q_2^-) - \left\{\frac{3d_{15}}{4\varepsilon_{11}{}^T}\frac{1}{R_1}\left(\frac{N_2}{h} + q_2^+ - q_2^-\right)\right\}$$

$$E_3^{(2)} = \frac{1}{\varepsilon_{11}{}^T} D_3^{(2)} - \frac{3D_{15}}{4\varepsilon_{11}{}^T h^2}\left(\frac{N_2}{h} + q_2^+ - q_2^-\right) + \left\{\frac{d_{15}}{\varepsilon_{11}{}^T}\frac{1}{R_1}\frac{q_2^+ + q_2^-}{2h}\right\}$$

$$\psi^{(k+1)} = -\frac{1}{k+1}E_3^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2)$$

По формулам (2.15), после того как найдено решение системы уравнений первой группы, можно с помощью прямых действий доопределить не вошедшие в первую группы электрические величины.

Отметим, что полная задача, вообще говоря, не допускает расчленения на механическую и электрическую задачи. Исключение представляют некоторые частные случаи, например, для осесимметричной задачи [3] удается в уравнениях (2.15) выразить все электрические величины через усилия, вследствие чего полная задача расчленяется на механическую и электрическую. В этом случае уравнения механической задачи отличаются от уравнений теории неэлектрических оболочек только смыслом коэффициентов, стоящих в уравнениях состояния перед компонентами деформации.

3. Рассмотрим пьезоэлектрическую оболочку с лицевыми поверхностями, полностью покрытыми электродами, на которых задано значение потенциала V (V — функция только времени)

$$\psi|_{\gamma=\pm h} = \pm V \tag{3.1}$$

Предполагается, что механическая поверхностная нагрузка отсутствует

$$\left.\frac{\tau_3}{a_1a_2}\right|_{\gamma=\pm h} = 0, \quad \left.\frac{\tau_{i3}}{a_j}\right|_{\gamma=\pm h} = 0 \tag{3.2}$$

Для искомых величин электроупругого состояния примем следующее асимптотическое представление:

$$v_1 = \eta^{1-s+c}v_{1*},\ v_2 = v_{2*},\ O(v_2|_{\gamma=0}) = \eta^{1-s+c} \tag{3.3}$$

$$v_3 = \eta^{1-2s+2c}v_{3*},\ \tau_i = \tau_{i*},\ \tau_{ij} = \tau_{ij*}$$

$$\tau_{i3} = \eta^{1-s}\tau_{i3*},\ \tau_3 = \eta^{1-c}\tau_{3*},\ E_3 = \eta^{-1}E_{3*}$$

$$\psi = \psi_*,\ D_i = D_{i*},\ D_3 = \eta^{-1}D_{3*}$$

где c, s, η имеют тот же смысл, что и раньше. В рассматриваемом случае из формул (1.2), (3.1) следует, что тангенциальные компоненты вектора напряженности электрического поля E_1 и E_2 равны нулю.

Выполним замену переменных (2.4), подставив асимптотику (3.3) в исходные уравнения, затем проинтегрируем их по ζ с точностью (2.6), в результате получим разложения вида (2.7), из котоых приведем здесь только формулы для перемещений и главных напряжений

(3.4)
$$
\begin{aligned}
&v_{1*} = v_{1,0} + \eta^{1-2s+c}\zeta v_{1,1}, \quad v_{2*} = \eta^{1-s+c}v_{2,0} + \zeta U_{2,1} + \eta^1\zeta^2 v_{2,2}\\
&v_{3*} = \vartheta_{3,0} + \eta^{1-c}\zeta v_{3,1} + \lambda^{2s-2c}\zeta^2 v_{3,2}\\
&\tau_{i*} = \eta^{1-2s+c}\tau_{i,0} + \zeta\tau_{i,1} + \eta^{1-c}\zeta^2\tau_{i,2}\\
&\tau_{ij*} = \eta^{1-2s+c}\tau_{ij,0} + \zeta\tau_{ij,1} + \eta^1\zeta^2\tau_{ij,2}
\end{aligned}
$$

Сравнивая (3.4) с аналогичными формулами теории неэлектрических оболочек [1], заметим, что полученные разложения для напряжений имеют почти такой же вид, как соответствующие разложения в случае чисто моментного напряженного состояния. Формулы для перемещений v_{2*} и v_{3*} не имеют аналога в теории неэлектрических оболочек. Самым большим из слагаемых в перемещениях является $v_{2,1}$. Это объясняется тем, что при наложении электрического поля домены, ориентированные вдоль линий α_2, стремятся занять нормальное к срединной поверхности положение, вследствие этого максимальными в главных напряжениях являются величины $\tau_{i,1}$, $\tau_{ij,1}$, которыми определяются моменты.

Выполняя выкладки в той же последовательности, что и в п. 2, получим для электродированной оболочки следующие соотношения электроупругости.

(3.5)
$$
\begin{aligned}
T_i &= 2h(n_{ii}\varepsilon_i + n_{ij}\varepsilon_j) + \left\{\frac{h^3}{3}k_1 d_{15}E_3\left[\frac{n_{i1}}{R_2} + \frac{n_{i2}}{k_1}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{R_2} + \right.\right.\\
&+ (s_{12}{}^E n_{11} + s_{13}{}^E n_{21})\left(\frac{n_{ii}}{R_i} + \frac{n_{ij}}{R_j}\right) + 2n_{ii}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_i}\right) +\\
&\left.\left. + 2p_i\left(\frac{n_{11}}{R_1} + \frac{n_{21}}{R_2}\right)\right]\right\}\\
G_i &= -\frac{2h^3}{3}(n_{ii}\varkappa_i + n_{ij}\varkappa_j + n_{i1}k_1 d_{15}E_3)\\
S_{21} &= \frac{2h}{s_{44}{}^E}\omega + \left\{\frac{h^3 d_{15}E_3}{3s_{44}{}^E}\left(-\frac{k_2}{R_2} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{R_2}\right)\right\}\\
S_{12} &= S_{21} - \left\{\frac{2h^3}{3s_{44}{}^E}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)(d_{15}k_2E_3 - \tau)\right\}\\
H_{12} &= H_{21} = \frac{4h^3}{3s_{44}{}^E}\tau - \frac{3h^3k_2d_{15}}{3s_{44}{}^E}E_3, \quad E_3 = -\frac{V}{h}
\end{aligned}
$$

Соотношения (3.5) вместе с уравнениями равновесия и формулами деформации — перемещения составляют замкнутую систему дифференциальных уравнений восьмого порядка, не содержащую неизвестных электрических величин. Так как для построенной теории не выполняются гипотезы Кирхгофа — Лява, то формулы перехода от усилий и моментов к напряжениям и от перемещений срединной поверхности к трехмерным перемещениям качественно отличаются от соответствующих формул классической теории неэлектрических оболочек. Для разложений искомых величин по переменной γ имеют место формулы (2.14), где число n задается следующим образом:

$n = 1$ для v_1; $n = 0$ для E_3, D_3

$n = 2$ для v_2, v_3, τ_i, τ_{ij}, D_i; $n = 3$ для τ_{i3}, τ_3

После того как решена механическая задача в терминах теории оболочек, можно перейти к трехмерным искомым величинам с помощью следующих формул:

$$v_i^{(0)} = u_i, \quad v_3^{(0)} = -w, \quad v_1^{(1)} = -\gamma_1$$

$$v_2^{(1)} = d_{15}E_3 - \gamma_2, \qquad \left\{v_2^{(2)} = \frac{d_{15}E_3}{2R_2}\right\}$$

$$\{v_3^{(1)} = (s_{12}{}^E n_{11} + s_{13}{}^E n_{21})\varepsilon_1 + (s_{12}{}^E n_{12} + s_{13}{}^E n_{22})\varepsilon_2\}$$

$$v_3^{(2)} = \frac{1}{2} k_1 d_{15} (s_{12}{}^E n_{11} + s_{13}{}^E n_{21}) E_3$$

$$\left\{\tau_1^{(2)} = \left[n_{11}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) + \frac{n_{11}}{2R_2} + \frac{n_{12}}{2k_1}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{R_2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{n_{11}}{R_1} + \frac{n_{21}}{R_2}\right)(s_{12}{}^E n_{11} + s_{13}{}^E n_{21} - p_1)\right] k_1 d_{15} E_3\right\}$$

$$\left\{\tau_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{n_{22}}{k_1}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{R_2} + (s_{12}{}^E n_{11} + s_{13}{}^E n_{21})\left(\frac{n_{22}}{R_2} + \frac{n_{21}}{R_1}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{n_{21}}{R_2} - p_2\left(\frac{n_{11}}{R_1} + \frac{n_{21}}{R_2}\right)\right] k_1 d_{15} E_3\right\}$$

$$\tau_i^{(0)} = \frac{T_i}{2h} - \left\{\frac{h^2}{3}\tau_1^{(2)}\right\}, \quad \tau_i^{(1)} = -\frac{3}{2h^2} G_i$$

$$\left\{\tau_{12}^{(2)} = \frac{d_{15}E_3}{2s_{44}{}^E}\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{R_2} + \frac{k_2}{R_2} - \frac{2k_2}{R_1}\right] - \frac{1}{s_{44}{}^E}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\tau\right\}$$

$$\left\{\tau_{21}^{(2)} = \frac{d_{15}E_3}{2s_{44}{}^E}\left\{\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{R_2} - \frac{k_1}{R_2}\right)\right\}$$

$$\tau_{ij}^{(0)} = \frac{S_{ij}}{2h} - \left\{\frac{h^2}{3}\tau_{ij}^{(2)}\right\}, \quad \tau_{ij}^{(1)} = \frac{3}{2h^3} H_i$$

$$\tau_{i3}^{(0)} = -h^2\tau_{i3}^{(2)} = -\frac{3}{4h} N_i$$

$$\left\{\tau_{i3}^{(1)} = -h^2\tau_{i3}^{(3)} = -\left[\frac{1}{A_i}\frac{\partial\tau_i^{(0)}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial\tau_{ij}^{(0)}}{\partial\alpha_j} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + k_j(\tau_i^{(0)} - \tau_j^{(0)}) + k_i(\tau_{ij}^{(0)} + \tau_{ji}^{(0)})\right]\right\}$$

$$\tau_3^{(0)} = -h^2\tau_3^{(2)} = -\frac{h^2}{2}\left(\frac{n_{11}}{R_1} + \frac{n_{21}}{R_2}\right) k_1 d_{15} E_3$$

$$\tau_3^{(1)} = -h^2\tau_3^{(3)} = \frac{\tau_1^{(0)}}{R_1} + \frac{\tau_2^{(0)}}{R_2} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial\tau_{13}^{(0)}}{\partial\alpha_1} -$$
$$- \frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau_{23}^{(0)}}{\partial\alpha_2} - k_2\tau_{13}^{(0)} - k_1\tau_{23}^{(0)}$$

Затем по найденным напряжениям вычислим электрические величины

$$D_3^{(0)} = \varepsilon_{11}{}^T E_3, \quad D_1^{(0)} = d_{15}\tau_{12}^{(0)}, \quad D_1^{(1)} = d_{15}\tau_{12}^{(1)}$$

$$\left\{D_1^{(2)} = d_{15}\left(\tau_{12}^{(2)} - \frac{1}{R_2}\tau_{12}^{(1)}\right)\right\}$$

$$D_2^{(0)} = d_{31}\tau_1^{(0)} + d_{33}\tau_2^{(0)} + \{d_{31}\tau_3^{(0)}\}$$

$$D_2^{(1)} = d_{31}\tau_1^{(1)} + d_{33}\tau_2^{(1)}$$

$$\left\{D_2^{(2)} = d_{31}\tau_1^{(2)} + d_{33}\tau_2^{(2)} - \left(d_{31}\frac{\tau_1^{(1)}}{R_2} + d_{33}\frac{\tau_2^{(1)}}{R_1}\right) + d_{31}\tau_3^{(2)}\right\}$$

Как и раньше, в фигурные скобки заключены те члены и уравнения, которые надо отбросить, если допустить в теории погрешность порядка η^1.

Из полученных формул видно, что в рассматриваемом случае полная задача расчленяется на механическую и электрическую, причем электрические величины вычисляются после решения механической задачи с помощью алгебраических действий.

4. Выше получены соотношения электроупругости с точностью до величин порядка η^{2-2s}. Можно показать, что эта точность, как и в теории неэлектрических оболочек [1], является оптимальной: при попытке ее улучшить теория качественно усложняется — повышается порядок системы дифференциальных уравнений, возникает необходимость ввести соотношение упругости, связывающее перерезывающие усилия с поперечными сдвигами и т. д.

Члены и уравнения, заключенные в фигурные скобки, позволяют для электроупругого состояния с малой изменяемостью ($s < 1/2$) повысить точность расчета до величин $O(\eta^{2-2s})$, что важно при решении практических задач, так как в технике, как правило, применяются пьезокерамические оболочки средней толщины. При больших показателях изменяемости ($s \geqslant 1/2$) малые члены в фигурных скобках выходят за рамки принятой точности, поэтому их надо отбросить.

Если в построенных соотношениях электроупругости пренебречь членами $O(\eta^1)$ и внести в них упрощения, которые имеют место для осесимметричной задачи при меридиональной поляризации, то получим соотношения электроупругости, совпадающие с выведенными ранее в [3].

Отметим, что в этом частном случае для оболочек, полностью покрытых электродами, упрощенные формулы перехода не позволяют определить величину $v_3^{(2)}$ (при $s = 0$ $v_{3,2}$ такого же порядка, как и $v_{3,0}$). Кроме того, при малых s по усилиям нельзя определить напряжения, так как главные напряжения по нормальной координате меняются по квадратичному закону, а принятые в теории оболочек формулы предусматривают только линейный закон изменения напряжений по толщине.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезокерамические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях.— В кн.: Физическая акустика. Т. 1, Ч. А. / Под ред. У. Мезона. М.: Мир, 1966, с. 204—326.
3. *Борисейко В. А., Мартыненко В. С., Улитко А. Ф.* Соотношения электроупругости пьезокерамических оболочек вращения, поляризованных вдоль меридиональной координаты.— Прикл. механика, 1979, т. 15, № 12, с. 36—42.

Москва

Поступила в редакцию
22.I.1981