

УДК 539.3 : 534.1

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЕТЧАТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ФИКСИРОВАННОЙ ПЕРВОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пуртов В. А., Пшеничнов Г. И.

Рассматриваемая оболочка состоит из упругих стержней, оси которых образуют на сферической поверхности (срединная поверхность оболочки) достаточно густую сетку из равносторонних треугольников. На основе континуальной расчетной модели [1] с помощью методов теории оптимального управления решена задача отыскания зависимости радиуса тонкостенного трубчатого поперечного сечения стержней от координаты вдоль меридиана срединной поверхности, при которой безразмерный параметр первой частоты собственных осесимметричных колебаний оболочки равен заданной величине, а функционал объема материала оболочки принимает минимальное значение. На примере расчета показано, что при этом достигается существенная экономия материала по сравнению с проектом, в котором поперечные сечения стержней постоянны.

1. Уравнения состояния расчетной модели оболочки с рассматриваемой сеткой стержней могут быть получены как частный случай из уравнений работы [1]. Представим их в виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} N_1 &= \frac{E'h}{1-\nu_1^2} (\epsilon_1 + \nu_1 \epsilon_2), & N_2 &= \frac{E'h}{1-\nu_1^2} (\epsilon_2 + \nu_1 \epsilon_1) \\ S &= \frac{E'h}{2(1+\nu_1)} \omega, & H &= \frac{E'h^3}{12(1+\nu_2)} \tau \\ M_1 &= -\frac{E'h^3}{12(1-\nu_2^2)} (\kappa_1 + \nu_2 \kappa_2), & M_2 &= -\frac{E'h^3}{12(1-\nu_2^2)} (\kappa_2 + \nu_2 \kappa_1) \\ E' &= \frac{EF}{ah}, & h &= 6\rho k_\gamma, & \nu_1 &= \frac{1}{3}, & \nu_2 &= \frac{1-\gamma}{3+\gamma}, & k_\gamma &= \sqrt{\frac{1+\gamma}{3+\gamma}} \\ \rho &= \sqrt{\frac{J_1}{F}}, & \gamma &= \frac{GJ_3}{EJ_1} \end{aligned}$$

Здесь  $F$ ,  $J_1$ ,  $J_3$  — площадь и моменты инерции поперечного сечения стержней при изгибе в плоскости, нормальной к срединной поверхности оболочки, и при кручении,  $E$ ,  $G$  — модуль Юнга и модуль упругости на сдвиг материала стержней,  $a$  — высота равносторонних треугольников сетки. В случае треугольной сетки стержней их жесткость на изгиб в плоскости, касательной к срединной поверхности, при практических расчетах можно не учитывать ( $J_2 \equiv 0$ ).

При  $\gamma = 0$  (жесткость стержней на кручение не учитывается) уравнения (1.1) переходят в соответствующие формулы для изотропных оболочек с коэффициентом Пуассона материала  $\nu = 1/3$ .

В дальнейшем будем рассматривать стержни тонкостенного трубчатого сечения. Обозначим через  $r$  и  $\delta$  радиус и толщину стенки стержней и

примем, что  $\delta^\circ = \delta/a = \text{const}$ . Тогда

$$E' = \frac{\sqrt{2}\pi\delta E}{3k_\gamma}, \quad h = 3\sqrt{2}k_\gamma r, \quad \rho = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Масса стержней, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности оболочки, равна

$$3\mu F/a = \mu' h, \quad \mu' = 6\pi\delta^\circ\mu/k_\gamma$$

где  $\mu$  и  $\mu'$  — плотность материала стержней и приведенная плотность материала расчетной модели.

Объем материала стержней оболочки может быть представлен в виде

$$(1.2) \quad I = 2\sqrt{2}\pi^2\delta^\circ R^3 I^\circ$$

$$I^\circ = I^\circ(v) = \frac{1}{k_\gamma} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v \sin \alpha \, d\alpha, \quad v = \frac{h}{R}$$

При решении задачи будем использовать методы теории оптимального управления.

2. Рассмотрим задачу оптимального управления: найти функцию управления  $v^*(t)$  и вектор управляющих параметров  $\xi^*$ , обеспечивающие минимум функционала

$$I(v, \xi) = \int_{t_0}^T F(t, x(t, v, \xi), v(t), \xi) \, dt + F_T(x(T, v, \xi), \xi)$$

на фиксированном отрезке  $[t_0, T]$ , где  $x$  —  $n$ -мерный фазовый вектор,  $v$  —  $r$ -мерная функция управления,  $\xi$  —  $q$ -мерный вектор управляющих параметров.

Изменение фазового вектора описывается системой дифференциальных уравнений

$$(2.1) \quad \dot{x} = f(t, x, v, \xi), \quad x(t_0) = x_0$$

Точка означает дифференцирование по  $t$ .

Допустимое множество для  $x, v, \xi$  определяется системой ограничений вдоль траектории и терминальных ограничений

$$\Gamma^s(t, x, v, \xi) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, l)$$

$$\Gamma^s(t, x, v, \xi) \leq 0 \quad (s = l+1, l+2, \dots, m)$$

$$\Gamma_T^s(x(T), v(T), \xi) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, l_T)$$

$$\Gamma_T^s(x(T), v(T), \xi) \leq 0 \quad (s = l_T+1, l_T+2, \dots, m_T)$$

Использование численных методов предполагает ту или иную форму дискретизации исходной задачи. В частности, получил распространение способ сведения задач оптимального управления к задаче нелинейного программирования (например, [2, 3]).

Проведем рассуждения для случая интегрирования системы (2.1) по методу Эйлера (подробное изложение для произвольной схемы Рунге—Кутты дано в работе [4]).

Эта система заменяется следующей схемой:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h_i f_i(x_i, v_i, \xi) \quad (i = 1, 2, \dots, k-1) \\ h_i &= t_{i+1} - t_i, \quad t_1 = t_0, \quad t_k = T, \quad x_1 = x_0 \end{aligned}$$

$v(t)_i = v(t_i) = v_i$  на полуинтервале  $[t_i, t_{i+1})$  (вообще, любую функцию  $\varphi(t_i)$  будем для краткости обозначать  $\varphi_i$ ).

Система ограничений запишется в виде ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ):

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Gamma_i^s(x_i, v_i, \xi) &= 0 \quad (s = 1, 2, \dots, l) \\ \Gamma_i^s(x_i, v_i, \xi) &\leq 0 \quad (s = l+1, l+2, \dots, m) \\ \Gamma_{T^s}(x_k, \xi) &= 0 \quad (s = 1, 2, \dots, l_T) \\ \Gamma_{T^s}(x_k, \xi) &\leq 0 \quad (s = l_T+1, l_T+2, \dots, m_T) \end{aligned}$$

Минимизируемый функционал принимает форму ( $v$  — вектор размерности  $kr$ ):

$$\begin{aligned} I(x(v, \xi), v, \xi) &= \sum_{i=1}^{k-1} h_i F_i[x_i(v_1, \dots, v_{i-1}, \xi), v_i, \xi] + F_T(x_k(v, \xi), \xi) \\ x &= \{x_1^1, \dots, x_1^n, \dots, x_k^n\}, \quad v = \{v_1^1, \dots, v_1^r, v_2^1, \dots, \\ &\dots, v_2^r, \dots, v_{k-1}^r\} \end{aligned}$$

Таким образом, исходная задача оптимального управления свелась к задаче нелинейного программирования, а именно к задаче отыскания минимума функции  $I(v, \xi)$  при наличии ограничений (2.3).

Широкий класс методов нелинейного программирования сводит исходную задачу к решению последовательности задач безусловной минимизации дифференцируемой функции вида

$$(2.4) \quad G(x(v), v, \xi) = \sum_{i=1}^{k-1} h_i B_i(x_i, v_i, \xi) + b(x_k, \xi)$$

К подобным методам, в частности, относится метод внешних штрафных функций. В этом случае функция  $G$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} G &= I(x(v), v, \xi) + \tau \left[ \sum_{i=1}^{k-1} \left[ \sum_{s=1}^l (\Gamma_i^s)^2 + \sum_{s=l+1}^m \varphi(\Gamma_i^s) \right] + \right. \\ &\left. + \sum_{s=1}^{l_T} (\Gamma_{T^s})^2 + \sum_{s=l_T+1}^{m_T} \varphi(\Gamma_{T^s}) \right] \end{aligned}$$

Здесь  $\tau$  — коэффициент штрафа,  $\varphi(g)$  — дифференцируемая по  $g$  функция:  $\varphi(g) > 0$  и строго возрастающая при  $g > 0$ ,  $\varphi(g) = 0$  при  $g \leq 0$ .

Использование градиентных методов безусловной минимизации приводит к необходимости вычисления градиента функции  $G$ . Если находить градиент численно, потребуется знание  $\sim kr$  значений функции  $G$  (в реальных задачах величина  $kr$  принимает, как правило, значения от  $10^2$  до  $10^3$ ). Следовательно, столько же раз надо вычислить траекторию. Попытка непосредственно продифференцировать сложную функцию  $G$  по компонентам ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ;  $j = 1, 2, \dots, r$ ) приводит к появлению громоздких формул.

Будем следовать предложенной в работе [4] технике, позволяющей сравнительно просто определять значение градиента.

Введем систему векторов  $p_i$  размерности  $n$ , определяемых из рекуррентных соотношений

$$(2.5) \quad p_i = \frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i} p_{i+1}$$

$$p_k = \frac{\partial G}{\partial x_k} = \frac{\partial b(x_k, \xi)}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

Для всех  $v_i$  имеет место формула

$$(2.6) \quad \frac{dG}{dv_i} = \frac{\partial G}{\partial v_i} + \frac{\partial x_{i+1}}{\partial v_i} p_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

Действительно, учитывая соотношения (2.2), по правилу дифференцирования сложной функции найдем

$$\frac{dG}{dv_{k-1}} = \frac{\partial G}{\partial v_{k-1}} + \frac{\partial x_k}{\partial v_{k-1}} \frac{\partial G}{\partial x_k} = \frac{\partial G}{\partial v_{k-1}} + \frac{\partial x_k}{\partial v_{k-1}} p_k$$

$$\frac{dG}{dv_{k-2}} = \frac{\partial G}{\partial v_{k-2}} + \frac{\partial x_{k-1}}{\partial v_{k-2}} \frac{\partial G}{\partial x_{k-1}} + \frac{\partial x_{k-1}}{\partial v_{k-2}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{k-1}} p_k =$$

$$= \frac{\partial G}{\partial v_{k-2}} + \frac{\partial x_{k-1}}{\partial v_{k-2}} p_{k-1}$$

Далее, используя последовательно (2.5), получим формулу (2.6).

Аналогично выводится формула

$$(2.7) \quad \frac{dG}{d\xi} = \frac{\partial G}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial \xi} p_i$$

Запишем полученные соотношения (2.5) — (2.7) для функции  $G$ , представленной в виде (2.4)

$$(2.8) \quad p_i = p_{i+1} + h_i \left[ \frac{\partial B_i(x_i, v_i, \xi)}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i(x_i, v_i, \xi)}{\partial x_i} p_{i+1} \right]$$

$$p_k = \frac{\partial b(x_k, \xi)}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

$$(2.9) \quad \frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} p_1 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i \left[ \frac{\partial B_i(x_i, v_i, \xi)}{\partial \xi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f_i(x_i, v_i, \xi)}{\partial \xi} p_{i+1} \right] + \frac{\partial b(x_k, \xi)}{\partial \xi}$$

$$(2.10) \quad \frac{dG}{dv_i} = h_i \left[ \frac{\partial B_i(x_i, v_i, \xi)}{\partial v_i} + \frac{\partial f_i(x_i, v_i, \xi)}{\partial v_i} p_{i+1} \right]$$

Таким образом, для вычисления градиента функции  $G$  нужно проинтегрировать систему (2.2), по рекуррентным соотношениям (2.8) вычислить  $p_i$  и подставить в формулы (2.9), (2.10).

Вернемся к рассматриваемой оптимизационной задаче.

Используя (1.1), систему дифференциальных уравнений осесимметричных свободных колебаний сетчатой сферической оболочки радиуса  $R$  запишем в следующей форме:

$$(2.11) \quad x^1 = -(1 - \nu_1)x^1 \operatorname{ctg} t - x^2 + \nu x^4 \operatorname{ctg} t + (\operatorname{ctg}^2 t - \Omega^2) \nu x^5$$

$$x^2 = (1 + \nu_1)x^1 - x^2 \operatorname{ctg} t + (1 - \Omega^2) \nu x^4 + \nu x^5 \operatorname{ctg} t$$

$$\begin{aligned}
 x^3 &= -x^2 - (1 - \nu_2)x^3 \operatorname{ctg} t - \nu^3 \operatorname{ctg}^2 t x^6 / 12 \\
 x^4 &= x^5 - x^6 \\
 x^5 &= (1 - \nu_1^2) \nu^{-1} x^1 - (1 + \nu_1) x^4 - \nu_1 x^5 \operatorname{ctg} t \\
 x^6 &= -12 (1 - \nu_2^2) \nu^{-3} x^3 - \nu_2 x^6 \operatorname{ctg} t \\
 x^1 &= N_1 / ER, \quad x^2 = Q / ER, \quad x^3 = M_1 / ER^2 \\
 x^4 &= w / R, \quad x^5 = u / R, \quad x^6 = -\gamma_1
 \end{aligned}$$

( $\alpha = t$  — угол широты срединной поверхности). Для безразмерного параметра круговой частоты свободных колебаний  $\Omega$  получим

$$\Omega^2 = \frac{\mu' R^2 \omega^2}{E'} = \frac{3\mu R^2 \omega^2}{E}$$

Примем, что оболочка на параллелях  $t = t_0$  и  $t = T$  закреплена жестко

$$(2.12) \quad x^4 = x^5 = x^6 = 0 \quad \text{при } t = t_0, \quad T$$

Задача ставится следующим образом: при фиксированном значении безразмерного параметра первой частоты собственных осесимметричных колебаний рассматриваемой сферической оболочки найти функцию управления  $\nu^*(t)$ , обеспечивающую минимум функционала (1.2) (минимум объема материала стержневой оболочки). При этом фазовый вектор должен удовлетворять дифференциальным уравнениям (2.11) и ограничениям (2.12).

3. Приведем результаты решения задачи для случая

$$t_0 = \pi / 6; \quad T = \pi / 2; \quad \Omega^2 = 1,28$$

Достаточную точность вычислений обеспечивает схема Эйлера с пересчетом при  $k = 102$ . Так как решение однородной краевой задачи (2.11), (2.12) определяется с точностью до постоянного множителя, принимаем  $x^1(t_0) = 1$  (нормировка собственных функций). Тем самым тривиальное решение будет отброшено.

Минимизируется функция

$$k_\nu I^0 = \sum_{i=1}^{k-1} h_i \nu_i \sin t_i$$

при наличии терминальных ограничений

$$\Gamma_T^1 = x^4(T) = 0, \quad \Gamma_T^2 = x^5(T) = 0, \quad \Gamma_T^3 = x^6(T) = 0$$

ограничения вдоль траектории отсутствуют.

Функция (2.4) принимает вид

$$G = \sum_{i=1}^{k-1} h_i \nu_i \sin t_i + \tau [(\Gamma_T^1)^2 + (\Gamma_T^2)^2 + (\Gamma_T^3)^2]$$

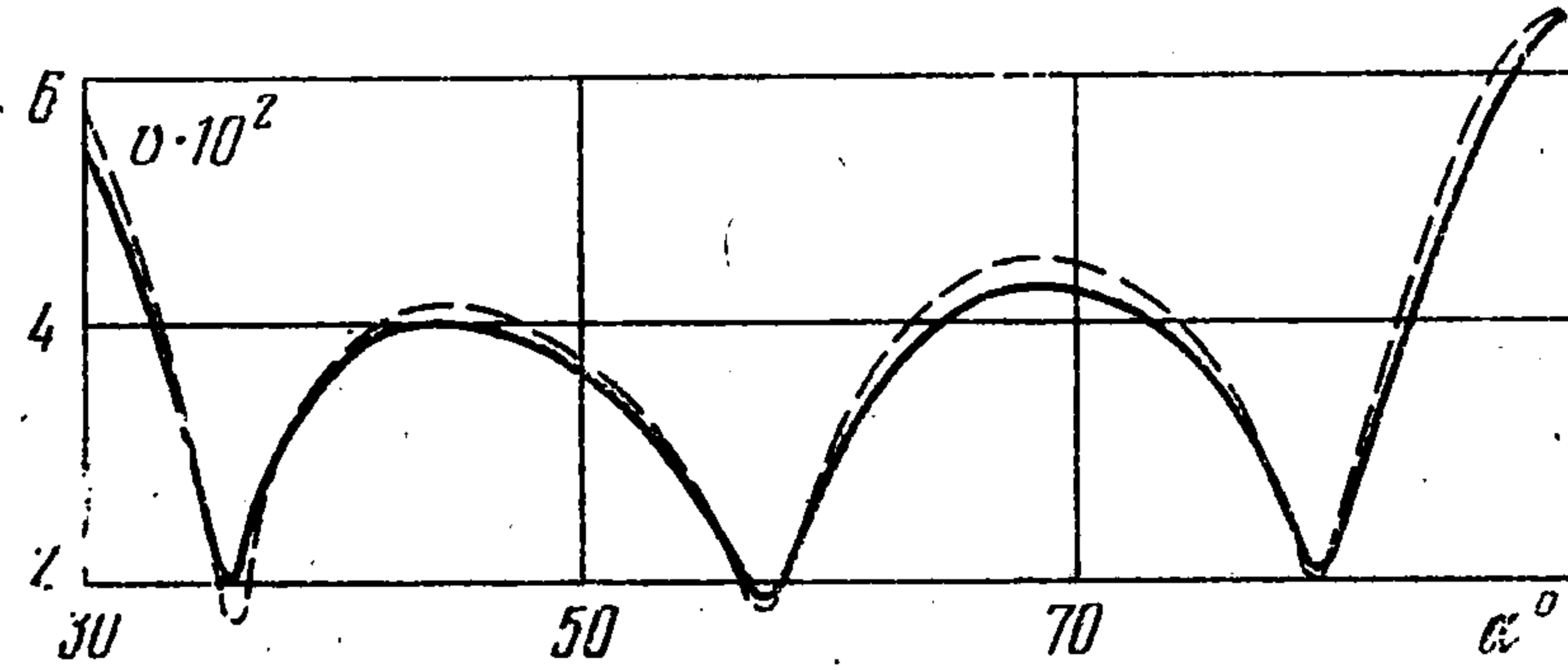
Вектор управляющих параметров  $\xi = (x^2(t_0), x^3(t_0))$ .

Для счета сначала был выбран метод штрафных функций, с помощью которого отыскивалось начальное приближение  $\nu_0, \xi_0$ . Затем методом обобщенных множителей Лагранжа с заданной точностью определялось решение задачи  $\nu^*, \xi^*$ .

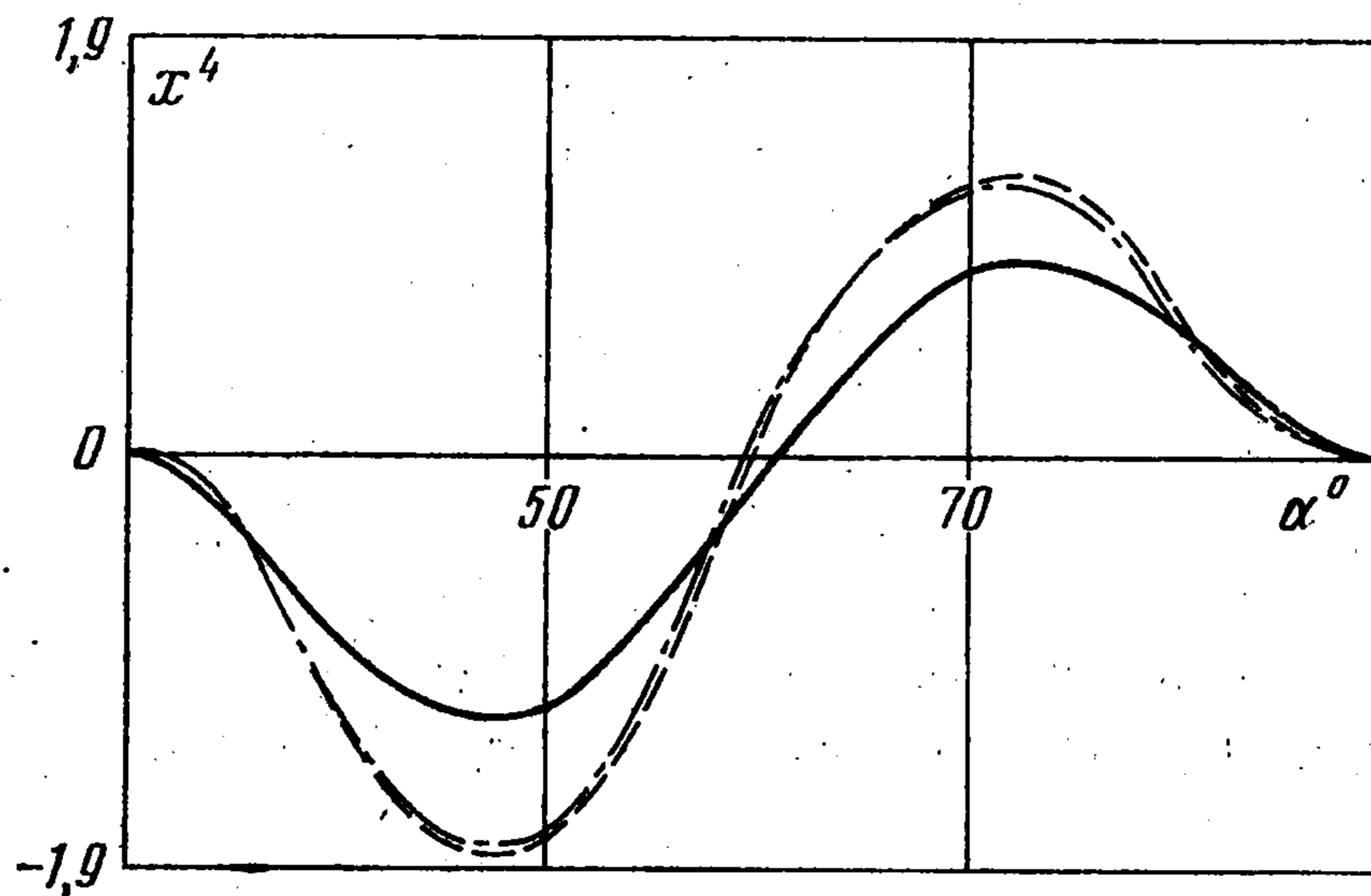
Выбор такой последовательности методов нелинейного программирования обусловлен следующими причинами. Метод штрафных функций сравнительно быстро отыскивает область, которую назовем хорошим начальным приближением. Однако попытка получить точное значение экстремума приводит к характерной «качке», когда от цикла к циклу значительно уменьшается значение штрафа, но соответственно возрастает значение функции и наоборот; при этом функция  $G$  уменьшается незначительно. С другой стороны, как известно, метод множителей Лагранжа нецелесообразно применять, если начальная точка находится вдали от экстремума.

Для безусловной минимизации наиболее подходящим оказался метод сопряженных градиентов с небольшим циклом восстановления, так как овражный характер функции  $G$  вносит значительную погрешность в выбор направления при увеличении параметра цикла восстановлений. Вместе с тем метод сопряженных градиентов оказался эффективнее метода наискорейшего спуска или методов, не использующих градиент (например, метод Хука — Дживса).

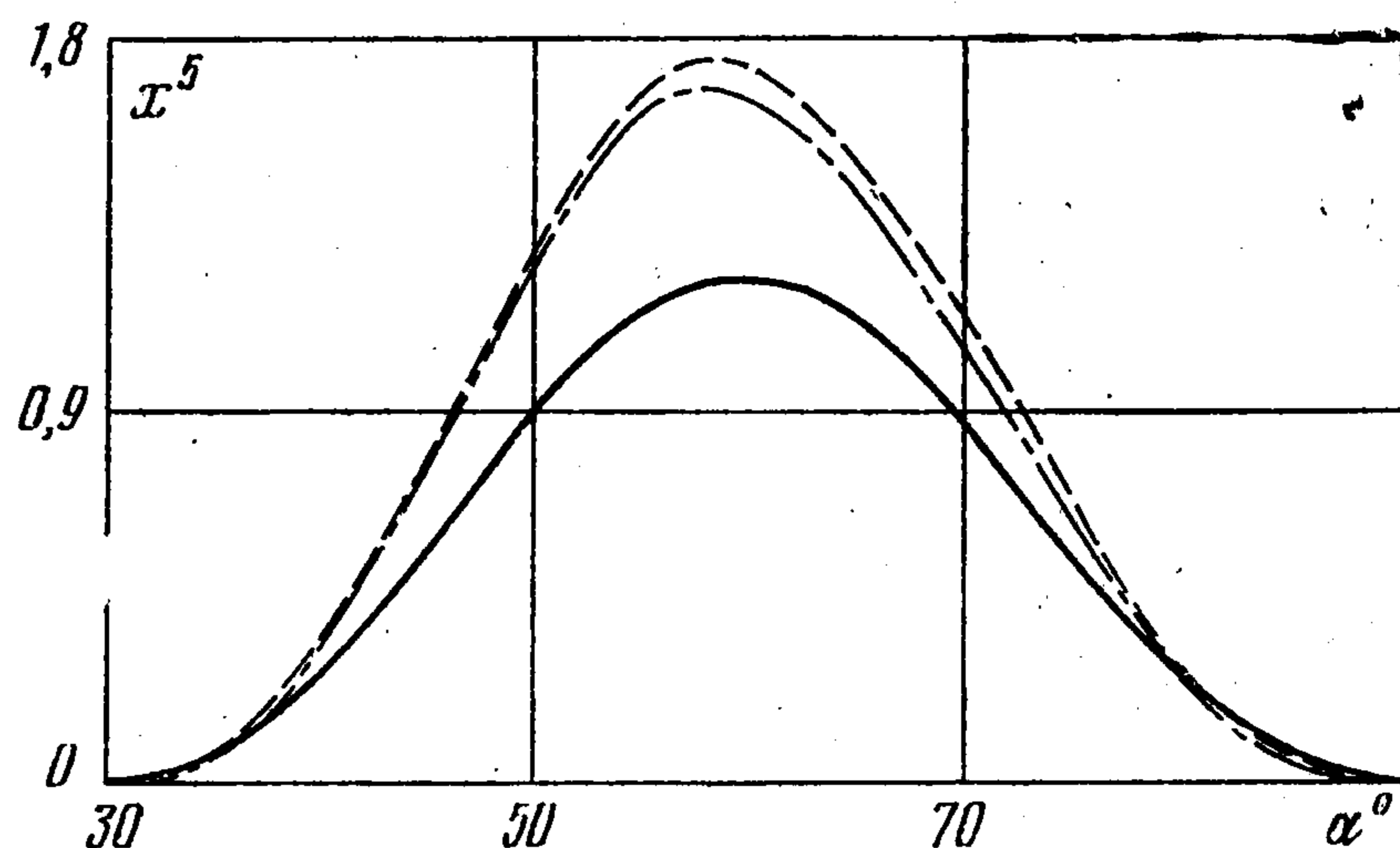
Для случая  $\gamma = 0$  (жесткость стержней на кручение не учитывается) изменение безразмерной величины радиуса трубчатого сечения стержней вдоль меридиана средин-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ной поверхности оболочки характеризуется сплошной кривой на фиг. 1. При этом  $I^0 = 5,41 \cdot 10^{-2}$ .

Для сравнения было получено решение, когда  $v = \text{const}$ . В этом случае принималось  $\xi = (x^2(t_0), x^3(t_0), v)$ . Минимизировалась функция невязки на правом конце

траектории

$$\min_{\xi} [(x^4(T))^2 + (x^5(T))^2 + (x^6(T))^2]$$

Решение находилось методом сопряженных градиентов. Поскольку система уравнений (2.11) линейна, построено также решение, основанное на ортогональной прогонке. С точки зрения затрат машинного времени результат во втором случае оказался несколько лучше. Поэтому минимизацию функции невязки целесообразно использовать при нелинейных уравнениях. В результате решения задачи ( $\gamma = 0$ ) найдено  $v = 0,0450$  (горизонтальная прямая на фиг. 1), что соответствует значению функционала  $I^0 = 6,75 \cdot 10^{-2}$ . Следовательно, в этом случае объем материала стержней оболочки по сравнению с оптимальным вариантом увеличивается на 24,6%.

Если учесть жесткость стержней на кручение, принимая  $\gamma = 0,769$ , полученное решение несколько изменится (штриховая линия на фиг. 1). При оптимальном решении в этом случае  $I^0 = 4,72 \cdot 10^{-2}$  (объем материала стержней оболочки снижается на 12,7% по сравнению с оптимальным вариантом сетчатой оболочки при  $\gamma = 0$ ).

На фиг. 2 и 3 приведены графики прогибов и продольных перемещений точек средней поверхности оболочки. Штриховые и штрихпунктирные кривые здесь соответствуют оптимальным проектам при значениях  $\gamma = 0$  и  $\gamma = 0,769$ . Сплошные линии отвечают случаю, когда  $\gamma = 0$ , а радиусы трубчатых сечений стержней оболочки постоянны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пшеничных Г. И. Расчет сетчатых оболочек. — В кн.: Исследования по теории сооружений. Вып. 22, М.: Стройиздат, 1976, с. 159.
2. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975, 526 с.
3. Полак Э. Численные методы оптимизации. М.: Мир, 1974. 376 с.
4. Грачев Н. И., Ештушенко Ю. Г. Пакет программ для решения задач оптимального управления. М.: ВЦ АН СССР, 1978, 77 с.

Москва

Поступила в редакцию  
2.X.1980