Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 531.3

ВТОРИЧНЫЙ КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ ПРИ ИЗГИБЕ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Срубщик Л. С.

Для уравнений строго выпуклых тонких оболочек вращения при равномерном давлении и неподвижном закреплении края показано существование единственного решения, отвечающего равновесию с радиальными растягивающими усилиями, для которого имеет место явление вторичного краевого эффекта. Построены соответствующие асимптотические разложения и дано их обоснование с оценкой остаточного члена. Главные члены этих разложений представлены в виде простых расчетных формул.

Показано также, что явление вторичного краевого эффекта может иметь место при изгибе тонкой пологой жестко защемленной оболочки в форме эллиптического параболоида под равномерно распределенным внутреннем давлении. Для соответствующего решения, отвечающего равновесию с только растягивающими усилиями, выписаны простые асимптотические формулы.

Уравнения нелинейной теории тонких упругих оболочек содержат при старших операторах два естественных малых параметра: ε^2 (относительная тонкостенность) и δ^2 (относительная нагрузка), определяемых формулами

$$\varepsilon = h(a\gamma)^{-1}, \quad \delta^2 = pa(Eh)^{-1}, \quad \gamma^2 = 12(1-\sigma^2)$$

где h — толщина и a — характерный размер оболочки, p — интенсивность поперечного давления, E — модуль Юнга и σ — коэффициент Пуассона. Это объясняет обнаруженное [1] явление вторичного краевого эффекта, заключающееся в том, что при одновременном стремлении к нулю параметров δ и $\varepsilon\delta^{-2}$ краевой эффект осесимметричного изгиба тонких упругих оболочек вращения развивается внутри зоны краевого эффекта «вырожденной» задачи о равновесии абсолютно гибкой (мягкой) оболочки.

1. К постановке задачи. Нелинейные дифференциальные уравнения осесимметричной деформации жестко защемленных оболочек вращения при равномерно распределенном давлении p можно записать в виде [2]:

$$Av - \frac{1}{2}u^2 + \theta u = 0, \quad \varepsilon^2 Au + uv - \theta v + \frac{1}{2}q\rho^2 = 0 \tag{1.1}$$

$$A(\ ) \equiv -\rho\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho(\ ), \quad u = \frac{dw}{d\rho}, \quad v = \frac{dF}{d\rho}, \quad \theta = \frac{dz}{d\rho}$$

$$\left|\frac{v}{\rho}, \frac{u}{\rho}\right|_{\rho=0} < \infty, \quad \left[\frac{dv}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho}v\right]_{\rho=1} = u|_{\rho=1} = F|_{\rho=1} = 0 \tag{1.2}$$

Все величины в (1.1), (1.2) безразмерные и связаны с размерными формулами

$$a\{\rho, w, z\} = \{\xi, W, Z\}, \quad Eh\{F, q\} = \left\{\frac{\Phi}{a^2}, pa\right\}, \quad \varepsilon^2 = \frac{h^2}{\gamma^2 a^2}$$

Здесь W — прогиб точек срединной поверхности Z, Φ — функция напряжений, E — модуль Юнга, ξ — переменный радиус и a — радиус опорного контура. Остальные обозначения были введены выше. Далее предполагается, что оболочка строго выпуклая ($-m\rho \leqslant \theta \leqslant -\alpha\rho$, $0 < \alpha < m$, α, $m = \mathrm{const}$). Для сферической оболочки имеем $\theta = -(a/R)\rho$ (R — радиус сферы). Функция $\theta(\rho)$ считается достаточно гладкой.

Рассматриваемые ниже малые значения $|q|$ охватывают широкий класс эксплуатационных нагрузок. При внешнем давлении (действующем со стороны выпуклости оболочки) $q > 0$, а при внутреннем давлении $q < 0$.

Важную роль в дальнейшем играет «вырожденная» задача о равновесии абсолютно гибкой (мягкой) оболочки. Соответствующие уравнения получаются из (1.1), (1.2) при $\varepsilon = 0$ и записываются в виде

$$\begin{gathered}Av_0 - \frac{1}{2}u_0^2 + \theta u_0 = 0, \quad (u_0 - \theta)v_0 + \frac{1}{2}q\rho^2 = 0, \quad u_0 = \frac{dw_0}{d\rho}\\ v_0 = \frac{dF_0}{d\rho}, \quad \left|\frac{v_0}{\rho}, \frac{u_0}{\rho}\right|_{\rho=0} < \infty,\\ \left[\frac{dv_0}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho}v_0\right]_{\rho=1} = w_0(1) = F_0(1) = 0\end{gathered} \tag{1.3}$$

Задача (1.3) имеет много решений [3, 4]. Однако механический смысл имеют так называемые положительные решения ($v_0 \geqslant 0$), которые отвечают равновесиям, не имеющим радиальных сжимающих напряжений [5]. Известно [3], что положительное решение существует и единственно, а в его окрестности при $\varepsilon \to 0$ имеется решение задачи (1.1), (1.2), для которого $v \geqslant 0$ (такие решения в [3] названы мембранными) и справедливы асимптотические разложения

$$\begin{gathered}v \sim \sum_{s=0}^{n+1} \varepsilon^s [v_s(\rho) + \varepsilon h_{s+1}(t)], \quad h_1 = 0\\ u \sim \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s [u_s(\rho) + g_s(t)], \quad t = \frac{1-\rho}{\varepsilon}\end{gathered} \tag{1.4}$$

Функции u_s, v_s получаются прямым разложением решения по степеням ε и определяются из краевых задач

$$\begin{gathered}Av_s - \frac{1}{2}\sum_{k+j=s} u_k u_j + \theta u_s = 0, \quad \sum_{k+j=s} u_k v_j - \theta v_s + Au_{s-2} = 0\\ \left|\frac{v_s}{\rho}\right|_{\rho=0} < \infty, \quad \left[\frac{dv_s}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho}v_s\right]_{\rho=1} = \left[\frac{dh_{s+1}}{dt} + \sigma h_s\right]_{t=0}, \quad s \geqslant 1.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Функции пограничного слоя h_s, g_s определяются из дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и выписываются в явном виде, если функции v_i, u_i при $i \leqslant s$ уже найдены (см. (3.6) — (3.9) в [3]).

Далее при $|q| \ll 1$ для положительного решения задачи (1.3), соответствующих решений задач (1.5) и, следовательно, для мембранного решения задачи (1.1), (1.2) асимптотическим методом пограничного слоя [6, 7] строятся простые асимптотические формулы. Отметим, что формально главные члены асимптотики при $q < 0$, $q \to 0$ для задачи (1.3) были получены ранее [1, 8—10].

При $q > 0$ оболочка сначала «выворачивается», после чего приложенная нагрузка работает на увеличение выпуклости оболочки и, как будет показано ниже, принимает форму равновесия, близкую к поверхности $(-Z)$, зеркально выпученной исходной поверхности оболочки относительно плоскости опорного контура. Это подтверждает гипотезу Погорелова А. В. о существовании таких форм равновесия (см. «принцип» A в [11]). Отметим, что при $|q| \to 0$ обоснование асимптотики мембранного решения при $\varepsilon \to 0$, вообще говоря, падает, так как постоянная в априорной оценке (4.9) в [3] неограниченно растет. Однако аналогичные рассмотрения при требовании одновременного стремления к нулю параметров δ и $\varepsilon\delta^{-2}$ позволяют перенести доказательство существования мембранного решения и обоснование его асимптотических разложений в [3] и на этот предельный случай.

2. Асимптотика положительного решения абсолютно гибкой оболочки при малых нагрузках. При $|q| \to 0$ задача (1.3) представляет собою сингулярно возмущенную задачу с малым параметром q при старшем операторе. В самом деле, полагая $q = \delta^2$, $v_0 = f\delta^2$, $u_0 = y$, из (1.3) при $q > 0$ получаем

$$\delta^2 Af - \frac{1}{2} y^2 + \theta y = 0, \quad (y - \theta) f + \frac{1}{2} \rho^2 = 0 \tag{2.1}$$

$$f = \frac{dF_0}{d\rho}, \quad y = \frac{dw_0}{d\rho}, \quad |f\rho^{-1}|_{\rho=0} < \infty$$

$$\left[\frac{df}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho} f\right]_{\rho=1} = 0, \quad w_0(1) = F_0(1) = 0, \quad 0 < \sigma < \frac{1}{2}$$

Асимптотические разложения положительного решения задачи (2.1) строятся при $\delta \to 0$ в виде

$$f \sim f_\delta^n = \sum_{k=0}^{n+1} \delta^k [f_k(\rho) + \psi_k(\tau)], \quad y \sim y_\delta^n = \sum_{k=0}^{n+1} \delta^k [y_k(\rho) + \varphi_k(\tau)] \tag{2.2}$$

где $\tau = (1 - \rho)/\delta$. Функции f_k, y_k получаются при помощи первого итерационного процесса [6, 7] прямым разложением решения по целым степеням параметра δ. Приравнивая нулю коэффициенты при δ^0, $\delta^1, \ldots$ $\ldots, \delta^n$, из (2.1) последовательно выводим

$$y_0 = 2\theta, \quad f_0 = -\frac{1}{2}\rho^2\theta^{-1}, \quad y_1 = f_1 = 0, \quad y_k = \theta^{-1}\Big[Af_{k-2} - \tag{2.3}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} y_i y_{k-i}\Big], \quad f_k = -\theta^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{k-1} y_i f_{k-i} + y_k f_0\Big] \quad (k \geqslant 2)$$

Этот же итерационный процесс дает еще одно семейство y_k, f_k ($y_0 = 0$, $f_0 = {}^1/_2\rho^2\theta^{-1}, \ldots$), которое далее не рассматривается, так как f_0 не удовлетворяет условию положительности.

Функции типа пограничного слоя ψ_k, φ_k получаются при помощи второго итерационного процесса [6, 7]. Именно формулы (2.2) подставляем в (2.1), учитываем (2.3), разлагаем функции f_k, y_k, θ в ряды Тейлора в точке $\rho = 1$, полагаем $\rho = 1 - \delta\tau$ и приравниваем последовательно коэффициенты при δ^0, $\delta^1, \ldots, \delta^n$. Для определения ψ_0, φ_0 получаем систему

$$\psi_0'' + \frac{1}{2}\varphi_0^2 + \theta_0\varphi_0 = 0, \quad f_{00}\varphi_0 + \psi_0\varphi_0 + \theta_0\psi_0 = 0, \quad (\ )' = d(\ )/d\tau \tag{2.4}$$

$$\psi_0'|_{\tau=0} = 0, \quad \psi_0|_{\tau=\delta^{-1}} = 0, \quad \theta_0 = \theta(1), \quad f_{00} = f_0(1)$$

$$\tau = (1 - \rho)/\delta$$

Очевидно, что $\varphi_0 = \psi_0 = 0$. С учетом этого факта для определения ψ_i, φ_i ($i \geqslant 1$) выводим

$$\psi_i'' - \alpha_0^2\psi_i = R_{i1} - \theta_0 R_{i2} f_{00}^{-1}, \quad \varphi_i = f_{00}^{-1}(R_{i2} - \theta_0\psi_i) \tag{2.5}$$

$$\alpha_0^2 = \frac{\theta_0^2}{f_{00}}, \quad R_{i1} = \tau\psi_{i-1}'' + \psi_{i-1}' + \sum_{j+m+2=i} \tau^j\psi_m -$$

$$-\sum_{m+r+p=i} \tau^r y_{mr}\varphi_p - \frac{1}{2}\sum_{m+p=i} \varphi_m\varphi_p + \sum_{m+p=i} \tau^m\theta_m\varphi_p$$

$$R_{i2}=\sum_{j=1}^{i-1}\varphi_j\psi_{i-j}+\sum_{m+r+p=i}\tau^r y_{mr}\psi_p-\sum_{m+r+p=i}\tau^r f_m\varphi_p-$$
$$-\sum_{m+p=i}\theta_m\tau^m\psi_p,\quad \psi_i'(0)=-\sigma\psi_{i-1}(0)+\left[\frac{df_{i-1}}{d\rho}-\sigma f_{i-1}\right]_{\rho=1}$$
$$\{\theta_l,y_{ml},f_{ml}\}=\frac{(-1)^l}{l!}\frac{d^l}{d\rho^l}\{\theta,y_m,f_m\}_{\rho=1},\qquad \psi_i\left(\frac{1}{\delta}\right)=0,\quad p\neq i$$

Здесь R_{i1}, R_{i2} — известные функции, если y_k, f_k, φ_k, ψ_k при $0\leqslant k\leqslant\leqslant i-1$ уже найдены. В частности, имеем $R_{11}=R_{12}=0$ и из (2.5) находим

(2.6) $$\psi_1=-f_{00}\theta_0^{-1}\varphi_1=C\exp(-\alpha_0\tau),\quad \alpha_0^2=-2\theta_0^3>0$$
$$C=2^{-1,5}(-\theta_0)^{-3,5}[(2-\sigma)\theta_0+\theta_1],\qquad \theta_1=-\left.\frac{d\theta}{d\rho}\right|_{\rho=1}$$

Очевидно, что ψ_i, φ_i — функции погранслоя нулевого порядка.

3. Обоснование асимптотических разложений (2.2). Для обоснования асимптотических разложений (2.1) применим метод, развитый в работах [3, 12—14]. Введем обозначения [14]

(3.1) $$f^*=f_\delta^n+\sum_{i=1}^{n+1}\delta^i\eta_i+\delta^{n+1}\gamma_2,\qquad y^*=y_\delta^n+\sum_{i=1}^{n+1}\delta^i\xi_i$$

где η_i, ξ_i — экспоненциального порядка малости по δ бесконечно дифференцируемые монотонные функции, причем $\eta_i(\rho)=-\psi_i(\delta^{-1})$, $\xi_i(\rho)=-\varphi_i(\delta^{-1})$ при $0\leqslant\rho\leqslant 0{,}1$ и $\eta_i(\rho)=\xi_i(\rho)=0$ при $0{,}2\leqslant\rho\leqslant 1$. Очевидно, что функции f^*, y^* удовлетворяют всем краевым условиям в (2.1) и имеют место оценки

(3.2) $$\max\left|\frac{d^\varkappa z}{d\rho^\varkappa}\right|<c_0\delta^{n+1},\qquad \varkappa=0,1,2$$

где $z=f_\delta^n-f^*$ или $z=y_\delta^n-y^*$. Здесь, как и всюду в п. 2, c_i — некоторые положительные постоянные, не зависящие от ρ и δ; максимум везде берется при $0\leqslant\rho\leqslant 1$.

Введем банаховы пространства функций: 1) пространство X вектор-функций $\mathbf{U}=\{F_0,w_0\}$ с компонентами $F_0\in C_4[0,1]$ и $w_0\in C_2[0,1]$, удовлетворяющими краевым условиям в (2.1) и нормой, определяемой равенством $\|\mathbf{U}\|_X=|F_0|_4+|w_0|_2$; 2) пространство Y вектор-функций $\mathbf{b}=\{b_1,b_2\}$ с компонентами b_1, $b_2\in C_0[0,1]$ и нормой, определяемой равенством $\|b\|_Y=|b_1|_0+|b_2|_0$. Пространства $C_k[0,1]$ образованы определенными на отрезке $[0,1]$ функциями, которые имеют непрерывные производные до порядка k включительно. Норма $|\cdot|_k$ в $C_k[0,1]$ определяется обычным образом.

Будем рассматривать задачу (2.1) как операторное уравнение $\mathbf{R}(\mathbf{U})=0$, где $\mathbf{U}=\{F_0,w_0\}$ — решение, а оператор $\mathbf{R}$ определяется левой частью системы (2.1) и действует из пространства X в пространство Y.

Согласно [3, 12—14], для обоснования асимптотики надо доказать, что при $\delta\to 0$ выполняется неравенство

(3.3) $$\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^*)\|_Y\,\|\,[\mathbf{R}'_{\mathbf{U}^*}]^{-1}\|^2_{(Y\to X)}\,\|\mathbf{R}''\|_{(X\to(X\to Y))}<\frac{1}{2}$$

где $\mathbf{U}^* = \{F_0^*, w_0^*\}$ — построенные асимптотические разложения (3.1), $\mathbf{R}'_{\mathbf{U}^*}$ — производная Фреше на элементе $\mathbf{U}^*$ и $\mathbf{R}''$ — вторая производная оператора $\mathbf{R}$.

Лемма 3.1. Пусть $\delta \to 0$ и $-m\rho \leqslant \theta \leqslant -\alpha\rho$, $0 < \alpha < m$, α, $m = \mathrm{const}$. Тогда имеют место оценки

$$f^* \geqslant \frac{1}{4\alpha}\rho, \quad \max|\rho^{-1}(y^* - \theta)| \leqslant m + 1 = m_0 \tag{3.4}$$

Доказательство. Учитывая неравенства

$$\max\left|\frac{\psi_i + \eta_i}{\rho}\right| \leqslant \max\left|\frac{d\psi_i}{d\rho}\right|, \quad \max\left|\frac{\varphi_i + \xi_i}{\rho}\right| \leqslant \max\left|\frac{d\varphi_i}{d\rho}\right|$$

перепишем f^* и y^* в виде

$$f^* = -\frac{1}{2}\rho^2\theta^{-1} + \delta(\psi_1 + \eta_1) + O(\rho\delta^2), \quad y^* = 2\theta + \delta(\varphi_1 + \xi_1) + O(\rho\delta^2)$$

Отсюда в силу условия леммы при $\delta \to 0$ выводим (3.4).

Лемма 3.2. Пусть выполняются условия леммы 3.1. Тогда имеют место оценки

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^*)\|_Y \leqslant c_1\delta^{n+1}, \quad \|\mathbf{R}''\| < c_3 \tag{3.5}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.2, 2.3 в [14] и оценки (4.17) в [3].

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия леммы 3.1. Тогда имеет место оценка

$$\|[\mathbf{R}'_{\mathbf{U}^*}]^{-1}\|_{(Y\to X)} \leqslant c_2\delta^{-6} \tag{3.6}$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений с краевыми условиями

$$\mathbf{R}_{\mathbf{U}^*}'(\mathbf{U}) = \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2), \quad \mathbf{U} = (F, w) \tag{3.7}$$

$$\mathbf{R}'_{\mathbf{U}^*} = \left\{\delta^2\nabla^4 F + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}[u(y^* - \theta)], \quad -\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}[f^*u + v(y^* - \theta)]\right\}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{d}{d\rho}, \quad v = \frac{dF}{d\rho}, \quad u = \frac{dw}{d\rho}$$

$$\left|\frac{v}{\rho}, \frac{u}{\rho}\right|_{\rho=0} < \infty, \quad \left[\frac{dv}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho}v\right]_{\rho=1} = w(1) = F(1) = 0$$

Умножая в (3.7) первое уравнение на ρF, второе уравнение на ρw, складывая полученные выражения и интегрируя от 0 до 1, с учетом краевых условий выводим

$$\delta^2\int_0^1\left[\rho\left(\frac{dv}{d\rho}\right)^2 + \frac{v^2}{\rho}\right]d\rho - \delta^2\sigma v^2(1) + \int_0^1 f^*u^2\,d\rho = \int_0^1(b_1F + b_2w)\rho\,d\rho \tag{3.8}$$

Далее, учитывая, что $F(1) = w(1) = 0$, находим простые неравенства

$$\int_0^1\rho F^2\,d\rho \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1\frac{v^2}{\rho}\,d\rho, \quad \int_0^1\rho w^2\,d\rho \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1\rho\left(\frac{dw}{d\rho}\right)^2 d\rho \tag{3.9}$$

Теперь при помощи (3.4), (3.9) и неравенства Коши — Буняковского из (3.8) последовательно получаем

$$\delta^2(1-\sigma)\|v\|_H^2 + \frac{1}{4\alpha}\|u\|_\rho^2 \leqslant \|b_1\|_\rho\|F\|_\rho + \tag{3.10}$$

$$+ \|b_2\|_\rho\|w\|_\rho \leqslant 2^{-1/2}(\|b_1\|_\rho\|v\|_H + \|b_2\|_\rho\|u\|_\rho)$$

$$\|v\|_H^2 = \int_0^1\left[\rho\left(\frac{dv}{d\rho}\right)^2 + \frac{v^2}{\rho}\right]d\rho, \quad \|v\|_\rho^2 = \int_0^1\rho v^2\,d\rho$$

Отсюда непосредственно вытекают оценки

$$(3.11)\qquad \| v \|_H + \| u \|_\rho \leqslant c_4\delta^{-2} (\| b_1 \|_\rho + \| b_2 \|_\rho)$$

$$\max | v | \leqslant c_4\delta^{-2} \| \mathbf{b} \|_Y, \quad c_4 = \sqrt{2}\,(1-\sigma)^{-1}, \quad \delta^2 < [4\alpha\,(1-\sigma)]^{-1}$$

Интегрируя (3.7) от 0 до ρ, имеем

$$(3.12)\qquad \delta^2 A v - u\,(y^* - \theta) = B_1, \quad f^* u + v\,(y^* - \theta) = B_2$$

$$B_1 = -\int_0^\rho t b_1\,dt, \qquad B_2 = -\int_0^\rho t b_2\,dt, \qquad \left| \frac{v}{\rho}, \frac{u}{\rho} \right|_{\rho=0} < \infty,$$

$$\left[\frac{dv}{d\rho} - \sigma v \right]_{\rho=1} = 0$$

Применяя (3.4) и (3.11), из второго уравнения выводим

$$(3.13)\qquad \max | u | \leqslant c_5\delta^{-2} \| b \|_Y, \quad c_5 = 4\alpha\,(c_4 m_0 + 1)$$

Перейдем от первого уравнения в (3.12) к эквивалентному интегральному уравнению

$$(3.14)\qquad \delta^2 v = \frac{1}{\rho}\,\Phi\,(\rho, 1) + \rho\,\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\,\Phi\,(1,1)$$

$$\Phi\,(\rho, t) = \int_0^\rho \eta\,d\eta \int_\eta^t B_3 \xi^{-1}\,d\xi, \qquad B_3 = B_1 + u\,(y^* - \theta)$$

Дифференцируя (3.14) дважды по ρ, получаем

$$(3.15)\qquad \delta^2\,\frac{dv}{d\rho} = \int_\rho^1 B_3 \xi^{-1}\,d\xi - \frac{1}{\rho^2}\,\Phi\,(\rho, 1) + \frac{1+\sigma}{1-\sigma}\,\Phi\,(1, 1)$$

$$\delta^2\,\frac{d^2 v}{d\rho^2} = -B_3\rho^{-1} + 2\rho^{-3}\Phi\,(\rho, \rho)$$

Из первого уравнения в (3.15) находим оценку

$$(3.16)\qquad \max \left| \frac{dv}{d\rho} \right| \leqslant c_6\delta^{-4} \| \mathbf{b} \|_Y, \qquad c_6 = \frac{3}{2}\,(1 + c_5 m_0)$$

Далее разделим на f^* второе уравнение в (3.12) и продифференцируем по ρ полученное выражение. Затем, применяя (3.4), (3.9), (3.14) и (3.16), а также неравенства

$$\max \left| \frac{df^*}{d\rho} \right| + \max \left| \frac{d}{d\rho}\,(\theta - y^*) \right| \leqslant c_7, \qquad m_0 \leqslant c_7$$

выводим оценки

$$(3.17)\qquad \max \left| \frac{du}{d\rho} \right| \leqslant c_8\delta^{-4} \| \mathbf{b} \|_Y, \qquad c_8 = 4\alpha c_7\,[1 + c_6 + c_7 + 4\alpha c_6 c_7]$$

При помощи (3.17) и неравенства треугольника из второго уравнения в (3.15) имеем

$$(3.18)\qquad \max \left| \rho^{-1}\,\frac{d^2 v}{d\rho^2} \right| \leqslant c_9\delta^{-6} \| \mathbf{b} \|_Y, \qquad c_9 = \frac{3}{2}\,m_0 c_8 + 1$$

Наконец, получим оценку

$$(3.19)\qquad \max \left| \frac{d^3 v}{d\rho^3} \right| \leqslant c_{10}\delta^{-6} \| \mathbf{b} \|_Y, \qquad c_{10} = c_9 + 2c_7 c_8 + c_{11} + 1$$

где $c_{11} = 1 + m_0 c_8$. Для этого из (3.15) найдем

$$\delta^2\,\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left(\frac{v}{\rho}\right) = -2\rho^{-4}\Phi\,(\rho, \rho)$$

Отсюда при помощи (3.4) и (3.18) выводим

$$\max\left|\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{v}{\rho}\right)\right| \leqslant c_{11}\delta^{-6}\|\mathbf{b}\|_Y \tag{3.20}$$

Далее продифференцируем по ρ первое уравнение в (3.12) и, используя неравенство треугольника, а также оценки (3.4), (3.17), (3.18), (3.20), приходим к (3.19). Теперь оценка (3.6) вытекает из (3.11), (3.13), (3.16) — (3.20), причем $c_2 = 2c_6 + c_9 + c_{10}$.

Теорема 3.2. Пусть выполняются условия леммы 3.1. Тогда существует такое q_1, что при $0 < q < q_1$ задача (2.1) имеет единственное положительное решение, для которого справедливы асимптотические разложения (2.2) и имеют место оценки

$$\begin{gathered}\max|f - f_\delta^k| + \max|y - y_\delta^k| \leqslant c_{12}\delta^{k+2}, \quad q = \delta^2 \\ \max\left|\frac{d}{d\rho}(f - f_\delta^k)\right| + \max\left|\frac{d}{d\rho}(y - y_\delta^k)\right| \leqslant c_{13}\delta^{k+1}, \quad k \geqslant 0\end{gathered} \tag{3.21}$$

Доказательство проводится при помощи теоремы 3.2 в [13].

Неравенство (3.3) выполняется, если в разложениях (3.1) q достаточно мало $(0 < q < q_1)$ и $n > 11$. При помощи (2.2), (3.1), (3.2) из (3.20) в [13] находим

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}^*\|_Y \leqslant c_{12}\delta^{n-3} \quad (n > 3) \tag{3.22}$$

Отсюда при помощи неравенства треугольника и теорем вложения приходим к (3.21).

4. Построение главных членов асимптотических разложений (1.4) при $q \to 0$. Краевые задачи (1.5) представляют собой сингулярно возмущенные системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром $|q|$ при старшем операторе и с переменными коэффициентами, содержащими функции типа погранслоя. В самом деле, при помощи замен переменных $q = \delta^2$:

$$\begin{gathered}v_s = \delta^{2-2s}\nu_s, \quad u_s = \delta^{-2s}\omega_s, \quad \nu_0 = f, \ \omega_0 = y \\ \frac{d^\varkappa h_{s+2}}{dt^\varkappa} = \delta^{\varkappa-2s-2}\frac{d^\varkappa \overset{\circ}{h}_{s+2}}{dt^\varkappa}, \quad \frac{d^\varkappa g_s}{dt^\varkappa} = \delta^{\varkappa-2s}\frac{d^\varkappa \overset{\circ}{g}_s}{dt^\varkappa}, \quad q > 0\end{gathered} \tag{4.1}$$

для $\varkappa = 0, 1, 2$ из (1.5) получаем

$$\begin{gathered}\delta^2 A\nu_s - \frac{1}{2}\sum_{k+j=s}\omega_k\omega_j + \theta\omega_s = 0, \quad s \geqslant 1 \\ \sum_{k+j=s}\nu_k\omega_j - \theta\nu_s + \delta^4 A\omega_{s-2} = 0, \quad \omega_{-1} = 0 \\ \left|\frac{\nu_s}{\rho}\right|_{\rho=0} < \infty, \quad \left[\frac{d\nu_s}{d\rho} - \sigma\nu_s\right]_{\rho=1} = \delta^{-1}\left[\frac{dh_{s+1}^0}{dt} + \delta\sigma h_s^0\right]_{t=0}\end{gathered} \tag{4.2}$$

Функции ν_i, ω_i находятся последовательно и при $i < s$ считаются известными, причем ν_0, ω_0 определяются формулами (2.2). Асимптотические разложения краевых задач (4.2) строятся при $\delta \to 0$ в виде

$$\begin{gathered}\nu_s \sim \sum_{k=0}^{n_s}\delta^k[\nu_{sk}(\rho) + \Pi_k\nu_s(\tau)] \\ \omega_s \sim \sum_{k=0}^{n_s}\delta^k[\omega_{sk}(\rho) + \Pi_k\omega_s(\tau)], \quad \tau = (1-\rho)/\delta\end{gathered} \tag{4.3}$$

Функции ν_{sk}, ω_{sk} получаются прямым разложением решения (ν_s, ω_s) по степеням δ и определяются из простых алгебраических уравнений

$$(4.4)\qquad \theta\omega_{s0} - \sum_{k+j=s} \omega_{k0}\omega_{j0} = 0, \quad \sum_{k+j=s} \nu_{k0}\omega_{j0} - \theta\nu_{s0} = 0$$

$$A\nu_{s,\, l-2} - \frac{1}{2} \sum_{k+j=s} \sum_{m+i=l} \omega_{km}\omega_{ji} + \theta\omega_{sl} = 0$$

$$\sum_{k+j=s} \sum_{m+i=l} \omega_{km}\nu_{ji} - \theta\nu_{sl} + A\omega_{s-2,\, k-4} = 0, \qquad s, l \geqslant 1$$

$$q = -1, -2; k, \ m, j, i \geqslant 0; \quad \omega_{k,p} = \nu_{s,q} = 0, p = -1, -2, -3$$

Функции погранслоя $\Pi_i\nu_s$, $\Pi_i\omega_s$ строятся при помощи второго итерационного процесса [7]. Для их определения получаются уравнения вида (2.5) с правыми частями, зависящими от $\Pi_j\nu_s$, $\Pi_j\omega_s$ при $j < i$, от $\Pi_k\nu_m$, $\Pi_k\omega_m$ при $m < s$, а также от коэффициентов разложений в ряды Тейлора при $\rho = 1$ функций ν_{js}, ω_{js} и т. д.

Ограничиваясь главными членами асимптотических разложений (2.2), (4.2), при помощи (2.3)—(2.6), а также формул (3.6)—(3.9) в [3], для мембранного решения при одновременном стремлении к нулю параметров δ и $\varepsilon\delta^{-2}$ из (1.4) при $n = 1$ в случае $q > 0$ имеем

$$(4.5)\qquad v \sim v_{\varepsilon,\delta} = v_0(\rho, \tau) + \varepsilon v_1(\rho, \tau) + \varepsilon^2 h_2(t), \quad t = (1-\rho)/\varepsilon$$

$$u \sim u_{\varepsilon,\delta} = u_0(\rho, \tau) + g_0(t) + \varepsilon\,[u_1(\rho, \tau) + g_1(t)]$$

$$v_0 = \delta^2 \left[-\frac{1}{2}\rho^2\theta^{-1} + \delta C \exp(-\alpha_0\tau) + O(\delta^2) \right], \qquad \tau = (1-\rho)/\delta$$

$$u_0 = 2\theta + 2\delta C\theta_0^2 \exp(-\alpha_0\tau) + O(\delta^2), \quad \theta_0 = \theta(1)$$

$$\alpha_0^2 = \theta_0^2 f_{00}^{-1} = -2\theta_0^3 [1 + O(\delta)], \quad g_0(t) = -u_0(1)K =$$

$$= -2\theta_0 [1 + 2C\delta\theta_0 + O(\delta^2)]\, K$$

$$K = \exp[-t\sqrt{v_0(1)}] = \exp[-\delta t a], \quad a = [-{}^1/_2\theta_0^{-1} + C\delta +$$

$$+ O(\delta^2)]^{1/2}, \quad h_2(t) = \frac{u_0(1)}{v_0(1)} K \left[u_0(1) - \theta(1) - \frac{1}{8} u_0(1)\, K \right] =$$

$$= -4\delta^{-2}\theta_0^3 (1 - {}^1/_4 \exp(-\delta a t)) \exp(-\delta a t)\, [1 + O(\delta)]$$

$$v_1 = \theta_0 \exp(-\alpha_0\tau)\, [1 + O(\delta)], \quad u_1 = 2\theta_0^3\delta^{-2} \exp(-\alpha_0\tau) \times$$

$$\times [1 + O(\delta)], \quad g_1(t) = -2\theta_0^3\delta^{-2} \exp(-a\delta t) \times$$

$$\times [1 + \delta t(-2\theta_0)^{-1/2} + O(\delta)]$$

$$C = 2^{-1,5}(-\theta_0)^{-3,5} [(2-\sigma)\theta_0 + \theta_1], \quad \theta_1 = -\left.\frac{d\theta}{d\rho}\right|_{\rho=1}$$

(в формуле для $h_2(t)$ в [3] содержатся описки, которые здесь устранены). Заметим, что $\nu_{1k} = \omega_{1k} = 0$ для всех k. Кроме того, можно установить, что функции g_s°, h_{s+2} из (4.1) состоят из слагаемых вида $t^m \exp(-h\delta a t)$, где m и n — целые числа ($0 \leqslant m \leqslant s+1$, $1 \leqslant n \leqslant s+1$). Коэффициенты перед этими слагаемыми разлагаются в ряды по целым степеням δ, причем имеют место оценки

$$(4.6)\qquad \frac{d^\varkappa \overset{\circ}{h}_{s+2}}{dt^\varkappa} = O(1), \quad \frac{d^\varkappa \overset{\circ}{g}_s}{dt^\varkappa} = O(1), \quad \varkappa = 0, 1, 2$$

Теорема 4.1. Пусть одновременно выполняются условия $\delta \ll 1$, $\varepsilon\delta^{-2} \ll 1$ и $(\varepsilon\delta^{-2})^{n+1}\varepsilon^{-4} \to 0$ $(n \geqslant 1)$.

Тогда существует мембранное решение задачи (1.1), (1.2), для которого справедливы асимптотические формулы (4.5) и имеют место оценки

$$\max|\delta^{-2}(v-v_{\varepsilon,\delta})|+\max|u-u_{\varepsilon,\delta}|<m_1(\varepsilon\delta^{-2})^2 \tag{4.7}$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 4.1 в [3]. Оценки (4.13), (4.17) в [3] сохраняются, а вместо оценки (4.9) при тех же обозначениях выводим

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{V}_k^*)\|_{L_\rho}<m_*(\varepsilon\delta^{-2})^{k+1}\quad(\delta\to 0,\ \varepsilon\delta^{-2}\to 0) \tag{4.8}$$

где m_* — положительная постоянная, не зависящая от δ и ε. При $(\varepsilon/\delta^2)^{n+1}\varepsilon^{-4}\to 0$ ($n\gg 1$, т. е. в области, несколько меньшей чем $\varepsilon/\delta^2\ll 1$) получаем, что все условия теоремы 4.2 в [3] выполняются. Из этой теоремы вытекает существование мембранного решения и обоснование асимптотических разложений (1.4). Оценки (4.5) выводятся аналогично [13] при помощи неравенства треугольника.

При действии внутреннего давления ($q<0$) асимптотические разложения мембранного решения и их обоснование проводятся так же, как и при $q>0$. Для положительного решения задачи (1.3) при $\delta^2=-q\to 0$ имеем асимптотические разложения (2.2)—(2.5), в которых надо положить $y_0=0$, заменить θ на $(-\theta)$ в (2.3) и θ_0 на $(-\theta_0)$ в (2.4), (2.5). Ограничиваясь только главными членами асимптотики для мембранного решения при $|q|\to 0$, $\varepsilon/|q|\to 0$, получаем асимптотические формулы (4.5), но с заменой u_0, g_0, h_2, v_1, u_1, g_1 соответственно на следующие выражения:

$$\begin{aligned}
&u_0=-2\delta\theta_0^2C\exp(-\alpha_0\tau)+O(\delta^2),\quad \tau=(1-\rho)/\delta\\
&g_0(t)=\delta\exp(-\delta at)[2C\theta_0^2+O(\delta)]\\
&h_2(t)=2C\theta_0^3a^{-2}\delta^{-1}\exp(-\delta at)[1+O(\delta)]\\
&v_1(\rho,\tau)=\delta\,\alpha_0^{-1}[(2-\sigma)\theta_0+\theta_1]\exp(-\alpha_0\tau)[1+O(\delta)]\\
&u_1(\rho,\tau)=-2\theta^2\alpha_0^{-1}\delta^{-1}[(2-\sigma)\theta_0+\theta_1]\exp(-\alpha_0\tau)[1+O(\delta)]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

5. Тонкая пологая оболочка в форме эллиптического параболоида при равномерном внутреннем давлении. Вторичный краевой эффект может иметь место для строго выпуклых упругих оболочек при неподвижном закреплении края. В качестве примера рассмотрим оболочку с начальной формой в виде тонкого эллиптического параболоида при равномерном внутреннем давлении. Соответствующие уравнения в безразмерных переменных записываются в виде

$$\begin{aligned}
&\Delta^2F+\frac{1}{2}[w,w]-[z,w]=0,\quad \varepsilon^2\Delta^2w-[w-z,F]+q=0\\
&\Delta F=F_{xx}+F_{yy},\quad [w,F]=w_{xx}F_{yy}+w_{yy}F_{xx}-2w_{xy}F_{xy}\\
&z=1-{}^1/_2(k_1x^2+k_2y^2),\quad q>0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь k_1, k_2 — положительные постоянные величины. При жестком защемлении оболочки на контуре

$$\Gamma\equiv\{x=\sqrt{2/k_1}\cos\varphi,\ y=\sqrt{2/k_2}\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$$

имеем краевые условия [15]:

$$(5.2)\qquad w = w_\rho = 0,\quad \Gamma_2 F \equiv F_{\rho\rho} - \sigma F_{ss} + \varkappa\sigma F_\rho = 0$$

$$\Gamma_3 F \equiv F_{\rho\rho\rho} + (2+\sigma) F_{\rho ss} + 3\varkappa F_{ss} + (2+\sigma)\varkappa_s F_s - \varkappa^2 \times$$

$$\times (1-\sigma) F_\rho = 0$$

(ρ, s, $\varkappa$ — соответственно внутренняя нормаль, длина дуги, кривизна Г). «Вырожденная» задача при $\varepsilon = 0$ о равновесии абсолютно гибкой оболочки записывается в виде системы уравнений с нелинейными краевыми условиями [1]

$$(5.3)\qquad \Delta^2 F_0 + {}^1/_2 [w_0, w_0] - [z, w_0] = 0,\quad [w_0 - z, F_0] = q$$

$$w_0|_\Gamma = 0,\quad \Gamma_2 F_0 = 0,\quad \Gamma_3 F_0 = \varkappa\,({}^1/_2 w_{0\rho} - z_\rho) w_{0\rho}|_\Gamma$$

Для краевой задачи (5.3) механический смысл имеют так называемые положительные решения, удовлетворяющие всюду в $D + \Gamma$ условиям [5, 16, 17]

$$(5.4)\qquad F_{0xx} \geqslant 0,\quad F_{0yy} \geqslant 0,\quad F_{0xx}F_{0yy} - F_{0xy}^2 \geqslant 0$$

где D — область, которую оболочка занимает в плане.

Введенные в п. 1 положительные решения для осесимметричных равновесий удовлетворяют условиям (5.4) лишь при выполнении дополнительного неравенства $dv_0/dr \geqslant 0$ при $r \in [0, 1]$.

Тогда при $q \to 0$ для положительного решения задачи (5.3) строятся асимптотические представления

$$(5.5)\qquad F_0^q \approx q\,[f(x, y) + q\psi_1(\tau, \varphi)],\quad w_0^q \approx q\,[(\sigma^2 - 1)\,K + \beta_1(\tau, \varphi)]$$

$$f = {}^1/_2 K\,[(k_2 + \sigma k_1)x^2 + (k_1 + \sigma k_2)y^2],\quad \tau = \rho/\sqrt{q}$$

$$K = (k_1^2 + k_2^2 + 2\sigma k_1 k_2)^{-1},\quad \beta_1 = -T_n\,(\varkappa c)^{-1}\psi_1 =$$

$$= (\varkappa c)^{-1} \exp(-\alpha\tau)\Gamma_2 f,\quad c = z_\rho|_\Gamma,\quad \alpha = \varkappa c T_n^{-1/2} > 0$$

$$\varkappa c = k_1 k_2 b_0 > 0,\quad T_n = K b_0\,(k_2^2 \sin^2\varphi + k_1^2 \cos^2\varphi + \sigma k_1 k_2)$$

$$b_0 = (k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi)^{-1},\quad \Gamma_2 f = (1 - \sigma^2) b_0 k_1 k_2 K.$$

Теорема 5.1. Пусть $0{,}5 \leqslant k_1 k_2^{-1} \leqslant 2$ и $q \to 0$. Тогда существует такое q_1, что при $0 < q < q_1$ задача (5.3) имеет единственное положительное решение (F_*, w_*), для которого справедливы асимптотические представления (5.5) и при $j = 0, 1, 2$ имеют место оценки

$$\max\,[|D^j(w_* - w_0^q)| + |D^j(F_* - F_0^q)|] \leqslant m_1 q^{(3-j)/2}$$

где m_1 — некоторая положительная постоянная, не зависящая от q и D^j — производная порядка j.

Доказательство теоремы опускается и будет приведено в другом месте. Выполнение неравенств (5.4) для F_0^q в условиях теоремы устанавливается непосредственными расчетами.

Используя в уравнениях (5.1) наличие второго малого параметра ε^2 и применяя метод пограничного слоя по схеме [17], получаем, что в ок-

---

[1] См. *Срубщик Л. С.* Краевой эффект при изгибании абсолютно гибких оболочек. Ростов-на-Дону.— Деп. в ВИНИТИ, 14.XII.1979; № 4265—79. 46 с.

рестности положительного решения (5.5) при одновременном стремлении к нулю параметров q и εq^{-1} задача (5.1), (5.2) имеет решение, для которого справедливы простые асимптотические формулы

$$(5.6)\qquad F \approx F_0^q(x, y) + \varepsilon^3 h_2(t, \varphi), \quad w \approx w_0^q(x, y) + \varepsilon g_0(t, \varphi)$$

$$g_0 = a_1 m^{-1} \exp(-\rho m/\varepsilon), \quad \partial^2 h_2/\partial t^2 =$$

$$= \varkappa a_1 m^{-1} [(a_1 - c)\exp(-\rho m/\varepsilon) - {}^1/_4 a_1 \exp(-2\rho m/\varepsilon)]$$

$$m = \sqrt{N}, \quad a_1 = \frac{\partial w_0}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=0}, \quad c = \frac{\partial z}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=0}$$

$$N = [F_{0ss} - \varkappa F_{0\rho}]_\Gamma > 0, \quad t = \rho/\varepsilon$$

Решение (5.6) отвечает равновесию с только растягивающими усилиями, и для него имеет место явление вторичного краевого эффекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Reissner E.* The edge effect in symmetric bending of shallow shells of revolution.— Commun. Pure and Appl. Math., 1959, v. 12, No. 2, p. 385.
2. *Феодосьев В. И.* Упругие элементы точного приборостроения. М.: Оборонгиз, 1949. 344 с.
3. *Срубщик Л. С., Юдович В. И.* Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба симметрично загруженных оболочек вращения.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 5, с. 913—922.
4. *Bauer L., Callegari A. J., Reiss E. L.* On the collapse of shallow elastic membranes.— In: Nonlinear elasticity. New York — London: Acad. Press, 1973, p. 1—30.
5. *Алексеев С. А.* Расчет круглой упругой мембраны под равномерной поперечной нагрузкой.— Инж. сб., 1959, т. 25, с. 64—80.
6. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений.— Докл. АН СССР, 1958, т. 121, № 5, с. 778—781.
7. *Васильева А. Б.* Асимптотика решений некоторых краевых задач для уравнений с малым параметром при старшей производной. — Докл. АН СССР, 1960, т. 135, вып. 6, с. 1303—1306.
8. *Bromberg E., Stoker J. J.* Nonlinear theory of curved elastic sheets.— Quart. Appl. Math., 1945, v. 3, p. 246—265.
9. *Работнов Ю. Н.* Некоторые решения безмоментной теории оболочек.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 5—6, с. 639—646.
10. *Усюкин В. И.* Деформации мембранных оболочек вращения.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 2, с. 134—140.
11. *Погорелов А. В.* Геометрическая теория устойчивости оболочек. М.: Наука, 1966. 296 с.
12. *Срубщик Л. С., Юдович В. И.* Об асимптотическом интегрировании уравнения равновесия жидкости с поверхностным натяжением в сильном поле тяжести.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6, с. 1127—1133.
13. *Срубщик Л. С.* Нежесткость сферической оболочки.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 4, с. 723—729.
14. *Срубщик Л. С.* Докритическое равновесие тонкой пологой оболочки вращения и его устойчивость.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 2, с. 327—337.
15. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 432 с.
16. *Алексеев С. А.* Основы общей теории мягких оболочек.— В кн.: Расчет пространственных конструкций. Вып. 11. М.: Госстройиздат, 1967, с. 31—52.
17. *Срубщик Л. С.* Об асимптотическом интегрировании системы нелинейных уравнений теории пластин.— ПММ, 1964, т. 29, вып. 2, с. 335—349.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 27.XI.1980