Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 539.3

ПРИМЕР СТОХАСТИЧЕСКОЙ БИФУРКАЦИИ В ТЕОРИИ ИЗГИБА НЕИДЕАЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Волков С. И.

Исследуется устойчивость на изгиб тонких прямоугольных (в плане) шарнирно-опертых пластин, начальные отклонения срединной поверхности от идеальной формы которых образуют ансамбль с квазигауссовской вероятностной мерой, а полный прогиб описывается уравнениями типа Кармана [1]. Предполагаются заданными внешние нормальные усилия и перемещения точек контура срединной поверхности. Применяется функциональный метод [1], идея которого заключается в следующем: на множестве возможных форм изгиба конструируется индуцируемое вероятностной мерой начальных прогибов и оператором задачи обобщение плотности вероятности — функционал вероятности; неустойчивость связывается с ветвлениями мод этого функционала. Используются дополнительные предположения о малости дисперсии и корреляционных масштабов начальных прогибов. В рамках метода Галеркина определяются малые решения уравнения на экстремали функционала вероятности. Выводятся простые соотношения, из которых могут быть найдены значения нагрузок, соответствующие моментам ответвления этих решений от тривиального решения. Показывается, что до момента первого ветвления тривиальная экстремаль является единственной модой функционала вероятности. Начиная с указанного момента, функционал вероятности достигает максимумов на иных — ответвившихся от тривиальной — экстремалях. Эти экстремали принимаются за основные формы потери устойчивости.

1. Рассмотрим тонкую упругую пластинку со случайными начальными отклонениями срединной поверхности от идеальной формы. Предположим, что в любой момент нагружения шарнирно-опертые кромки пластинки находятся в плоскости опорного контура. Пусть пластинка занимает (в плане) в R^2 прямоугольную область D с длинами сторон a и b. Направим координатные оси Ox, Oy вдоль этих сторон.

Рассмотрим применительно к пластинкам вариант нелинейной теории оболочек, основанный на гипотезе Кирхгофа — Лява [1]. Граничные условия, отвечающие этому варианту, включают в себя условия на внешние усилия и перемещения точек контура срединной поверхности. Предположим, что пластинка сжимается внешним усилием $p > 0$, направленным вдоль оси Ox. Перемещения точек контура срединной поверхности по прямым $x = 0, a$ зададим в виде линейной функции координаты y с угловым коэффициентом $\mu\,(p/E)$, а перемещения точек этого контура по прямым $y = 0, b$ — в виде линейной функции координаты x с угловым коэффициентом $-p/E$ (μ — коэффициент Пуассона, E — модуль упругости).

[1] *Волков С. И.* Ветвление экстремалей функционала вероятности и устойчивость нелинейного упругого стержня со случайными несовершенствами формы. Новосибирск.— Деп. в ВИНИТИ, 23.I.1979; № 268—79, 22 с.

Представим функцию напряжений в срединной поверхности в виде разности

$$\Phi_0(x, y) = \Phi_1(x, y) - px^2/2 \tag{1.1}$$

Принятым граничным условиям на усилия и перемещения соответствует обращение на ∂D в нуль функции Φ_1 и ее вторых производных по внутренней нормали ρ к ∂D (здесь ∂D — граница области D). Исключим функцию напряжений (1.1) из уравнений типа Кармана для пластинки с начальным прогибом $\omega_0(r) = \omega_0(x, y)$ [1].

Получим для функции полного прогиба $\omega(r) = \omega(x, y)$:

$$N[r; \omega, \omega_0]\,\omega(r) = \Delta^2\omega_0(r) \tag{1.2}$$

$$N[r; \omega, \omega_0]\,\varphi(r) = \left(\Delta^2 + \frac{hp}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi(r) + $$
$$+ \frac{hE}{d}\{[\varphi(r), \Phi[r; \omega] - \Phi[r; \omega_0]]\}$$
$$\Phi[r; u] = \int\limits_D dr_1 g(r, r_1)[u(r_1), u(r_1)]$$
$$[u(r), \varphi(r)] = u_{xx}\varphi_{yy} + u_{yy}\varphi_{xx} - 2u_{xy}\varphi_{xy}$$

Здесь $N[r; \omega, \omega_0]$ — нелинейный оператор, Δ^2 — бигармонический оператор, $g(r, r_1)$ — ядро оператора Грина, обратного к Δ^2 в D при граничных условиях, аналогичных краевым условиям для Φ_1, $dr = dxdy$ — элемент площади на D; h — толщина пластинки, d — цилиндрическая жесткость; запись $F[r; u]$ означает, что величина F является функцией координат x, y и функционалом поля $u(r) = u(x, y)$.

Пусть вероятностная мера начальных прогибов ω_0 подобна гауссовской мере в смысле представления высших корреляционных моментов через низшие. Предположим, что случайное поле $\omega_0(r)$ имеет нулевое среднее значение, малую дисперсию и малые корреляционные масштабы, соотнесенные друг с другом таким образом, что выполняется требование о пологости в среднеквадратическом начальной срединной поверхности. Тогда из неравенства Чебышева имеем по вероятности

$$\Phi[r; \omega_0] \approx \langle\Phi[r; \omega_0]\rangle \tag{1.3}$$

Угловые скобки означают здесь усреднение по ансамблю реализаций начальных прогибов ω_0.

Заменим во второй формуле (1.2) функцию $\Phi[r; \omega_0]$ ее приближенным по (1.3) значением. Получим выражение, определяющее квазиэргодическую аппроксимацию оператора $N[r; \omega, \omega_0]$. Обозначим эту аппроксимацию через $N[r, \omega]$. Первое уравнение (1.2) для полных прогибов ω приобретает после замены $N[r; \omega, \omega_0]$ на $N[r; \omega]$ вид уравнения со стохастическим источником в правой части

$$N[r; \omega]\,\omega(r) = \Delta^2\omega_0(r) \tag{1.4}$$

Дополним это уравнение вытекающими из предположения о шарнирном опирании пластинки граничными условиями на контуре ∂D

$$\omega = \partial^2\omega/\partial\rho^2 = 0 \tag{1.5}$$

Исследование стохастической устойчивости рассматриваемых здесь неидеальных пластин проведем используя нелинейное уравнение (1.4) с граничными условиями (1.5).

2. Пусть $\omega\,[r;\ \omega_0]$ — функционально зависящее от конкретной реализации начальной погиби $\omega_0\,(r)$ решение задачи (1.4), (1.5).

Введем характеристический функционал

$$\Psi\,[\theta] = \left\langle \exp\left(i \int\limits_D dr\omega\,[r;\ \omega_0]\,\theta\,(r)\right)\right\rangle \tag{2.1}$$

и функционал линейного отклика

$$G\,[r, r'; \theta] = \left\langle \left(\frac{\delta}{\delta\chi\,(r')}\,\omega\,[r; \omega_0 + \chi]\right)\Big|_{\chi=0} \exp\left(i \int\limits_D dr\omega\,[r; \omega_0]\,\theta\,(r)\right)\right\rangle \tag{2.2}$$

Здесь $\chi\,(r)$ — детерминистический добавок к $\omega_0\,(r)$ в правой части (1.4).

Указанное подобие вероятностной меры прогибов ω_0 гауссовской мере дает возможность получить из уравнений (1.4) с помощью известной методики [2, 3] замкнутую систему уравнений в вариационных производных, связывающую функционалы (2.1) и (2.2).

Пусть Ω — множество возможных форм изгиба с заданными краевыми условиями (1.5). Представим элемент этого множества в виде ряда Фурье по собственным функциям $f_{kj}\,(r)$ линеаризованной (при $\omega_0 = 0$) краевой задачи (1.2), (1.5):

$$\omega\,(r) = \sum_k \sum_j \omega_{kj} f_{kj}\,(r) \tag{2.3}$$

Характеристическая функция $\Psi^{(n\times m)}$) коэффициентов ω_{kj} ($k = 1, \ldots$ $\ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$) имеет по определению вид интеграла Фурье от совместной $n \times m$-мерной плотности вероятности $P^{(n\times m)}$ величин ω_{kj}. В качестве меры интегрирования здесь выступает элемент «объема» $dV^{(n\times m)}$ в эвклидовом пространстве $R^{n\times m}$ возможных значений коэффициентов ω_{kj}.

Предположим, что существует, хотя бы формально, предел последовательности таких интегралов при $n \to \infty$, $m \to \infty$. Осуществим в момент предельного перехода смену мер интегрирования. Перейдем при помощи линейного преобразования (2.3) от интегрирования по мере в пространстве возможных значений коэффициентов ω_{kj} к интегрированию по некоторой мере — аналогу «объема» в пространстве определенных на D функций $\omega\,(r)$ из Ω. Смене мер (переменных) интегрирования в момент достижения величиной $\Psi^{(n\times m)}$ формального предела при $n \to \infty$, $m \to \infty$ соответствует переход от конечно-мерной плотности вероятности $P^{(n\times m)}$ величин ω_{kj} к ее бесконечномерному обобщению — определяемому на множестве Ω функционалу вероятности $P\,[\omega]$. Обозначим названную меру в пространстве функций $\omega\,(r)$ из Ω через $\mu\,[\omega\,(r) \in \Omega]$. Тогда сказанному соответствует символическое равенство

$$dV^{(\infty\times\infty)} P^{(\infty\times\infty)} = d\mu\,[\omega\,(r) \in \Omega]\,P\,[\omega]$$

Используя это равенство, запишем формальный предел последовательности величин $\Psi^{(n \times m)}$ в виде следующего континуального интеграла

$$\Psi[\theta] = \int d\mu\,[\omega(r) \in \Omega] \left\{ P[\omega] \times \right. \left. \times \exp\left(i \int_D dr \omega(r) \theta(r) \right) \right\} \quad (\Psi[\theta] = \Psi^{(\infty \times |\infty)}) \tag{2.4}$$

Интеграл (2.4) представляет собой бесконечномерное преобразование Фурье от обобщенной плотности вероятности $P[\omega]$ случайного поля $\omega(r) \in \Omega$ (обобщенного случайного процесса в терминологии [4]) и в совокупности с выражением (2.1) служит формой определения $P[\omega]$.

Ниже показано, что аналогично континуальным интегралам бозонных квазивероятностных теорий [5] сходимость интеграла (2.4) связана с устойчивостью исходной физической системы.

Применяя преобразование (2.4) к уравнениям для функционалов $\Psi[\theta]$ и $G(r, r'; \theta)$, получим следующую замкнутую систему уравнений, определяющую функционал вероятности $P[\omega]$:

$$N[r;\omega]\,\omega(r) P[\omega] = -\int_D dr_1 \int_D dr_2 \left\{ F(r, r_1) \times \right. \left. \times \frac{\delta}{\delta\omega(r_2)} (\Gamma[r_2, r_1; \omega]\, P[\omega]) \right\} \tag{2.5}$$

$$N[r;\omega]\,\Gamma[r, r';\omega] + \int_D dr_1 \left\{ \frac{\delta N[r;\omega]}{\delta\omega(r_1)} \Gamma[r_1, r';\omega] \right\} = \delta(r, r')$$

$$F(r, r') = \int_D dr_1 \int_D dr_2 \{g^{-1}(r, r_1) K(r, r_2) g^{-1}(r_2, r')\}$$

$$K(r, r') = \langle \omega_0(r)\, \omega_0(r') \rangle$$

Здесь $\Gamma[r, r'; \omega]$ — функция отклика на инфинитиземальную нагрузку, добавленную к правой части уравнения (1.3); $\delta(r, r')$ — определенная в D δ-функция, связанная с краевыми условиями (1.5).

К выражениям (2.5) следует добавить условия нормировки и неотрицательности

$$\int d\mu\,[\omega(r) \in \Omega]\, P[\omega] = 1, \qquad P[\omega] \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Пусть определенная на множестве $W \supset \Omega$ заданных в D и удовлетворяющих условиях (1.5) функций интегральная операция с ядром $F(r, r')$ не вырождена. Тогда уравнения (2.5) имеют на Ω решением удовлетворяющий условиям (2.6) функционал

$$P[\omega] = C\,|\operatorname{Det}[\Gamma^{-1}(\omega)]| \times \times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_D dr \int_D dr_1 [(N[r;\omega]\,\omega(r)) F^{-1}(r, r_1) (N[r_1;\omega]\,\omega(r_1))] \right\} \tag{2.7}$$

Здесь $\operatorname{Det}[\Gamma^{-1}(\omega)]$ — детерминант Фредгольма определенной на W интегральной операции с ядром $\Gamma^{-1}[r, r'; \omega]$. Константа C находится из первого условия (2.6).

Условие локального экстремума требует обращения в нуль на экстремали $\omega = \omega_*$ вариационной производной от функционала $P[\omega]$. Приравнивая в первом из выражений (2.5) такую производную нулю, получим уравнение на экстремали $\omega_*(r)$ функционала (2.7)

$$N[r;\omega_*]\,\omega_*(r)=\int\limits_D dr_1\ldots\int\limits_D dr_4\Big\{F(r,r_1)\times \tag{2.8}$$
$$\times\,\Gamma[r_2,r_3;\omega_*]\left(\frac{\delta}{\delta\omega(r_2)}\Gamma^{-1}[r_3,r_4;\omega]\right)\Big|_{\omega=\omega_*}\Gamma[r_4,r_1,\omega_*]$$

В правую часть этого уравнения входит неаналитическая вещественная операция с ядром $\Gamma[r, r'; \omega_*]$. Однако из (2.7) следует, что вырождение матрицы $\Gamma^{-1}[r, r'; \omega_*]$ наступает лишь на тех реализациях из Ω ее функционального аргумента ω_*, вероятность которых равна нулю. Операторы, ядра которых составляют матрицы $\Gamma[r, r'; \omega_*]$, ограничены по вероятности. Ограниченными по вероятности являются также производные правой части (2.8) по функциональному аргументу $\omega_*(r)$ или иным параметрам задачи.

3. Положим $p = p_0 + \gamma$. Пусть в малой окрестности p_0

$$\operatorname{Det}[\Gamma^{-1}(\omega)]\,|_{\omega=0}\neq 0$$

Тогда с ненулевой вероятностью возможно разложение слагаемых уравнения (2.8) по степеням γ, $\omega_*(r)$. Учитывая лишь главные члены этого разложения, получим (вводя обозначение $u(r) = \omega_*(r)$):

$$B(r,p_0)\,u(r)=H[r;u]+\ldots \tag{3.1}$$
$$H[r;u]=-\frac{\gamma h}{d}u_{xx}(r)-\frac{hE}{d}[u(r),\Phi[r;u]]$$
$$B(r,p_0)\,u(r)=\left(\Delta^2+\frac{p_0h}{d}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(r)-$$
$$-\frac{hE}{d}[u(r),\langle\Phi[r;\omega_0]\rangle]-\int\limits_D dr_1\ldots\int\limits_D dr_5F(r,r_1)\{\Gamma_0(r_4,r_1,p_0)\times$$
$$\times\,\Gamma_1(r_3,r_4,r_2,r_5)\,u(r_5)\,\Gamma_0(r_4,r_1,p_0)\}$$

Здесь $B(r, p_0)$ — линейный оператор, Γ_1 — вершинное ядро, определяемое выражением

$$\frac{\delta}{\delta\omega(r_2)}\Gamma^{-1}[r,r_1;\omega]=\int\limits_D dr_3\Gamma_1(r,r_1,r_2,r_3)\,\omega(r_3)$$

Функция $\Gamma_0(r, r', p_0)$ равна функции $\Gamma[r, r'; \omega = 0]$ на значениях $p = p_0$ и в общем случае ограничена по вероятности.

Обозначим через $\varphi_m(r)$ нули оператора $B(r, p_0)$. Ими будут при условиях (1.5) нетривиальные решения линейного уравнения

$$B(r,p_0)\,u(r)=0 \tag{3.2}$$

Через p_{0m} обозначим значения параметра p_0, соответствующие моментам необратимости оператора $B(r, p_0)$.

При достаточно малых $K(r, r')$ задача (3.2), (1.5) допускает в рамках метода Галеркина приближенные решения $\varphi_m(r)\approx f_{kj}(r)$, где

$$f_{kj}(r)=2(ab)^{-1/2}\sin\left(\frac{\pi kx}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi jy}{b}\right)$$

Соответствующие этим решениям моменты необратимости наступают тогда, когда $p_0 = \Lambda_{kj}$, где

$$\Lambda_{kj} = \frac{d}{h}\left(\frac{a}{\pi k}\right)^2 \left(g_{k,j}^{-1} - \alpha_1 \Omega_{k,j-\alpha_2}^{(1)} \Omega_{k,j}^{(2)}\right) \tag{3.3}$$

$$g_{x,y} = \left[\left(\frac{\pi x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi y}{b}\right)^2\right]^{-2}$$

$$\alpha_1 = \frac{16\pi^2 hE}{d\sqrt{(ab)^5}}, \qquad \alpha_2 = \left[\frac{3\pi^4 hE}{4d\,(ab)^5}\right]^{1/2}$$

$$\Omega_{k,j}^{(1)} = (kj)^2 \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} \{g_{2s+1,\,2t+1} M_{2s+1,\,2t+1} T_{2s+1,\,2t+1,\,k,\,j}\}$$

$$\Omega_{k,j}^{(2)} = \left\{(kj)^4 K_{kj,\,kj} \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} g_{2s+1,\,2t+1} T^2_{2s+1,\,2t+1,\,k,\,j}\right\}^{1/2}$$

$$T_{x,y,v,t} = \frac{y}{x\,(4t^2 - y^2)} + \frac{x}{y\,(4v^2 - t^2)}$$

$$M_{k,j} = \int_D dr f_{kj}(r) \langle[\omega_0(r), \omega_0(r)]\rangle$$

Величины $K_{kj,kj}$ суть диагональные по паре индексов (k, j) коэффициенты разложения корреляционной функции $K(r, r')$ начальных прогибов по системе $\{f_{kj}(r)\}$.

Пусть величине $p_0 = p_{0m} \approx \Lambda_{kj}$ соответствует только один нуль оператора $B(r, p_0)$. Тогда аналогично нелинейным уравнениям с операторами в банаховых пространствах [6] первое уравнение (3.1) допускает решение

$$u(r) \approx \eta f_{kj}(r) + R_{kj}^{-1} \int_D dr_1 g(r, r_1) H[r_1; u] \tag{3.4}$$

$$\eta = \int_D dr u(r) f_{kj}(r)$$

Здесь R_{kj}^{-1} — оператор Грина, обратный при условиях (1.5) к оператору R_{kj}. Оператор R_{kj} определен выражением

$$R_{kj} u(r) = \int_D dr_1 \left[(f_{kj}(r) f_{kj}(r_1) + g(r, r_1) B(r_1, p_0 = \Lambda_{kj}))\, u(r_1)\right]$$

Следуя [6], построим для параметров η так называемые уравнения разветвления

$$L_{kj}^{(1)}(p - \Lambda_{kj}) + L_{kj}^{(2)}\eta^2 \approx 0 \tag{3.5}$$

$$L_{kj}^{(1)} = -\frac{h}{d}\int_D dr f_{kj}(r) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{kj}(r) = \frac{h}{d}\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2$$

$$L_{kj}^{(2)} = -\frac{hE}{d}\int_D dr\,[f_{kj}(r), \Phi[r; f_{kj}]]\, f_{kj}(r) =$$

$$= -\frac{2^7 hE}{d}\,\frac{(\pi k j)^4}{(ab)^5} \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} \{g_{2s+1,\,2t+1} T^2_{2s+1,\,2t+1,\,k,\,j}\} < 0$$

Как явствует из выражений (3.4), (3.5), приближенными малыми решениями уравнения (2.8) являются следующие формы изгиба:

$$\omega_*(r) \approx u_\pm(r,\ p - \Lambda_{kj}) = \pm \beta f_{kj}(r) \tag{3.6}$$

$$\beta = [L_{kj}^{(1)}(p - \Lambda_{kj}) \mid L_{kj}^{(2)} \mid^{-1}]^{1/2}$$

Эти формы ответвляются от тривиального решения в момент достижения параметром нагружения значений $p = \Lambda_{kj}$. Полагая в (3.2) $K = 0$, получим известное выражение, определяющее моменты бифуркации тривиального решения детерминистической задачи ($\omega_0 = 0$).

4. Вторая вариация функционала $S[\omega] = -\ln(C^{-1}P[\omega])$ в окрестности $\omega = 0$ имеет вид простой квадратичной формы

$$\delta^2 S[\omega] = \frac{1}{2}\sum_m c_m(p)\,\omega_m^2, \qquad \omega_m = \int_D dr\varphi_m(r)\,\omega(r) \tag{4.1}$$

Величины $c_m(p)$ являются собственными числами оператора в левой части уравнения

$$\int_D dr_1 \frac{\delta^2 S[\omega]}{\delta\omega(r_1)\,\delta\omega(r)}\bigg|_{\omega=0} u(r_1) = cu(r) \tag{4.2}$$

Решения уравнения (4.2) совпадают по вероятности с нулями $\varphi_m(r)$ оператора $B(r, p_0)$.

Величины $c_m(p)$ больше нуля, когда $p < p_{0m}$, обращаются в нуль при $p = p_{0m}$ и меньше нуля, если $p > p_{0m}$. Это значит, что форма (4.1) положительно определена в области $0 < p < p_{0n}'$ (p_{0n}' — наименьшее из значений p_{0m}, приближенно равное наименьшему Λ_{st}' из значений Λ_{kj}) и знаконеопределена с момента $p = p_{0n}'$. В рамках используемых приближений при достаточно малых $p - (p_{0n}' \approx \Lambda_{st}') > 0$ положительна вторая вариация $\delta^2 S[\omega]$ в окрестности прогибов (3.6): $\omega = u_\pm(r, p - \Lambda_{st}')$. Следовательно, функционал вероятности $P[\omega]$ имеет до момента $p = p_{0n}' \approx \Lambda_{st}'$ первого ветвления тривиального решения уравнения (2.8) единственный экстремум — максимум на прогибе $\omega = 0$, который в указанный момент переходит в новые максимумы приближенно на прогибах $\omega = u_\pm(r, p - \Lambda_{st}')$. Такое явление представляет собой пример стохастической бифуркации.

Своеобразие этого явления заключается в том, что в момент достижения параметром нагружения значения $p = p_{0n}'$ — момент потери устойчивости данной стохастической системы — нарушается сходимость интеграла (2.4). Действительно, до момента $p = p_{0n}'$ у функционала $S[\omega]$ есть только один экстремум — минимум на прогибе $\omega = 0$ (в окрестности этого прогиба $S[\omega]$ является выпуклым вниз функционалом: $\delta^2 S[\omega] > 0$). Данное обстоятельство свидетельствует о том, что функционал $S[\omega]$ неограниченно растет при $\omega(r) \to \pm\infty$. Это значит, что экспонента в правой части равенства символов

$$d\mu[\omega(r) \in \Omega]P[\omega] = d\mu[\omega(r) \in \Omega]C^{-1}\exp(-S[\omega]) \tag{4.3}$$

оказывается при больших $|\omega(r)|$ «режущей», что приводит к сходимости интеграла (2.4) (сходимость легко устанавливается здесь в рамках теории возмущений, в которой по аналогии с [7] за начальное приближение берется гауссовская составляющая функционала $P[\omega]$). В бесконечно малой окрестности $p = p_{0n}'$ экспонента в правой части (4.3) теряет свои «режущие» свойства. Здесь нет сходимости интеграла (2.4). «Режущие» свойства у экспоненты (4.3) появляются вновь тогда, когда разность $p - p_{0n}'$ становится больше бесконечно малого положительного числа ε, образующего правую от значения $p = p_{0n}'$ часть интервала расходимости интеграла (2.4). Здесь снова имеет место сходимость упомянутого интеграла.

Отметим, что дисперсия прогибов $\omega\,[r;\,\omega_0]$, определенная в области $0 < p < p_{0n}' \approx \Lambda_{st}'$ при помощи гауссовской аппроксимации функционала вероятности $P\,[\omega]$, резко возрастает при $p \to \Lambda_{st}'$ снизу, а характерные масштабы корреляций $\omega\,[r;\,\omega_0]$ приближаются к масштабам составляющей

$$K_{st,st} f_{st}(r) f_{st}(r')$$

из разложения корреляционной функции начальных прогибов $K\,(r,\,r')$ по системе $\{f_{kj}\,(r)\}$. Прогибы $\omega \approx u_{\pm}\,(r,\,p - \Lambda_{st}')$ составляют при этом две основные формы потери устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
2. *Монин А. С.*, *Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
3. *Кляцкин В. И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975. 240 с.
4. *Гельфанд И. М.*, *Виленкин Н. Я.* Обобщенные функции. Вып. 4. М.: Физматгиз, 1964. 472 с.
5. *Васильев А. Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. 294 с.
6. *Вайнберг Н. М.*, *Треногин В. А.* Теория ветвлений решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
7. *Славнов А. А.* Континуальный интеграл в теории возмущений.— ТМФ, 1975, т. 22, № 2, с. 177—185.

Новосибирск

Поступила в редакцию
11.II.1980