

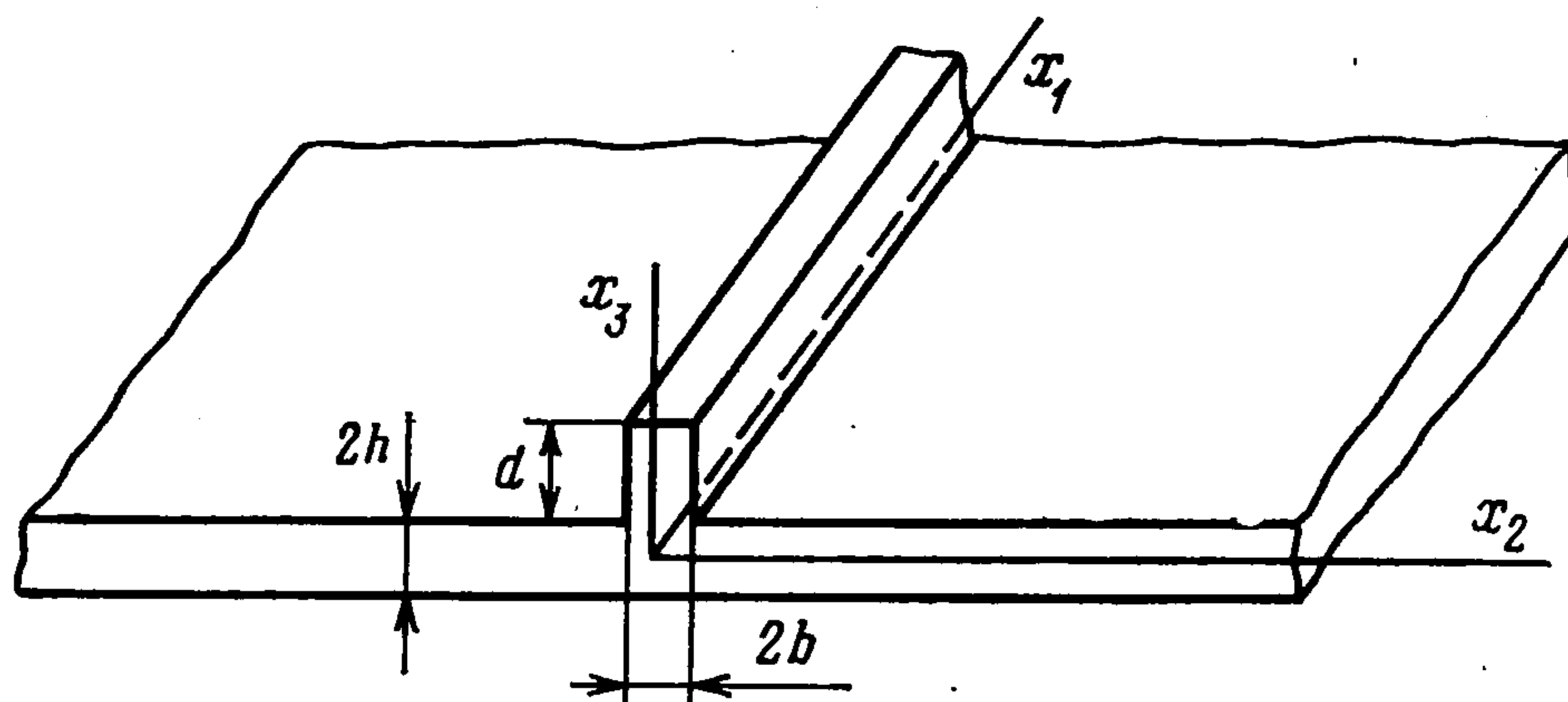
УДК 539.3

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ К РАСЧЕТУ ПЛИТЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ СТРИНГЕРОМ

Лобода В. В.

рассмотрена трехмерная задача теории упругости для полуслоя, подкрепленного стрингером и нагруженного на торце симметричной нагрузкой. Использована идея осреднения совместно с методом асимптотического интегрирования. Показано, что напряженное состояние конструкции распадается на осредненное, описываемое двумерными уравнениями для подкрепленной пластины, и дополнительное, обусловленное трехмерными эффектами в области ребра. Получено распределение контактного напряжения по ширине ребра, исследован характер напряженного состояния вблизи зоны контакта. Показано, что дополнительные напряжения соизмеримы со сдвигающим напряжением осредненного состояния.

1. При расчете подкрепленных пластин и оболочек влияние ребер, как правило, учитывается посредством введения в уравнения равновесия дополнительных членов, содержащих функции распределения контактных напряжений по ширине области контакта [1]. Однако при решении практических задач чаще всего распределение считается либо равномерным, либо предполагается, что ребро и обшивка взаимодействуют по линии. Данная аппроксимация обусловлена тем, что распределение контактных



Фиг. 1

напряжений неизвестно и может быть определено лишь при рассмотрении ребра и обшивки в рамках соотношений трехмерной теории упругости, что представляет существенные трудности.

Рассматривается изотропный полуслой, подкрепленный стрингером (фиг. 1), на торце  $x_1 = 0$  которого задана периодическая по  $x_2$  нагрузка, симметричная относительно оси  $x_3$ , с моментом относительно нейтральной плоскости, равным нулю. Длина полуволны  $\pi l$  нагрузки значительно больше толщины плиты  $2h$  и поперечных размеров стрингера  $2b, d$ .

С учетом характера нагрузки можно считать, что между плитой и ребром действуют только продольные контактные напряжения  $q_1(x_1, x_2)$ , направленные по оси  $x_1$ . Тогда задача описывается следующими системами уравнений:

$$(1.1) \quad L_1(u^n) + \delta(x_3 - h) H_1(x_2) q_1(x_1, x_2) = 0, \quad L_k(u^n) = 0$$

$$(1.2) \quad L_1(u^p) - \delta(x_3 - h) q_1(x_1, x_2) = 0, \quad L_k(u^p) = 0$$

$$u^n = \{u_1^n, u_2^n, u_3^n\}, \quad u^p = \{u_1^p, u_2^p, u_3^p\}$$

$$L_i(u) \equiv (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \Delta u_i,$$

$$H_1(x_2) = H(x_2 + b) - H(x_2 - b)$$

Здесь  $L_i(u)$  — операторы Ламе,  $u^n$ ,  $u^p$  — векторы перемещений плиты и ребра,  $\delta(x_3)$ ,  $H(x_2)$  — обобщенные функции Дирака и Хевисайда соответственно,  $\lambda$ ,  $\mu$  — упругие постоянные Ламе, индекс  $i$  здесь и в дальнейшем принимает значения 1, 2, 3,  $k$  — значения 2, 3,  $j$  — значения 1, 2. Граничные условия на гранях ребра и основаниях плиты однородны.

Для решения задачи используем идею осреднения, в соответствии с которой для получения исходного приближения используем осредненные соотношения. При формулировке осредненной задачи для плиты полагаем, что  $q_1(x_1, x_2)$  действует сосредоточенно по средней линии контакта, напряжение  $\sigma_{33}^n = 0$ , и интегрируем (1.1) по толщине. В результате с учетом условий на основаниях  $x_3 = \pm h$ , получаем

$$(1.3) \quad L_{1*}(u_{1*}^n, u_{2*}^n) + \frac{\delta(x_2)}{2h} \bar{q}_1(x_1) = 0, \quad L_{2*}(u_{1*}^n, u_{2*}^n) = 0$$

$$(1.4) \quad u_{j*}^n(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_j^n(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad \bar{q}_1(x_1) = \int_{-b}^b q_1(x_1, x_2) dx_2$$

Здесь  $L_{1*}$ ,  $L_{2*}$  — операторы Ламе в случае обобщенного плоского напряженного состояния.

Предполагая  $\sigma_{22}^p = \sigma_{33}^p = 0$  и интегрируя (1.2) по площади поперечного сечения стрингера  $F$ , получаем с учетом условий на боковых гранях осредненное соотношение для ребра

$$(1.5) \quad EF \frac{\partial^2 u_{1*}^p}{\partial x_1^2} - \bar{q}_1(x_1) = 0, \quad u_{1*}^p(x_1) = \frac{1}{F} \iint_F u_1^p(x_1, x_2, x_3) dF$$

Считая, что по линии контакта перемещения пластины и ребра совпадают ( $u_{1*}^p(x_1) = u_{1*}^n(x_1, 0)$ ), из (1.3), (1.5) получим

$$(1.6) \quad L_{1*}(u_{1*}^n, u_{2*}^n) + \frac{EF}{2h} \delta(x_2) \frac{\partial^2 u_{1*}^n}{\partial x_1^2} = 0, \quad L_{2*}(u_{1*}^n, u_{2*}^n) = 0$$

Граничные условия для системы (1.6) находятся интегрированием по  $x_3$  исходных условий, заданных на торце  $x_1 = 0$ . Сформулированная таким образом задача представляет собой задачу обобщенного плоского напряженного состояния для подкрепленной пластины. Из условий  $\sigma_{33}^n = 0$  и  $\sigma_{22}^p = \sigma_{33}^p = 0$  получаем ( $\nu$  — коэффициент Пуас-

сона):

$$u_{3*}^n = -\kappa x_3 \psi, \quad u_{2*}^p = -\nu x_2 \frac{\partial u_{1*}^p}{\partial x_1}, \quad u_{3*}^p = -\nu (x_3 + \kappa h) \frac{\partial u_{1*}^p}{\partial x_1}$$

$$\psi = \frac{\partial u_{1*}^n}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2*}^n}{\partial x_2}, \quad \kappa = \frac{\nu}{1-\nu}$$

При этом перемещения стрингера и пластины на линии  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = h$  совпадают.

2. Примем значения  $u_{i*}^n$  в качестве исходного приближения к решению системы (1.1), а  $u_{1*}^p(x_1) = u_{1*}^n(x_1, 0)$ ,  $u_{2*}^p$ ,  $u_{3*}^p$  — в качестве исходного приближения к решению системы (1.2) и представим искомые решения в виде

$$(2.1) \quad u^n = u_*^n + V, \quad u^p = u_*^p + W; \quad V = \{V_1, V_2, V_3\}, \quad W = \{W_1, W_2, W_3\}$$

где  $V$ ,  $W$  — векторы дополнительных перемещений для плиты и ребра соответственно.

Подставляя (2.1) в (1.1), (1.2) и в граничные условия на основаниях плиты и гранях ребра, получаем

$$(2.2) \quad L_1(V) = \kappa \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \delta(x_3 - h) H_1(x_2) q_1(x_1, x_2) + \frac{\delta(x_2)}{2h} \bar{q}_1(x_1)$$

$$L_2(V) = \kappa \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad L_3(V) = \kappa \mu x_3 \Delta_1 \psi; \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

$$\sigma_{33}(V)|_{x_3=\pm h} = 0, \quad \sigma_{j3}(V)|_{x_3=\pm h} = \pm \kappa h \frac{\partial \psi}{\partial x_j}$$

$$(2.3) \quad L_1(W) = 2\mu\nu \frac{\partial^2 u_{1*}^p}{\partial x_1^2} - \frac{\bar{q}_1(x_1)}{F} + \delta(x_3 - h) q_1(x_1, x_2)$$

$$L_k(W) = \mu\nu x_k \frac{\partial^3 u_{1*}^p}{\partial x_1^3}$$

$$\sigma_{12}(W)|_{x_2=\pm b} = \pm \nu \mu b \frac{\partial^2 u_{1*}^p}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{23}(W)|_{x_2=\pm b} = \sigma_{33}(W)|_{x_2=\pm b} = 0$$

$$\sigma_{13}(W)|_{x_3=h} = \nu \mu h \frac{\partial^2 u_{1*}^p}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{13}(W)|_{x_3=h+d} = \nu \mu (h+d) \frac{\partial^2 u_{1*}^p}{\partial x_1^2}$$

$$\sigma_{33}(W)|_{x_3=h, h+d} = \sigma_{23}(W)|_{x_3=h, h+d} = 0$$

Сформулированные краевые задачи (2.2) и (2.3) по виду не проще исходных, однако они обладают тем преимуществом, что искомые перемещения  $V$ ,  $W$  и соответствующие напряжения представимы в виде двух составляющих, каждая из которых быстро меняется либо по координатам  $x_2$ ,  $x_3$ , либо только по координате  $x_3$  (первая составляющая для плиты). Это позволяет для исследования дополнительного состояния эффективно применять асимптотические методы.

Решение системы (2.2) ищем как сумму решений систем (2.4), (2.5):

$$(2.4) \quad L_j(V^{(1)}) = \kappa \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \quad L_3(V^{(1)}) = \kappa \mu x_3 \Delta_1 \psi$$

$$(2.5) \quad L_1(V^{(2)}) = \frac{\delta(x_2)}{2h} \bar{q}_1(x_1) - \delta(x_3 - h) H_1(x_2) q_1(x_1, x_2), \quad L_k(V^{(2)}) = 0$$

Частное решение системы (2.4), удовлетворяющее граничным условиям в (2.2), получено асимптотическим методом с использованием растяжения координаты  $x_3$  [2] и имеет вид

$$(2.6) \quad V_j^{(1)} = \frac{\kappa}{2} \left( x_3^2 - \frac{h^2}{3} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \quad V_3^{(1)} = 0$$

Это решение с точностью до членов  $\sim \nu^2 \varepsilon_1$  по сравнению с 1 удовлетворяет системе (2.4) и с точностью  $\nu^2 \varepsilon_1^2$  граничным условиям в (2.2) ( $\varepsilon_1$  — малый параметр, равный  $h/l$ ).

Для нахождения решения системы (2.5), удовлетворяющего однородным граничным условиям на основаниях, используется то обстоятельство, что правую часть системы (2.5) можно рассматривать как массовую силу, которая в объеме  $|x_3| \leq h$ ,  $|x_2| \leq b$  для каждого  $x_1$  самоуравновешенна

$$\int_{-h}^h \int_{-b}^b \left[ \frac{\delta(x_2)}{2h} \bar{q}_1(x_1) - \delta(x_3 - h) H_1(x_2) q_1(x_1, x_2) \right] dx_2 dx_3 \equiv 0$$

Это означает, что в соответствии с принципом Сен-Венана соответствующее напряженное состояние будет быстро затухать при удалении от области контакта, т. е. является быстропеременным по  $x_2$ ,  $x_3$ . Вводя поэтому замену координат  $x_2 = \varepsilon_1 \bar{x}_2$ ,  $x_3 = \varepsilon_1 \bar{x}_3$ , представим неизвестные перемещения в виде

$$(2.7) \quad V_i^{(2)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} V_{in} \varepsilon_1^n$$

Подставляя в систему (2.5) и однородные граничные условия на основаниях и группируя члены при одинаковых степенях  $\varepsilon_1$ , получаем

$$(2.8) \quad \mu \left( \frac{\partial^2 V_{1n}}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial^2 V_{1n}}{\partial \bar{x}_3^2} \right) = -(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial V_{2n-1}}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial V_{3n-1}}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial V_{1n-2}}{\partial x_1} \right) -$$

$$- \mu \frac{\partial^2 V_{1n-2}}{\partial x_1^2} + \begin{cases} \varepsilon_1^2 \left[ \frac{\delta(x_2)}{2h} \bar{q}_1 - \delta(x_3 - h) H_1(x_2) q_1 \right], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$(2.9) \quad \frac{\partial V_{1n}}{\partial \bar{x}_3} \Big|_{x_3 = \pm h} = \frac{\partial V_{3n-1}}{\partial x_1} \Big|_{x_3 = \pm h}$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \left( \frac{\partial V_{2n}}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial V_{3n}}{\partial \bar{x}_3} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 V_{kn}}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial^2 V_{kn}}{\partial \bar{x}_3^2} \right) =$$

$$= -(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V_{1n-1}}{\partial x_1 \partial \bar{x}_k} - \mu \frac{\partial^2 V_{kn-2}}{\partial x_1^2}$$

$$(1 - \nu) \frac{\partial V_{3n}}{\partial \bar{x}_3} + \nu \frac{\partial V_{2n}}{\partial \bar{x}_2} \Big|_{x_3 = \pm h} = -\nu \frac{\partial V_{1n-1}}{\partial x_1} \Big|_{x_3 = \pm h},$$

$$\frac{\partial V_{2n}}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial V_{3n}}{\partial \bar{x}_2} \Big|_{x_3 = \pm h} = 0$$

Здесь  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $V_{in}$  для  $n < 0$  равны нулю. Видно, что трехмерная задача распадается на последовательность двумерных краевых задач (2.8), (2.9) для полуполосы  $|x_3| \leq h$ ,  $|x_2| < \infty$ .

В нулевом приближении ( $n = 0$ ) краевая задача (2.9) дает тривиальное

решение ( $V_{20} = V_{30} = 0$ ), а (2.8) имеет вид

$$(2.10) \quad \frac{\partial^2 V_{10}}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial^2 V_{10}}{\partial \bar{x}_3^2} = \frac{\varepsilon_1^2}{\mu} \left[ \frac{\delta(x_2)}{2h} \bar{q}_1 - \delta(x_3 - h) H_1(x_2) q_1 \right]$$

$$\frac{\partial V_{10}}{\partial \bar{x}_3} \Big|_{x_3 = \pm h} = 0, \quad V_{10} \Big|_{x_2 \rightarrow \pm \infty} \rightarrow 0$$

Решение краевой задачи (2.10) получено при помощи интегральных преобразований Фурье [3] с бесконечными (по  $x_2$ ) и конечными (по  $x_3$ ) пределами в форме (для удобства записано в основных координатах):

$$(2.11) \quad V_1^{(2)} \approx V_{10} = \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\text{ch } p\gamma x_3}{p \text{ sh } p\gamma\pi} \int_{-b}^b q_1(x_1, x_2) \cos px_2 dx_2 - \frac{\bar{q}_1(x_1)}{2hp^2} \right] \cos px_2 dp, \quad \gamma = \frac{2h}{\pi}$$

Нахождение последующих приближений  $V_i^{(2)}$  не составляет принципиальных трудностей. Следует отметить, что решение (2.11) неверно для области  $|x_3| \leq h$ ,  $|x_2| \leq b$ ,  $x_1 \leq 2h$ , где напряженное состояние одинаково быстро меняется по всем трем координатам.

Дополнительное решение для ребра, так же как и для плиты, состоит из частного решения первого типа

$$(2.12) \quad W_1^{(1)} = \frac{\nu}{2} \left( x_2^2 + x_3^2 - \frac{b^2 + d^2}{3} \right) \frac{\partial^2 u_{1*}^p}{\partial x_1^2}, \quad W_k^{(1)} = 0$$

предназначенного для компенсации невязок в граничных условиях в (2.3), и решения системы

$$(2.13) \quad L_1(W^{(2)}) = -\frac{\bar{q}_1(x_1)}{F} + \delta(x_3 - h) q_1(x_1, x_2), \quad L_k(W^{(2)}) = 0$$

с однородными граничными условиями на боковых гранях. Для нахождения последнего учитывается, что для каждого  $x_1$

$$\iint_F \left[ \frac{\bar{q}_1(x_1)}{F} - \delta(x_3 - h) q_1(x_1, x_2) \right] dF \equiv 0$$

вводится замена координат  $x_2 = \varepsilon_2 x_2^*$ ,  $x_3 = \varepsilon_2 x_3^*$  и решение представляется в виде

$$W_i^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} W_{im} \varepsilon_2^m \quad \left( \varepsilon_2 = \max \left\{ \frac{b}{l}, \frac{d}{l} \right\} \right)$$

В результате получается рекуррентный процесс, аналогичный (2.8), (2.9). При этом основная составляющая  $W^{(2)}$  определяется из следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 W_{10}}{\partial x_2^*} + \frac{\partial^2 W_{10}}{\partial x_3^*} = -\frac{\varepsilon_2^2}{\mu} \left[ \frac{\bar{q}_1}{F} - \delta(x_3 - h) q_1 \right]$$

$$\frac{\partial W_{10}}{\partial x_2^*} \Big|_{x_2^* = \pm b/\varepsilon_2} = 0, \quad \frac{\partial W_{10}}{\partial x_3^*} \Big|_{x_3^* = h/\varepsilon_2, (d+h)/\varepsilon_2} = 0$$

Ее решение получено с использованием преобразований Фурье с ко-

нечными пределами [3] и имеет вид

$$(2.14) \quad W_1^{(2)} \approx W_{10} = -\frac{d\bar{q}_1(x_1)}{b\mu} \left[ \frac{(x_3-h)^2}{4d^2} - \frac{(x_3-h)}{2d} + \frac{1}{6} \right] - \\ - \frac{2}{\pi\mu} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \alpha t \pi \left( \frac{x_3-h}{d} - 1 \right)}{t \operatorname{sh} \alpha t \pi} \int_{-b}^b q_1(x_1, x_2) \cos \frac{t\pi}{2b} (x_2 + b) \times \\ \times dx_2 \cos \frac{t\pi}{2b} (x_2 + b), \quad \alpha = \frac{d}{2b}$$

Следует отметить, что найденные дополнительные решения (2.6), (2.11) и (2.12), (2.14) вносят лишь самоуравновешенные невязки в граничные условия на торце, поэтому их выполнение в интегральном смысле не нарушают. Для точного удовлетворения граничным условиям на торце можно построить напряженное состояние типа пограничного слоя [2, 4].

3. Из полученных результатов видно, что при нагрузке заданного типа в области контакта преобладают продольные перемещения  $u_1^n$ ,  $u_1^p$ , а поперечные — величины более высокого порядка малости. Поэтому для определения неизвестного контактного напряжения  $q_1(x_1, x_2)$  запишем условие равенства продольных перемещений полуслоя и ребра в каждой точке области контакта

$$(3.1) \quad u_{1*}^n(x_1, x_2) + V_1^{(2)}(x_1, x_2, h) = u_{1*}^p(x_1) + W_1^{(2)}(x_1, x_2, h)$$

Соотношение (3.1) должно выполняться для любого  $x_1$  и  $|x_2| \leq b$ ; осредненное перемещение ребра  $u_{1*}^p(x_1) \equiv u_{1*}^n(x_1, 0)$  по ширине полосы контакта не меняется; перемещения  $V_1^{(1)}$  и  $W_1^{(1)}$  в соотношении (3.1) не учитываются, так как они являются величинами второго порядка малости по сравнению с выписанными членами.

Подставляя в (3.1) выражения для  $V_1^{(2)}$  (2.11) и  $W_1^{(2)}$  (2.14), получаем следующее интегральное уравнение:

$$(3.2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} p\gamma\pi}{p} \int_{-b}^b q_1(x_1, x_2) \cos px_2 dx_2 \cos px_2 dp + \\ + 4 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \alpha t \pi}{t} \int_{-b}^b q_1(x_1, x_2) \cos \frac{t\pi}{2b} (x_2 + b) dx_2 \cos \frac{t\pi}{2b} (x_2 + b) = \\ = \varphi(x_1, x_2) + \frac{\bar{q}_1(x_1)}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px_2}{p^2} dp \\ \varphi(x_1, x_2) = 2\pi\mu [u_{1*}^n(x_1, x_2) - u_{1*}^n(x_1, 0)] + \frac{\bar{q}_1\pi d}{3b}, \quad -b \leq x_2 \leq b$$

( $x_1$  входит в уравнение как параметр).

Для решения уравнения (3.2) представим неизвестное контактное напряжение в виде

$$(3.3) \quad q_1(x_1, x_2) = a_0(x_1) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x_1) \cos \frac{m\pi x_2}{b}$$

Здесь сохранены только четные гармоники, так как функция  $q_1(x_1, x_2)$

четна по  $x_2$ . Подставляя (3.3) в (3.2), получаем

$$(3.4) \quad 2a_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin pb}{p^2} \operatorname{cth} p\gamma\pi dp + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left[ f_m(x_2) + p_m \cos \frac{m\pi}{b} (x_2 + b) \right] - \\ - \varphi(x_1, x_2) - \frac{\bar{q}_1(x_1)}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px_2}{p^2} dp = 0 \\ f_m(x_2) = -2(-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} p\gamma\pi \frac{\sin pb}{\delta_m^2 - p^2} \cos px_2 dp \\ p_m = 2b \frac{(-1)^m}{m} \operatorname{cth} 2am\pi; \quad \delta_m = \frac{m\pi}{b}$$

Для определения  $a_0, a_1, \dots$  потребуем, чтобы левая часть соотношения (3.4) на интервале  $|x_2| \leq b$  была ортогональна полной системе функций  $\cos(n\pi x_2 b^{-1})$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) [5]. Умножая левую и правую части (3.4) на каждую из функций и интегрируя в указанных пределах, получаем

$$(3.5) \quad \sum_{m=0}^{\infty} g_{0m} a_m = D_0, \quad \sum_{m=0}^{\infty} g_{nm} a_m + \frac{4b^2}{n^2} \operatorname{cth}(2am\pi) a_n = D_n \\ g_{00} = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_0(p) dp, \quad \chi_0(p) = \frac{\sin^2 pb}{p^3} \operatorname{cth} p\gamma\pi \\ g_{0m} = g_{m0} = -4(-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 pb}{p(\delta_m^2 - p^2)} \operatorname{cth} p\gamma\pi dp \\ g_{nm} = 4(-1)^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p \sin^2 pb}{(\delta_m^2 - p^2)(\delta_n^2 - p^2)} \operatorname{cth} p\gamma\pi dp \quad (m = 1, 2, \dots) \\ D_0 = \int_{-b}^b \varphi(x_2) dx_2 + \frac{\bar{q}_1(x_1)}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_1(p) dp, \quad \chi_1(p) = \frac{\sin pb}{p^3} \\ D_n = \int_{-b}^b \varphi(x_2) \cos \frac{n\pi x_2}{b} dx_2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Система (3.5) представляет собой бесконечную систему уравнений относительно  $a_0, a_1, \dots$ . При этом функции  $\chi_0(p)$  и  $\chi_1(p)$ , являющиеся подынтегральными в формулах для  $g_{00}$  и  $D_0$ , имеют степенные особенности второго порядка при  $p \rightarrow 0$ . Поэтому система (3.5) имеет решение, если

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left[ a_0 \chi_0(p) - \frac{q_1(x_1) \chi_1(p)}{h} \right] = 0$$

Отсюда  $a_0 = \bar{q}_1(x_1) / (2b)$ . Последний результат полностью согласуется со вторым соотношением (1.4) и подчеркивает непротиворечивость применяемого подхода.

Следует отметить, что левая часть системы (3.5) не зависит от вида внешней нагрузки. Кроме того, как показывает численный анализ, система (3.5) регулярна [5], и поэтому легко решается методом урезания.

4. В качестве примера рассмотрим подкрепленный полуслой (фиг. 1), на торце которого заданы следующие граничные условия:

$$(4.1) \quad \sigma_{11} = Ef(x_3) \cos \frac{x_2}{l}; \quad u_2 = u_3 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0$$

В этом случае осредненные граничные условия для системы (1.6) имеют вид

$$(4.2) \quad x_1 = 0, \quad \sigma_{11*} = EQ \cos \frac{x_2}{l}, \quad u_{2*} = 0 \quad \left( Q = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x_3) dx_3 \right)$$

Учитывая симметрию нагрузки (4.2) по  $x_2$ , краевую задачу (1.6), (4.2) можно сформулировать как плоскую задачу для четверти плоскости, записывая граничные условия при  $x_2 = 0$ , как условия для подкрепленного края

$$(4.3) \quad L_{j*}(u_{1*}^n, u_{2*}^n) = 0; \quad \sigma_{12*}^n + \frac{EF}{4h} \frac{\partial^2 u_{1*}^n}{\partial x_1^2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad u_{2*}^n \Big|_{x_2=0} = 0$$

Для решения краевой задачи (4.2), (4.3) применяем к уравнениям и граничным условиям (4.3) бесконечные  $\sin$ - и  $\cos$ -преобразования Фурье по  $x_1$ . В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно изображений

$$\bar{u}_1(p, x_2) = \int_0^{\infty} u_{1*}^n(x_1, x_2) \cos p\xi_1 dp$$

$$\bar{u}_2(p, x_2) = \int_0^{\infty} u_{2*}^n(x_1, x_2) \sin p\xi_1 dp \quad (\xi_j = x_j/l)$$

с соответствующими граничными условиями. Находя решение этой системы и возвращаясь к оригиналам, получаем

$$(4.4) \quad u_{1*}^n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T(p) \left( \xi_2 - \frac{\lambda}{p} \right) \exp(-p\xi_2) \cos p\xi_1 dp -$$

$$- \frac{\beta_1}{2} \frac{(1+\nu)\xi_1 + 3 + \nu}{1-\nu} \exp(-\xi_1) \cos \xi_2$$

$$u_{2*}^n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T(p) \xi_2 \exp(-p\xi_2) \sin p\xi_1 dp - \frac{\beta_1}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \xi_1 \exp(-\xi_1) \sin \xi_2$$

$$T(p) = \frac{\alpha_1 \beta_1 p^2 [(1-\nu)p^2 + 2]}{(1-\nu)(1+\lambda + \alpha_1 \lambda p)(1+p^2)^2}, \quad \alpha_1 = \frac{EF}{4\mu lh}$$

$$\beta_1 = (1-\nu^2) Ql, \quad \lambda = \frac{3-\nu}{1-\nu}$$

Осредненное контактное усилие взаимодействия стрингера и пластины следующее:

$$(4.5) \quad \bar{q}_1(x_1) = EF \frac{\partial^2 u_{1*}^n(x_1, 0)}{\partial x_1^2} = \frac{2EF\beta_1(1+\lambda)}{\alpha_1 \pi l^2} \int_0^{\infty} T(p) \cos p\xi_1 dp$$

Подставляя найденные осредненные значения в правую часть системы (3.5) и решая ее указанным методом, находим коэффициенты  $a_1, a_2, \dots$

Численная реализация полученных результатов проведена при следующих значениях входных параметров:

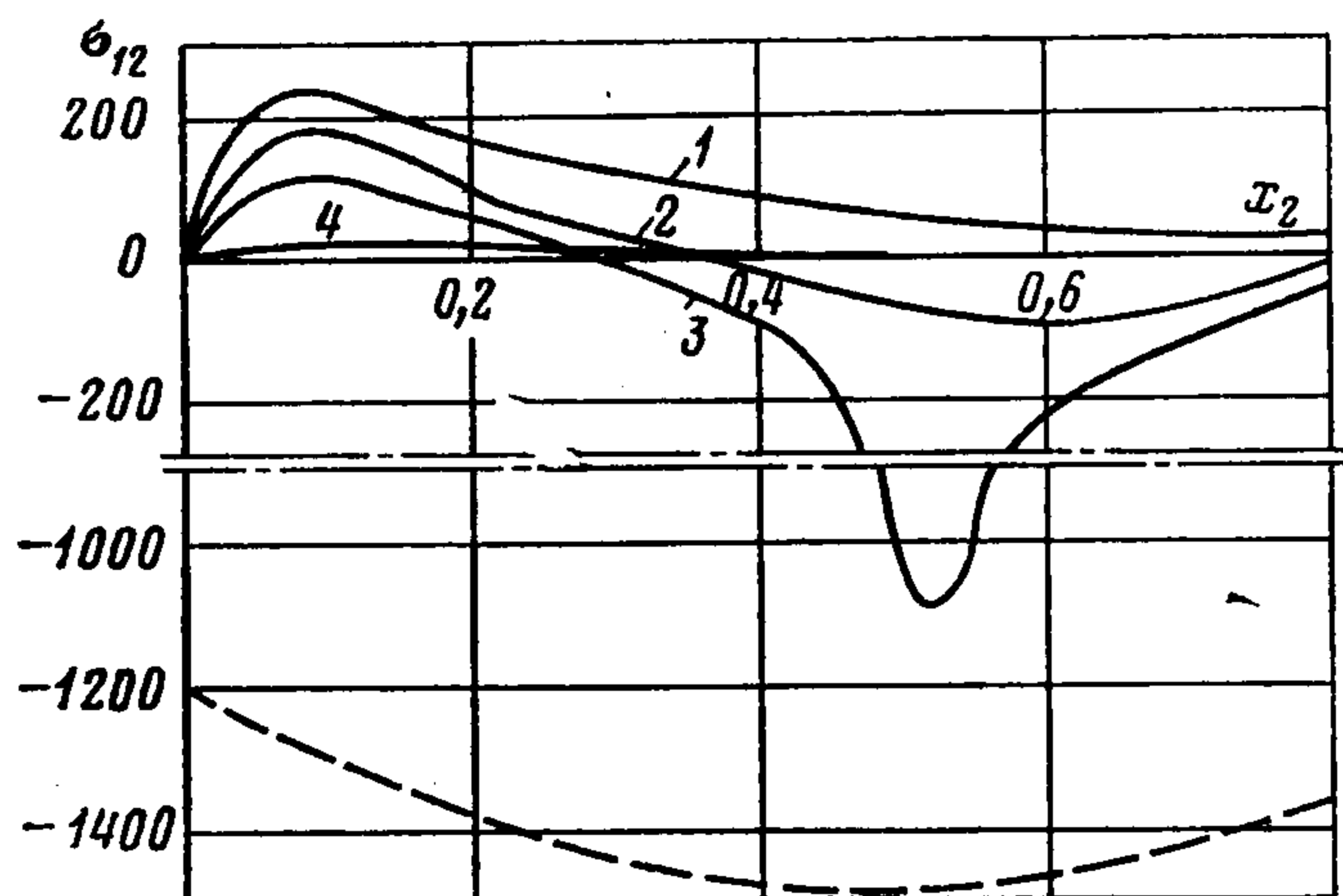
$$d = 1, \quad b = h = 0,5, \quad l = 10, \quad E = 10^6, \quad \nu = 0,3, \quad Q = 10^{-2}$$

Число уравнений системы (3.5) варьировалось, однако результаты являются устойчивыми и с увеличением числа уравнений системы практически не меняются. Значения первых коэффициентов разложения (3.3) следующие:  $a_0 = \bar{q}_1 = 504$ ,  $a_1 = 6,99$ ,  $a_2 = 56,9$ ,  $a_3 = -31,9$ ,  $a_4 = 22,6$ ,  $a_5 = -17,7$ ,  $a_6 = 14,5$ ,  $a_7 = -12,4$ ,  $a_8 = 10,8$ ,  $a_9 = -9,54$ .

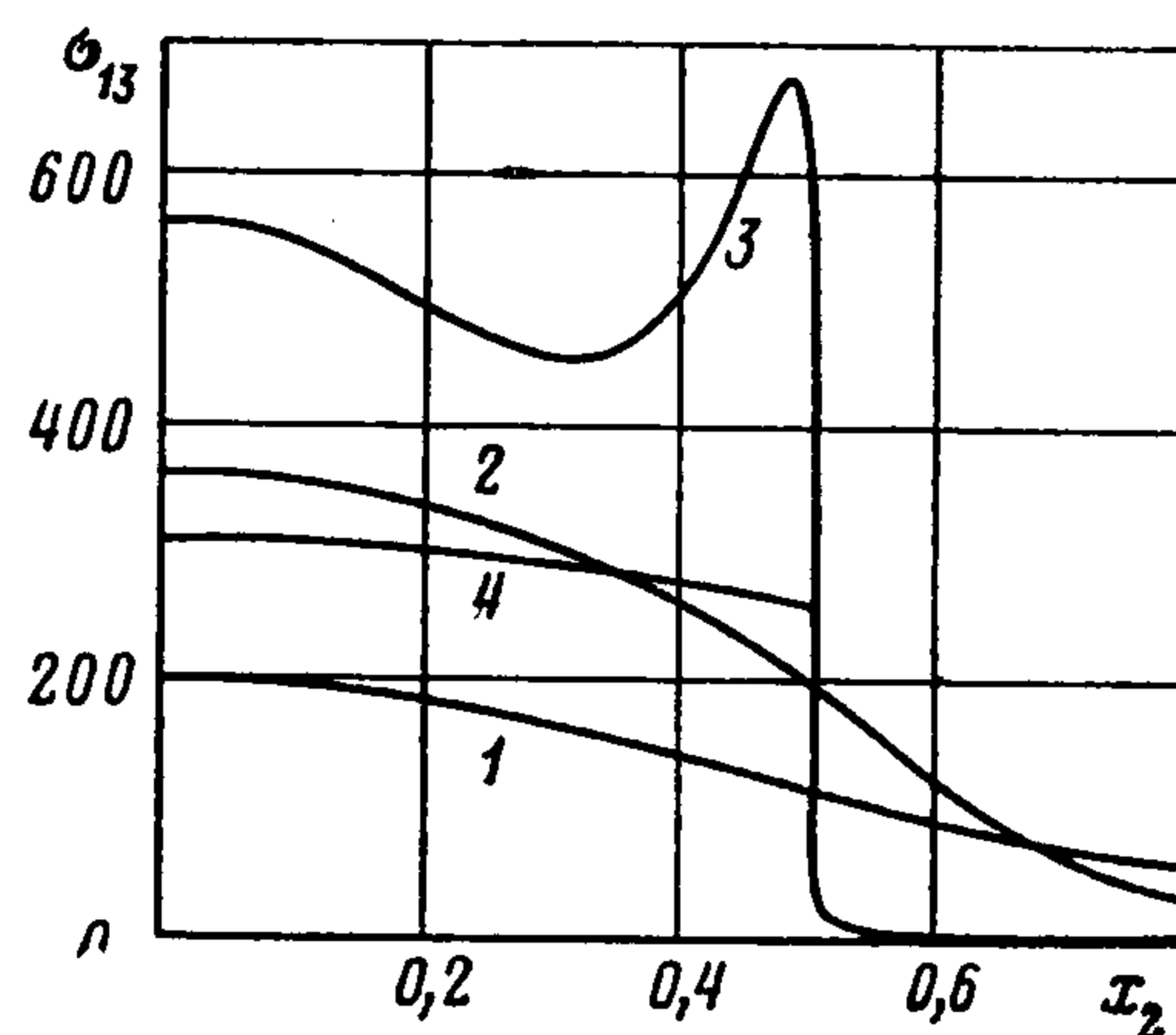
С использованием формул (4.4) и соотношений закона Гука для обобщенного плоского напряженного состояния определяются аналитические выражения для осредненных напряжений  $\sigma_{11*}$ ,  $\sigma_{12*}$ ,  $\sigma_{22*}$ . Из асимптотического анализа следует, что основными напряжениями дополнительного состояния являются  $\sigma_{12}^{ng}$ ,  $\sigma_{13}^{ng}$ ,  $\sigma_{12}^{pg}$ ,  $\sigma_{13}^{pg}$ , которые находятся через  $V_1^{(2)}$ ,  $W_1^{(2)}$  по формулам

$$\sigma_{12}^{ng} \approx \mu \frac{\partial V_{10}}{\partial x_2}, \quad \sigma_{13}^{ng} \approx \mu \frac{\partial V_{10}}{\partial x_3}, \quad \sigma_{12}^{pg} \approx \mu \frac{\partial W_{10}}{\partial x_2}, \quad \sigma_{13}^{pg} \approx \mu \frac{\partial W_{10}}{\partial x_3}$$

Результаты численной реализации указанных напряжений для  $x_1 = l/2$  показаны на фиг. 2 (напряжение  $\sigma_{12}$ ) и фиг. 3 (напряжение  $\sigma_{13}$ ). Штриховая линия соответствует осредненному напряжению  $\sigma_{12*}$ , а сплошная — дополнительным напряжениям. Кривая 1 построена для  $x_3 = 0$ , 2 — для  $x_3 = 0,3$ , 3 — для  $x_3 = 0,5$ , 4 — для  $x_3 = 1$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Сдвигающее напряжение  $\sigma_{13}^{ng} |_{x_3=0,5} = \sigma_{13}^{pg} |_{x_3=0,5}$  (кривая 3,  $|x_2| \leq b$ ) совпадает с контактным напряжением  $q_1(l/2, x_2)$ . Для сравнения следует отметить, что экстремальное значение (для  $x_1 = l/2$ ) имеет осредненное напряжение  $\sigma_{11*}$ , которое при  $x_2 = 1,2$  равно  $6,6 \cdot 10^8$ .

Из приведенных результатов следует, что основные напряжения дополнительного состояния локализованы вблизи зоны контакта и соизмеримы по величине со сдвигающим напряжением осредненного состояния, которое обычно определяется в рамках общепринятых расчетных схем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. Ребристые цилиндрические оболочки. Киев: Наукова думка, 1973. 248 с.
2. Маневич Л. И., Лобода В. В. Симметричная деформация ортотропного полуслоя, подкрепленного ребрами жесткости. — В кн.: Тр. X Всес. конференции по теории оболочек и пластин, Кутаиси, 1975. Т. 1. Тбилиси: Мецниереба, 1975, с. 175.
3. Грантер К. Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехиздат, 1956. 204 с.
4. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. — ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 668.
5. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.