Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 539.3

СТРУКТУРЫ РАЗНОСТНОГО ТИПА РЕШЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Рвачев В. Л., Синекоп Н. С.

Построены структуры решений первой и смешанной основных задач теории упругости для тел вращений конечных размеров. Структурные формулы представляются дифференциальными операторами с последующей их заменой разностными. При этом используются формулы свертки специального вида, построенные с помощью нормализованных до первого порядка уравнений границ областей.

1. Задачи теории упругости сводятся к интегрированию уравнений Ламе при соответствующих краевых условиях [1]:

а) первая основная задача

$$\sigma_\nu = f_1^\circ(r, z), \quad \tau_\nu = f_2^\circ(r, z), \quad (r, z) \in \partial\Omega \tag{1.1}$$

б) смешанная задача

$$u_r = g_1^\circ(r, z), \quad u_z = g_2^\circ(r, z), \quad (r, z) \in \partial\Omega_1 \tag{1.2}$$

$$\sigma_\nu = f_1^\circ(r, z), \quad \tau_\nu = f_2^\circ(r, z), \quad (r, z) \in \partial\Omega_2 \tag{1.3}$$

Здесь u_r, u_z — компоненты вектора перемещений, σ_ν, τ_ν — нормальное и касательное напряжения, f_1°, f_2°, g_1°, g_2° — заданные функции, $\partial\Omega$ — граница упругого тела Ω ($\partial\Omega = \partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_2$). Левые части соотношений (1.1), (1.3) через компоненты u_r, u_z выражаются формулами

$$\sigma_\nu = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial u_r}{\partial \nu} l + \frac{\partial u_z}{\partial \nu} m\right) + \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial \tau} m - \frac{\partial u_z}{\partial \tau} l + \frac{u_r}{r}\right) \tag{1.4}$$

$$\tau_\nu = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial \nu} m - \frac{\partial u_z}{\partial \nu} l + \frac{\partial u_r}{\partial \tau} l + \frac{\partial u_z}{\partial \tau} m\right)$$

где ν, τ — внешняя нормаль и касательная к $\partial\Omega$, l, m — направляющие косинусы нормали. Предполагается, что главный вектор и главный момент рассматриваемых упругих систем равны нулю.

Построим структуры решений указанных задач, т. е. определим выражения для компонент вектора перемещений в таком виде, чтобы соответствующие граничные условия удовлетворялись точно.

Следуя [2], обозначим через $\omega(r, z) = 0$ нормализованное до первого порядка уравнение $\partial\Omega$, т. е.

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\nabla\omega|_{\partial\Omega} = \partial\omega/\partial\nu|_{\partial\Omega} = 1 \tag{1.5}$$

В [2] введены операторы D_1 и T_1:

$$D_1 = \frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}, \quad T_1 = -\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.6}$$

которые определены в области $\Omega \bigcup \partial\Omega$, а на $\partial\Omega$ для них справедливы формулы

$$(1.7)\qquad D_1 f = -\frac{\partial f}{\partial \nu}, \quad T_1 f = \frac{\partial f}{\partial \tau}, \quad D_1(\omega f) = f, \quad T_1(\omega f) = 0$$

$$D_1 F(t) = \sum_{i=1}^{2} D_1 t_i \frac{\partial}{\partial t_i} F(t), \quad f \in C^1(\Omega), \quad F \in C^1(\Omega)$$

$$(t(r, z) = [t_1(r, z), t_2(r, z)])$$

В дальнейшем понадобятся некоторые формулы из [3]

$$(1.8)\qquad (Q_h - 1) f(r, z) = -\omega D_1 f(r, z) + O(\omega^2)$$

$$(Q_\tau - 1) f(r, z) = -\omega T_1 f(r, z) + O(\omega^2)$$

$$h_r = \omega(r_-, z) - \omega(r_+, z), \; h_z = \omega(r, z_-) - \omega(r, z_+)$$

$$h = (h_r, h_z), \quad \tau = (-h_z, h_r)$$

$$Q_h f(r, z) = f(r + h_r, z + h_z), \; Q_\tau f((r, z) = f(r - h_z, z + h_r)$$

$$r_\pm = r \pm {}^1/_2\omega(r, z), \quad z_\pm = z \pm {}^1/_2\, \omega(r, z)$$

Введем в рассмотрение формулы свертки

$$(1.9)\qquad \theta_{h_p}{}^{(s,q)} = \omega(L^{(s,q)}_{-h_p}) - \omega(L^{(s,q)}_{+h_p})$$

$$s = r, z; \; q = r, z, 0; \; p = r, z$$

$$L^{(s,r)}_{\pm h_p} = (r \pm {}^1/_2\theta^{(s,0)}_{h_p}, z), \; L^{(s,z)}_{\pm h_p} = (r, z \pm {}^1/_2\, \theta^{(s,0)}_{h_p})$$

$$L^{(r,0)}_{\pm h_p} = (r \pm {}^1/_2 h_p, z), \; L^{(z,0)}_{\pm h_p} = (r, z \pm {}^1/_2 h_p)$$

Для формул свертки (1.9) можно показать, что

$$(1.10)\qquad D_1\theta^{(s,q)}_{h_p} = -\frac{\partial\omega}{\partial s}\frac{\partial\omega}{\partial q}\frac{\partial\omega}{\partial p}$$

На основании свойств (1.7) оператора D_1 запишем

$$D_1\theta^{(s,q)}_{h_p} = D_1[\omega(L^{(s,q)}_{-h_p}) - \omega(L^{(s,q)}_{+h_p})] = D_1\omega(L^{(s,q)}_{-h_p}) -$$

$$- D_1\omega(L^{(s,q)}_{+h_p}) = \left[\frac{\partial\omega(L^{(s,q)}_{-h_p})}{\partial r} - \frac{\partial\omega(L^{(s,q)}_{+h_p})}{\partial r}\right]\frac{\partial\omega}{\partial r} +$$

$$+ \left[\frac{\partial\omega(L^{(s,q)}_{-h_p})}{\partial z} - \frac{\partial\omega(L^{(s,q)}_{+h_p})}{\partial z}\right]\frac{\partial\omega}{\partial z} -$$

$$- \frac{1}{2} D_1\theta^{(s,q)}_{h_p}\left[\frac{\partial\omega(L^{(s,q)}_{h_p})}{\partial q} + \frac{\partial\omega(L^{(s,q)}_{+h_p})}{\partial q}\right]$$

Аналогично

$$D_1\theta^{(s,0)}_{h_p} = \left[\frac{\partial\omega(L^{(s,0)}_{-h_p})}{\partial r} - \frac{\partial\omega(L^{(s,0)}_{+h_p})}{\partial r}\right]\frac{\partial\omega}{\partial r} +$$

$$+ \left[\frac{\partial\omega(L^{(s,0)}_{-h_p})}{\partial z} - \frac{\partial\omega(L^{(s,0)}_{+h_p})}{\partial z}\right]\frac{\partial\omega}{\partial z} - \frac{1}{2} D_1 h_p\left[\frac{\partial\omega(L^{(s,0)}_{-h_p})}{\partial s} +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial\omega(L^{(s,0)}_{+h_p})}{\partial s}\right], \quad D_1 h_p = -\frac{\partial\omega}{\partial p} D_1\omega$$

Переходя к пределу в полученных выражениях при $\omega(r, z) \to 0$ и учитывая непрерывность производных от $\omega(r, z)$, получим

$$(1.11)\qquad D_1\theta^{(s,q)}_{h_p} = -D_1\theta^{(s,0)}_{h_p}\frac{\partial\omega}{\partial q}, \quad D_1\theta^{(s,0)}_{h_p} = -D_1 h_p \frac{\partial\omega}{\partial s}$$

$$D_1 h_p = -\frac{\partial\omega}{\partial p}$$

Из (1.11) последовательным вложением получаем (1.10).

На основании формулы (1.10) находим

$$\theta_{h_p}^{(s,q)} = -\omega \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{\partial \omega}{\partial q} \frac{\partial \omega}{\partial p} + O(\omega^2)$$

Используя методику [3], запишем разностные операторы

$$(1.12) \qquad (Q_h^{(s,q)} - 1) f(r,z) = -\omega \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{\partial \omega}{\partial q} D_1 f(r,z) + O(\omega^2)$$

$$(Q_\tau^{(s,q)} - 1) f(r,z) = -\omega \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{\partial \omega}{\partial q} T_1 f(r,z) + O(\omega^2)$$

$$Q_h^{(s,q)} f(r,z) = f(r + \theta_{h_z}^{(s,q)}, z + \theta_{h_z}^{(s,q)})$$

$$Q_\tau^{(s,q)} f(r,z) = f(r - \theta_{h_z}^{(s,q)}, z + \theta_{h_r}^{(s,q)})$$

2. Построим структуру решения первой основной задачи. С помощью операторов (1.6) продолжим краевые условия (1.1) внутрь области Ω:

$$(2.1) \qquad (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} D_1 u_r + \frac{\partial \omega}{\partial z} D_1 u_z\right) +$$

$$+ \lambda\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} T_1 u_z - \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 u_r + \frac{u_r}{r}\right) = f_1 + \omega\varphi_{11}$$

$$\mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} D_1 u_r - \frac{\partial \omega}{\partial r} D_1 u_z - \frac{\partial \omega}{\partial r} T_1 u_r - \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 u_z\right) = f_2 + \omega\varphi_{21}$$

Здесь f_1, f_2 — продолжения функций f_1°, f_2° внутрь области Ω, которые можно осуществить по формулам, приведенным в [2]; φ_{11}, φ_{21} — некоторые неопределенные функции.

Структуру решения будем искать в виде

$$(2.2) \qquad u_r = \Phi_{11} + \omega\Phi_{12}^\circ, \quad u_z = \Phi_{21} + \omega\Phi_{22}^\circ$$

После подстановки выражений (2.2) в (2.1) и проведения некоторых преобразований, основанных на свойствах линейности операторов D_1 и T_1, получим систему относительно Φ_{12}°, Φ_{22}°:

$$(2.3) \qquad (\lambda + 2\mu)\left(\Phi_{12}^\circ \frac{\partial \omega}{\partial r} + \Phi_{22}^\circ \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) = \Psi_1 + \omega\varphi_{12}$$

$$\mu\left(\Phi_{12}^\circ \frac{\partial \omega}{\partial z} - \Phi_{22}^\circ \frac{\partial \omega}{\partial r}\right) = \Psi_2 + \omega\varphi_{22}$$

$$\Psi_1 = f_1 - (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} D_1\Phi_{11} + \frac{\partial \omega}{\partial z} D_1\Phi_{21}\right) -$$

$$- \lambda\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} T_1\Phi_{21} - \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1\Phi_{11} + \frac{\Phi_{11}}{r}\right)$$

$$\Psi_2 = f_2 - \mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} D_1\Phi_{11} - \frac{\partial \omega}{\partial r} D_1\Phi_{21} - \frac{\partial \omega}{\partial r} T_1\Phi_{11} - \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1\Phi_{21}\right)$$

где φ_{12}, φ_{22} — новые неопределенные функции. Из системы (2.3) получим выражения для Φ_{12}°, Φ_{22}°, после чего структуру решения (2.2) запишем в виде

$$(2.4) \qquad u_r = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} f_1 + \frac{1}{\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} f_2 + \Phi_{11} - \omega D_1\Phi_{11} +$$

$$+ \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} T_1\Phi_{11} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1\Phi_{11} -$$

$$- \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 T_1\Phi_{21} + \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 T_1\Phi_{21} -$$

$$- \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\Phi_{11}}{r} + \omega^2\Phi_{12}$$

$$u_z = -\frac{1}{\mu}\omega\frac{\partial\omega}{\partial r}f_2 + \frac{1}{\lambda+2\mu}\omega\frac{\partial\omega}{\partial z}f_1 + \Phi_{21} - \omega D_1\Phi_{21} -$$
$$-\omega\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial z}T_1\Phi_{21} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\omega\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial r}T_1\Phi_{21} - \omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2 T_1\Phi_{11} +$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 T_1\Phi_{11} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\omega\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\Phi_{11}}{r} + \omega^2\Phi_{22}$$

где Φ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — неопределенные компоненты структуры.

Заменяя в (2.4) выражения

$$\omega\frac{\partial\omega}{\partial p}, \omega D_1\Phi_{i1}, \omega\frac{\partial\omega}{\partial s}\frac{\partial\omega}{\partial q}T_1\Phi_{i1} \ (i = 1, 2;\ s = r, z;\ q = r, z;\ p = r, z)$$

разностными операторами (1.8), (1.12), запишем

$$u_r = -\frac{1}{\lambda+2\mu}h_r f_1 - \frac{1}{\mu}h_z f_2 + \Phi_{11} + (Q_h - 1)\Phi_{11} -$$
$$-(Q_\tau^{(z,r)} - 1)\Phi_{11} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(Q_\tau^{(r,z)} - 1)\Phi_{11} +$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(Q_\tau^{(r,r)} - 1)\Phi_{21} - (Q_\tau^{(z,z)} - 1)\Phi_{21} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}h_r\frac{\Phi_{11}}{r} +$$
$$+\omega^2\Phi_{12}$$
$$u_z = \frac{1}{\mu}h_r f_2 - \frac{1}{\lambda+2\mu}h_z f_1 + \Phi_{21} + (Q_h - 1)\Phi_{21} +$$
$$+(Q_\tau^{(r,z)} - 1)\Phi_{21} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(Q_\tau^{(z,r)} - 1)\Phi_{21} + (Q_\tau^{(r,r)} - 1)\Phi_{11} -$$
$$-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(Q_\tau^{(z,z)} - 1)\Phi_{11} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}h_z\frac{\Phi_{11}}{r} + \omega^2\Phi_{22}$$

3. Для смешанной задачи структуры решения будем представлять в виде

$$u_r = g_1 + \omega_1\Phi_{11} + \omega\Phi_{12}^\circ, \quad u_z = g_2 + \omega_1\Phi_{21} + \omega\Phi_{22}^\circ \tag{3.1}$$

где g_1, g_2 — продолжения внутрь области Ω функций g_1°, g_2°; $\omega_1 = 0$ — уравнение участка $\partial\Omega_1$, Φ_{11}, Φ_{21}, Φ_{12}°, Φ_{22}° — неопределенные функции. Структура (3.1) учитывает условия (1.2).

Обозначая через $\omega_2 = 0$ нормализованное до первого порядка уравнение участка $\partial\Omega_2$, краевые условия (1.3) продолжим в $\Omega \bigcup \partial\Omega_1$:

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial r}D_1^{(2)}u_r + \frac{\partial\omega_2}{\partial z}D_1^{(2)}u_z\right) + \lambda\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial r}T_1^{(2)}u_z -\right. \tag{3.2}$$
$$\left.-\frac{\partial\omega_2}{\partial z}T_1^{(2)}u_r + \frac{u_r}{r}\right) = f_1 + \omega_2\varphi_{11}$$
$$\mu\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}D_1^{(2)}u_r - \frac{\partial\omega_2}{\partial r}D_1^{(2)}u_z - \frac{\partial\omega_2}{\partial r}T_1^{(2)}u_r - \frac{\partial\omega_2}{\partial z}T_1^{(2)}u_z\right) = f_2 + \omega_2\varphi_{21}$$

Здесь φ_{11}, φ_{21} — произвольные функции. В формуле (3.2) и далее индекс 2 в круглых скобках означает, что операторы (дифференциальные и разностные) берутся по функции ω_2.

Подставляя выражения для u_r и u_z из (3.1) в формулы (3.2) и повторяя выкладки, которые проводились при построении структуры решения первой основной задачи, получим

$$\Phi_{12}^\circ = \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\omega_2}{\partial r}f_1 + \frac{1}{\mu}\frac{\partial\omega_2}{\partial z}f_2 - D_1^{(2)}\Phi_{11}^\circ + \frac{\partial\omega_2}{\partial z}\frac{\partial\omega_2}{\partial r}T_1^{(2)}\Phi_{11}^\circ + \tag{3.3}$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\partial\omega_2}{\partial z}T_1^{(2)}\Phi_{11}^\circ - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\right)^2 T_1^{(2)}\Phi_{21}^\circ +$$

$$+\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2 T_1^{(2)}\Phi_{21}{}^\circ - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\Phi_{11}{}^\circ}{r} + \omega_2\Phi_{12}$$

$$\Phi_{22}{}^\circ = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial\omega_2}{\partial r} f_2 + \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\omega_2}{\partial z} f_1 - D_1^{(2)}\Phi_{21}{}^\circ - \frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\partial\omega_2}{\partial z} \times$$

$$\times T_1^{(2)}\Phi_{21}{}^\circ - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\frac{\partial\omega_2}{\partial r} T_1^{(2)}\Phi_{21}{}^\circ - \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\right)^2 T_1^{(2)}\Phi_{11}{}^\circ +$$

$$+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2 T_1^{(2)}\Phi_{11}{}^\circ - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\frac{\Phi_{11}{}^\circ}{r} + \omega_2\Phi_{22}$$

$$\Phi_{11}{}^\circ = g_1 + \omega_1\Phi_{11}, \quad \Phi_{21}{}^\circ = g_2 + \omega_1\Phi_{21}$$

где Φ_{12}, Φ_{22} — неопределенные компоненты структуры.

Согласно формулам (3.1), (3.3), структура решения смешанной задачи, записанная через разностные операторы (1.8), (1.12), будет иметь вид

$$u_r = g_1 - \frac{1}{\lambda+2\mu} h_r^{(2)} f_1 - \frac{1}{\mu} h_z^{(2)} f_2 + \omega_1\Phi_{11} + (Q_{h(2)} - 1)\Phi_{11}{}^\circ -$$

$$-(Q_{\tau(2)}^{(z,r)} - 1)\Phi_{11}{}^\circ - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(Q_{\tau(2)}^{(r,z)} - 1)\Phi_{11}{}^\circ + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(Q_{\tau(2)}^{(r,r)} - 1)\Phi_{21}{}^\circ -$$

$$-(Q_{\tau(2)}^{(z,z)} - 1)\Phi_{21}{}^\circ + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} h_r^{(2)}\frac{\Phi_{11}{}^\circ}{r} + \omega\omega_2\Phi_{12}$$

$$u_z = g_2 + \frac{1}{\mu} h_r^{(2)} f_2 - \frac{1}{\lambda+2\mu} h_z^{(2)} f_1 + \omega_1\Phi_{21} + (Q_{h(2)} - 1)\Phi_{21}{}^\circ +$$

$$+(Q_{\tau(2)}^{(r,z)} - 1)\Phi_{21}{}^\circ + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(Q_{\tau(2)}^{(z,r)} - 1)\Phi_{21}{}^\circ + (Q_{\tau(2)}^{(r,r)} - 1)\Phi_{11}{}^\circ -$$

$$-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(Q_{\tau(2)}^{(z,z)} - 1)\Phi_{11}{}^\circ + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} h_z^{(2)}\frac{\Phi_{11}{}^\circ}{r} + \omega\omega_2\Phi_{22}$$

Построенные структурные формулы содержат ряд произвольных функций, выбором которых можно распорядиться для удовлетворения уравнениям Ламе внутри области Ω и учета известных особенностей решений (действие сосредоточенных сил [1], влияние входящих углов и линий смены граничных условий [4] и т. д.).

Структуры разностного типа, отвечающие краевым условиям осесимметричных задач теории упругости, реализованы в генераторе програм «ПОЛЕ-3», разработанном в Институте проблем машиностроения АН УССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. *Рвачев В. Л.* Методы алгебры логики в математической физике. Киев: Наукова думка, 1974. 259 с.
3. *Рвачев В. Л., Рвачев В. А.* Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. Киев: Наукова думка, 1979. 196 с.
4. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401 с.

Харьков

Поступила в редакцию
28.VII.1980