Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 539.3

ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Бурышкин М. Л.

Изучается схема внесения упрощений в расчеты напряженно-деформированного состояния линейной симметричной механической системы при несимметрических нагрузках. Исследуемое неоднородное уравнение формулируется в общей форме и охватывает разнообразные задачи механики деформируемого тела. Постановка задачи, отдельные результаты и этапы предлагаемой схемы иллюстрируются на примере дискретных методов и плоской задачи теории упругости.

1. Абстрактная постановка. Рассмотрим упруголинейную механическую систему S, расположенную в области Ω, и сформулируем для нее неоднородную задачу, сводящуюся к решению операторного уравнения

$$Au = v, \quad u \in L_1, \quad v \in L_2 \tag{1.1}$$

Здесь L_1 и L_2 — некоторые пространства функций, определенных на Ω, A — линейный оператор, действующий из L_1 в L_2. Функция u описывает напряженно-деформированное состояние системы S, а функция v — заданные нагрузку и перемещения. Для краткости u и v будем называть соответственно функциями состояния и нагрузки.

Обычно уравнение (1.1) не исследуется непосредственно, а заменяется формализованным определенным образом разрешающим уравнением

$$BU = V, \; U \in L'_1, \; V \in L'_2 \tag{1.2}$$

где L_1' и L_2' — пространства формализованных функций состояний и нагрузки, B — линейный оператор, действующий из L_1' в L_2'. При этом имеют место соотношения

$$u = B_1 U, \quad V = B_2 v \tag{1.3}$$

Под B_1 и B_2 понимаются известные линейные операторы, действующие из L_1' в L_1 и из L_2 в L_2'. Так как в большинстве задач механики деформируемого тела элементы из нуль-пространств операторов A, B_1 и B_2 не представляют интереса, то в дальнейшем их выбор будет определяться соображениями компактности изложения.

Приведем три распространенных и исследуемых в дальнейшем примера указанной формализации.

Дискретные методы. Вместо Ω используется дискретная (сеточная) область. Оператор B_2 осуществляет замену нагрузки силами, сосредоточенными в узлах сетки, и переход от функции v к вектору V, компоненты которого характеризуют заданные силы и перемещения в узлах.

Роль оператора B_1 заключается в приближенном переходе от компонент вектора U к значениям компонент напряженно-деформированного состояния в узлах сетки и их интерполяции на другие точки области Ω.

Конечно-мерные пространства L_1' и L_2' сливаются в одно — L'. Выбор координатных осей и неизвестных, осуществляемый расчетчиком, по сути определяет базис в L'. Оператор B заменяется матрицей, соответствующей ему в указанном базисе, а разрешающее уравнение (1.2) — системой линейных алгебраических уравнений.

Плоская задача теории упругости для изотропной среды [1]. Плоскость, в которой расположена область Ω, считается комплексной, $z = x + iy$ — аффикс ее точки с координатами x и y. Вместо (1.2) имеем

$$K_1\varphi(t_p) + K_2\,[\overline{t_p\varphi'(t_p)} + \overline{\psi(t_p)}] = f_p(t_p) \quad (p = 1, 2, \ldots, N_0) \tag{1.4}$$

где K_1 и K_2 — коэффициенты, зависящие от граничных условий, N_0 — число контуров, образующих границу области Ω, p — номер контура, t_p — точка p-го контура, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили, аналитические в Ω. Введенные ранее абстрактные понятия приобретают здесь следующий смысл: $U = \{\varphi(z), \psi(z)\}$, $V = \{f_p(t_p)\}_{p=1}^{N_0}$. Операторы B, B_1 и B_2 описываются соответственно уравнениями (1.4), соотношениями между комплексными потенциалами и компонентами напряженно-деформированного состояния и связью между нагрузкой и функциями $f_p(t_p)$.

Плоская задача для анизотропной среды [2, 3]. Применяющаяся формализация близка к предыдущей. Разрешающими являются уравнения

$$2\mathrm{Re}\,[K_{1r}W_1(t_{p1}) + K_{2r}W_2(t_{p2})] = f_{pr}(t_p) \quad (p = 1, 2, \ldots, N_0;\ r = 1, 2) \tag{1.5}$$

где K_{jr} $(j, r = 1, 2)$ — коэффициенты, зависящие от граничных условий

$$z_j = x + \mu_j y \quad (j = 1, 2) \tag{1.6}$$

$W_j(z_j)$ — комплексные потенциалы С. Г. Лехницкого, аналитические в областях Ω_j, причем Ω_j и t_{pj} получены из Ω и t_p преобразованием (1.6). Здесь

$$U = \{W_1(z_1),\ W_2(z_2)\}, \quad V = \{f_{p1}, f_{p2}\}_{p=1}^{N_0}$$

2. Симметрия механических систем [4]. Элементом симметрии системы S назовем такое движение в пространстве, при котором оно перейдет в положение, неразличимое с исходным. Это — поворот C_m $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$ вокруг оси n-го порядка, отражение Θ в некоторой плоскости, трансляция (параллельный перенос) $T_{m_1m_2m_3}$ $(m_1,\ m_2,\ m_3 = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ на вектор $m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3$, где $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ — основные векторы, тривиальное движение $e = C_0 = T_{000}$ и т. п. Введем для элементов симметрии операцию умножения, принимая их композицию в качестве произведения. Тогда множество G элементов симметрии окажется группой.

Механическую систему S с группой G симметрии можно разделить на такие одинаковые части — элементарные ячейки, что под действием нетривиального элемента $g \in G$ каждая из них не останется на месте, а совместится с какой-нибудь другой ячейкой. Эти части удобно «нумеровать» с помощью элементов симметрии. Зафиксируем некоторую ячейку S^e и назовем ее основной, а ячейку, получаемую из S^e движением $g \in G$, обозначим через S^g, т. е. $S^g = gS^e$. Разобьем на ячейки Ω^g $(g \in G)$ область Ω, считая, что в Ω^g расположена ячейка S^g.

Значения компонент напряженно-деформированного состояния и нагрузки, описываемых функциями u и v, зависят от системы координатных осей. Для симметричной конструкции будем пользоваться инвариантной системой. Смысл ее заключается в том, что на каждой ячейке Ω^g области Ω вводится своя локальная система отсчета $\omega^g = g\omega^e$, получающаяся из системы ω^e основной ячейки движением g.

Подействуем на конструкцию S элементом симметрии g. При этом напряженно-деформированное состояние в любой зафиксированной точке конструкции не изменится, но сама точка переместится относительно области Ω. Обозначим через z и gz те точки области Ω, с которыми совпадает указанная точка конструкции до и после перемещения. Напряженно-деформированное состояние конструкции gS описывается функцией u_g, значение которой в точке $gz \in \Omega$ равно (в инвариантной системе отсчета) значению функции u в точке z, т. е. $u_g(gz) = u(z)$ или $u_g(z) = u(g^{-1}z)$ (g^{-1} — движение, обратное элементу g).

Введем абстрактное правило действия элемента $g \in G$ на любую функцию F, заданную на Ω, считая результатом этого действия функцию $gF = F_g$, для которой

$$F_g(z) = F(g^{-1}z) \tag{2.1}$$

Подчеркнем механическую трактовку правила (2.1): gu и gv — функции состояния и нагрузки конструкции gS. Такая трактовка удобна для выявления важных свойств неоднородной задачи, обусловленных симметрией механической системы S.

Свойство 1. Если $u \in L_1$ $(v \in L_2)$, то $gu \in L_1$ $(gv \in L_2)$.

В самом деле, пространства L_1 и gL_1 функций состояния систем S и gS в силу «неразличимости» последних совпадают. Более того, наряду с (1.1) удовлетворяется уравнение $Au_g = v_g$. Отсюда вытекает

Свойство 2. $Ag = gA$.

3. Обобщенные симметричные задачи. Симметрические свойства функций, заданных на области Ω с группой G симметрии, весьма разнообразны. Наиболее полно и рационально они могут быть описаны с помощью специального аппарата неприводимых представлений групп [4].

Под $m_{k\nu}$-мерным неприводимым представлением $\tau_{k\nu}$ группы G понимается набор некоторых унитарных матриц $\tau_{k\nu}(g)$ $(g \in G)$ порядка $m_{k\nu}$, обладающих рядом специальных свойств. Любая группа симметрии имеет свое, заранее известное множество неприводимых представлений. Неприводимые представления $\tau_{k\nu}$ группы G различаются двумя индексами: векторным k и скалярным ν, причем для групп с конечным числом элементов можно положить $k \equiv 0$. Самым простым из неприводимых представлений является единичное τ_{01}, для которого $m_{01} = 1$ и $\tau_{01}(g) \equiv 1$.

Каждое представление $\tau_{k\nu}$ описывает симметрические свойства некоторого набора, состоящего из $m_{k\nu}$ функций $F_{k\nu\rho}$ $(\rho = 1, 2, \ldots m_{k\nu})$ и преобразующегося по этому представлению. Последнее одначает, что любая (μ-я) функция набора удовлетворяет условиям

$$gF_{k\nu\mu} = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\rho\mu}(g) F_{k\nu\rho}, \quad \forall g \in G \tag{3.1}$$

где $\tau_{k\nu\rho\mu}(g)$ — $\rho\mu$-й элемент матрицы $\tau_{k\nu}(g)$.

Записывая свойство (3.1) в некоторой точке $z \in \Omega^e$, а также учитывая равенство (2.1) и унитарность матриц $\tau_{k\nu}(g)$, получим

$$
F_{k\nu\mu}(gz) = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \overline{\tau_{k\nu\mu\rho}(g)} F_{k\nu\rho}(z), \quad \forall g \in G, \quad \forall z \in \Omega^e \tag{3.2}
$$

Из (3.2) вытекает, что функция $F_{k\nu\mu}$ однозначно определяется заданием всех функций $F_{k\nu\rho}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$) на ячейке Ω^e области Ω.

Если функция нагрузки в уравнении (1.1) входит в набор, преобразующийся по неприводимому представлению группы G, то соответствующую неоднородную задачу будем называть обобщенной симметричной. Ее решение в силу условий (3.1) всегда сопровождается упрощениями, характер которых обсуждается ниже. Так как симметричная (циклическая, периодическая и т. п.) нагрузка преобразуется по представлению τ_{01}, то обычная симметричная задача является частным случаем обобщенной.

4. Упрощения в обобщенной симметричной задаче. Продолжим перечень симметрических свойств неоднородной задачи.

Свойство 3. Для того чтобы функция состояния преобразовывалась по представлению $\tau_{k\nu}$ группы G как μ-я функция набора, необходимо и достаточно, чтобы так же преобразовывалась функция нагрузки.

Докажем, например, необходимость. Для этого предположим, что функция $u_{k\nu\mu}$ входит в набор функций $u_{k\nu\rho}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$), преобразующийся по представлению $\tau_{k\nu}$, и введем функции $v_\rho = Au_{k\nu\rho}$. Действуя элементом $g \in G$ на обе части равенства $v_\mu = Au_{k\nu\mu}$, а также учитывая свойство 2 и соотношение (3.1), получим искомый результат

$$
gv_\mu = gAu_{k\nu\mu} = Agu_{k\nu\mu} = A \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\rho\mu}(g)\, u_{k\nu\rho} = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\rho\mu}(g)\, v_\rho
$$

Свойство 4. Если формализованные функции $U_{k\nu\rho}$ ($V_{k\nu\rho}$), отвечающие функциям $u_{k\nu\rho}$ ($v_{k\nu\rho}$), записать в инвариантной системе отсчета, то они также преобразуются по представлению $\tau_{k\nu}$.

В силу механической трактовки действия движения g на функции под $gv_{k\nu\mu}$ и $gV_{k\nu\mu}$ следует понимать обычную и формализованную функцию нагрузки конструкции gS. Следовательно, $gV_{k\nu\mu} = B_2(gv_{k\nu\mu})$, и на основании равенства (3.1)

$$
gV_{k\nu\mu} = B_2(gv_{k\nu\mu}) = B_2 \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\rho\mu}(g)\, v_{k\nu\rho} = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\rho\mu}(g)\, V_{k\nu\rho}
$$

При доказательстве остальных частей свойств 3 и 4 произвольные функции нуль-пространств операторов A и B_1 следует положить равными нулю.

Свойство 5. Всевозможные формализованные функции $U_{k\nu\mu}$ ($V_{k\nu\mu}$) образуют подпространство $L'_{1k\nu\mu} \subset L_1'$ ($L'_{2k\nu\mu} \subset L_2'$).

Это свойство, вытекающее из линейности операторов g, B_1 и B_2, позволяет установить между μ-ми функциями состояния (нагрузки), преобразующимися по представлению $\tau_{k\nu}$, и элементами $U^{(k\nu)}$ ($V^{(k\nu)}$) некоторых пространств $L_1^{(\mathbf{k}\nu)}$ ($L_2^{(\mathbf{k}\nu)}$) изоморфные соответствия

$$(4.1)\qquad U_{\mathbf{k}\nu\mu} \leftrightarrow U^{(\mathbf{k}\nu)},\quad V_{\mathbf{k}\nu\mu} \leftrightarrow V^{(\mathbf{k}\nu)}$$

Основной изоморфизм. Если F — функция, определенная на области Ω, то под $F|_e$ будем понимать функцию, определенную на ячейке Ω^e с помощью равенства

$$(4.2)\qquad F|_e(z) = F(z),\ \forall z \in \Omega^e$$

Рассмотрим пространства $L_1^{(\mathbf{k}\nu)}$ и $L_2^{(\mathbf{k}\nu)}$, образованные всевозможными наборами

$$(4.3)\qquad U^{(\mathbf{k}\nu)} = \{U_{\mathbf{k}\nu\rho}|_e\}_{\rho=1}^{m_{\mathbf{k}\nu}},\quad V^{(\mathbf{k}\nu)} = \{V_{\mathbf{k}\nu\rho}|_e\}_{\rho=1}^{m_{\mathbf{k}\nu}}$$

В силу выражений (3.2) и свойства 4 они изоморфны подпространствам $L'_{1\mathbf{k}\nu\mu}$ и $L'_{2\mathbf{k}\nu\mu}$. При этом соответствия (4.1) устанавливаются между теми их элементами, которые удовлетворяют условию (4.3).

Для многосвязных областей Ω иногда удобно пользоваться модификацией основного изоморфизма. Суть ее заключается в том, что в ряде обобщенных симметричных задач формализованная функция состояния выражается через наборы $U^{(\eta)}$ ($\eta = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m_{\mathbf{k}\nu}$) некоторых функций, определенных на внешности основной граничной поверхности (контура). Тогда в качестве $L^{(\mathbf{k}\nu)}$ можно принять пространство с элементами

$$U^{(\mathbf{k}\nu)} = \{U^{(\eta)}\}_{\eta=1}^{m_{\mathbf{k}\nu}}$$

Изотропная среда. Под $U^{(\eta)}$ следует понимать совокупность двух функций $\Phi^{(\eta)}(z)$ и $\Psi^{(\eta)}(z)$, аналитических на внешности основного контура. Взаимно однозначная связь между потенциалами Колосова — Мусхелишвили обобщенной симметричной задачи и функциями $\Phi^{(\eta)}(z)$, $\Psi^{(\eta)}(z)$ ($\eta = 1, 2, \ldots, m_{\mathbf{k}\nu}$) устанавливается специальными соотношениями [5].

Ортотропная среда. С помощью метода, изложенного в [5], и свойства 3 комплексные потенциалы С. Г. Лехницкого в обобщенной симметричной задаче выражаются через функции $W_j(z_j)$, аналитические на внешности основного контура области Ω_j

$$(4.4)\qquad W_{j\mathbf{k}\nu\mu}(z_j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{m_1=0}^{N}\sum_{m_2=0}^{N}\sum_{m=0}^{1}\sum_{\eta=1}^{m_{\mathbf{k}\nu}} (-1)^m \{\tau_{\mathbf{k}\nu\mu\rho}(T_{m_1m_2}C_m)\times$$
$$\times W_j^{(\eta)}[(-1)^m(z_j - A_{m_1m_2j})] +$$
$$+ \tau_{\mathbf{k}\nu\mu\rho}(T_{m_1m_2}C_m\Theta)\overline{W_i^{(\eta)}}[(-1)^m(z_j - A_{m_1m_2j})]\}$$
$$A_{m_1m_2j} = m_1a_{11} + m_2a_{21} + \mu_j(m_1a_{12} + m_2a_{22})\ (\mu = 1, 2, \ldots, m_{\mathbf{k}\nu};\ j = 1, 2)$$

где C_m ($m = 0, 1$) — поворот вокруг начала координат на угол $m\pi$, Θ — отражение относительно оси x, μ_j ($j = 1, 2$) — комплексные параметры С. Г. Лехницкого, a_{r1} и a_{r2} ($r = 1, 2$) — проекции вектора $\mathbf{a}_r$ на оси x и y. В правой части соотношений (4.4) удерживаются слагаемые, отвечающие элементам $g \in G$.

Очевидно, что $U^{(\eta)} = \{W_1^{(\eta)}(z_1),\ W_2^{(\eta)}(z_2)\}$.

Свойство 6. При зафиксированных изоморфизмах (4.1) обобщенная симметричная задача сводится к решению уравнения

$$(4.5)\qquad B^{(\mathbf{k}\nu)}U^{(\mathbf{k}\nu)} = V^{(\mathbf{k}\nu)}$$

причем оператор $B^{(\mathbf{k}\nu)}$ определяется соответствием

$$(4.6)\qquad B^{(\mathbf{k}\nu)}U^{(\mathbf{k}\nu)} \leftrightarrow BU_{\mathbf{k}\nu\mu}\ (U^{(\mathbf{k}\nu)} \leftrightarrow U_{\mathbf{k}\nu\mu})$$

Переход от уравнения (1.2) к (4.5) представляет собой абстрактное внесение упрощений в решение обобщенной симметричной задачи.

Дискретные методы. В качестве условия (4.1) используем основной изоморфизм. Размерность конечно-мерного пространства $L^{(k\nu)} = L_1^{(k\nu)} = L_2^{(k\nu)}$ значительно меньше, чем размерность пространства L'. В связи с этим уравнение (4.5) сводится к системе алгебраических уравнений относительно низкого порядка. Матрица этой системы, отвечающая оператору $B^{(k\nu)}$, строится в п. 6.

Плоская задача для изотропной среды. Для пространства $L'_{2k\nu\mu}$ применим основной изоморфизм, т. е. положим $V^{(k\nu)} = \{f^{(\rho)}(t)\}_{\rho=1}^{m_{k\nu}}$, где $t = t_1$ — точка основного контура, а $f^{(\rho)}(t)$ — правая часть соответствующего уравнения (1.4), записанного для нагрузки $v_{k\nu\rho}$. Искомые потенциалы $\varphi_{k\nu\mu}(z)$ и $\psi_{k\nu\mu}(z)$, которые однозначно определяются функциями $f^{(\rho)}(t)$, могут быть найдены из граничных условий основного контура, составленных для каждой из нагрузок $v_{k\nu\rho}$

$$K_1\varphi_{k\nu\rho}(t) + K_2[t\overline{\varphi'_{k\nu\rho}(t)} + \overline{\psi_{k\nu\rho}(t)}] = f^{(\rho)}(t) \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}) \tag{4.7}$$

Применяя для формализованных функций состояния модифицированный изоморфизм и подставляя в (4.7) выражения из [5], связывающие потенциалы $\varphi_{k\nu\rho}(z)$ и $\psi_{k\nu\rho}(z)$ с функциями $\Phi^{(\eta)}(z)$ и $\Psi^{(\eta)}(z)$ ($\eta = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$), получим систему уравнений относительно $\Phi^{(\eta)}(z)$ и $\Psi^{(\eta)}(z)$. Эта система является конкретной формой уравнения (4.5) в рассматриваемой задаче и описывает соответствующий оператор $B^{(k\nu)}$.

Плоская задача для ортотропной среды. Построение оператора $B^{(k\nu)}$, т. е. системы уравнений, определяющей функции $W_j^{(\eta)}(z_j)$ ($\eta = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$; $j = 1, 2$) через функции $f_r^{(\rho)}(t)$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$; $r = 1, 2$), осуществляется подстановкой выражений (4.4) в уравнения

$$2\operatorname{Re}[K_{1r}W_{1k\nu\rho}(t_{11}) + K_{2r}W_{2k\nu\rho}(t_{12})] = f_r^{(\rho)}(t) \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu};\ r = 1, 2) \tag{4.8}$$

Замечание. В системах (4.7) и (4.8) используются граничные условия только на основном контуре Г. Рассмотрим теперь контур $\Gamma^g = g\Gamma^e$. Для него в обобщенной симметричной задаче граничные условия имеют вид

$$(BU_{k\nu\mu})(t^g) = V_{k\nu\mu}(t^g), \quad \forall g \in G, \quad \forall t^g \in \Gamma^g \tag{4.9}$$

Так как $BU_{k\nu\mu} \in L_{2k\nu\mu}$, то, используя свойство 4, равенство (3.2) и очевидное соотношение $t^g = gt$, запишем выражение (4.9) в форме

$$\sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \overline{\tau_{k\nu\mu\rho}(g)}\,(BU_{k\nu\rho})(t) = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \overline{\tau_{k\nu\mu\rho}(g)}\,V_{k\nu\rho}(t) \tag{4.10}$$

Граничные условия типа (4.7) и (4.8) представляют собой уравнения $(BU_{k\nu\rho})(t) = V_{k\nu\rho}(t)$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$), поэтому после их решения равенства (4.10), а следовательно, и граничное условие (4.9), будут удовлетворяться автоматически.

5. Общая схема. Указанные упрощения обобщенных симметричных задач могут быть использованы и в случае произвольного загружения симметричной механической системы. Дело в том, что практически любая нагрузка конструкции S с группой G симметрии представима в виде комбинации составляющих, преобразующихся по неприводимым представлениям группы G [6, 7], и в силу линейности исходная задача распадается на несколько обобщенных симметричных.

Предлагаемая схема исследования неоднородной задачи для симметричной механической системы состоит из трех этапов: а) разложение нагрузки на составляющие, преобразующиеся по неприводимым представлениям групп симметрии, б) решение уравнений (4.5) для соответствующих обобщенных симметричных задач, в) суперпозиция полученных результатов.

Применение указанной схемы для любого нового класса задач связано с проблемами исследования структуры пространств $L'_{1k\nu\mu}$, $L'_{2k\nu\mu}$ и построения конкретной формы оператора $B^{(k\nu)}$. Иллюстрациями могут послужить приведенные выше решения таких проблем для плоской задачи теории упругости изотропных и ортотропных сред. Использованный при этом принцип построения оператора $B^{(k\nu)}$ остается удобным и для многих других задач теории тонких и толстых густоперфорированных пластин, оболочек и т. п. Специфический подход к решению указанных проблем в случае дискретных методов изложен в п. 6.

В тех классах задач, для которых уже установлены необходимые изоморфизмы и конкретная форма оператора $B^{(k\nu)}$, предлагаемая схема позволяет существенно уменьшить число связанных между собой разрешающих уравнений, а следовательно, и объем вычислительной работы. Уменьшение числа уравнений удается проследить на всех приводимых примерах, имея в виду, что величина $m_{k\nu}$ очень мала по сравнению с N_0 — числом ячеек механической системы. На тех же примерах можно убедиться в следующей оценке эффективности рассматриваемой схемы расчета: объем вычислений, необходимый для решения обобщенной симметричной задачи, снижается более чем в $(N_0/m_{k\nu})^2$ раз.

Как правило, решение уравнения (4.5) может быть осуществлено методами, пригодными для обычного симметричного загружения.

6. Дискретные методы. Потребуем, чтобы сетка обладала той же, что и конструкция S, группой G симметрии, и пронумеруем узлы ячейки Ω^e от 1 до N (число узлов в ячейке). Если n_p — число степеней свободы узла $z_p \in \Omega^e$ $(p = 1, 2, \ldots, N)$, то $U\langle t, p, g\rangle$ $(t = 1, 2, \ldots, n_p)$ — t-я компонента вектора U в узле $gz_p \in \Omega^g$. Будем считать, что компоненты $U\langle t, p, e\rangle$ и $U\langle t, p, g\rangle$ имеют одинаковый физический смысл относительно систем отсчета ω^e и ω^g соответственно, и положим

$$(6.1)\qquad U = \| U\langle g\rangle \|_{g\in G},\quad U\langle g\rangle = \| U\langle p, g\rangle \|_{p=1}^{N},\quad U\langle p, g\rangle = \| U\langle t, p, g\rangle \|_{t=1}^{n_p}$$

Заметим, что узел z_p, вообще говоря, может одновременно входить в несколько ячеек. Несмотря на то, что число компонент в этом случае оказывается избыточным, структура (6.1) остается весьма удобной.

В силу симметрии конструкции S оператор B полностью определяется системой алгебраических уравнений

$$(6.2)\qquad \sum_{g\in G} B\langle e, g\rangle U\langle g\rangle = V\langle e\rangle,\quad B\langle e, g\rangle = \| B\langle p, e, q, g\rangle \|_{p,q=1}^{N}$$

где $B\langle p, e, q, g\rangle$ — некоторые прямоугольные матрицы размерности $n_p \times n_q$, причем их столбцы, отвечающие избыточным компонентам, считаются нулевыми.

Как уже указывалось, в качестве соответствия (4.1) здесь целесообразно использовать основной изоморфизм. Согласно формулам (4.3), положим

$$(6.3)\qquad U^{(\mathbf{k}\nu)} = \| U^{(\mathbf{k}\nu)} \langle p\rangle \|_{p=1}^{N}, \quad U^{(\mathbf{k}\nu)} \langle p\rangle = \| U^{(\mathbf{k}\nu)} \langle \rho, p\rangle \|_{\rho=1}^{m_{\mathbf{k}\nu}}$$
$$U^{(\mathbf{k}\nu)} \langle \rho, p\rangle = U_{\mathbf{k}\nu\rho} \langle p, e\rangle$$

Рассмотрим вопрос о построении базиса в пространстве $L^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle$, образованном подвекторами $U^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle$. Предположим для этого, что $G^p \subset G$ — группа узла z_p, т. е. множество элементов $g^p \in G$, которые оставляют узел z_p на месте. Так как данный узел должен принадлежать одновременно всем ячейкам Ω^g $(g \in G^p)$, то между компонентами вектора U имеют место связи следующего типа:

$$(6.4)\qquad \sum_{q=1}^{n_p} h_{qt}^{(p)}(g^p)\, U\langle q, p, e\rangle = \sum_{q=1}^{n_p} h_{qt}^{(p)'}(g^p)\, U\langle q, p, g^p\rangle \quad (t = 1, 2, \ldots, n_p)$$

где $h_{qt}{}^{(p)}(g^p)$ и $h_{qt}{}^{(p)'}(g^p)$ — некоторые скалярные коэффициенты.

Используя соотношения (3.2) и подвектор $U^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle$ из (6.3), после элементарных преобразований равенств (6.4), записанных для компонент векторов $U_{\mathbf{k}\nu\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m_{\mathbf{k}\nu})$, получим

$$(6.5)\qquad [\tau_{\mathbf{k}\nu}(e) \times H_p(g^p)]\, U^{(\mathbf{k}\nu)}\langle q\rangle = [\overline{\tau_{\mathbf{k}\nu}(g^p)} \times H_p'(g^p)]\, U^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle$$

Здесь $H_p(g^p)$ и $H_p'(g^p)$ — квадратные матрицы порядка n_p, которые составлены из коэффициентов $h_{qt}{}^{(p)}(g^p)$ и $h_{qt}{}^{(p)'}(g^p)$ $(q, t = 1, \ldots, n_p)$, а символ $[\tau_{\mathbf{k}\nu}(g) \times H_p(g)]$ означает тензорное произведение соответствующих матриц.

Из (6.5) вытекает, что подвекторы $U^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle$ должны удовлетворять уравнениям

$$(6.6)\qquad \Phi_p^{(\mathbf{k}\nu)}(g^p)\, U^{(k\nu)}\langle p\rangle = 0$$
$$\Phi_p^{(\mathbf{k}\nu)}(g^p) = [\tau_{\mathbf{k}\nu}(e) \times H_p(g^p)] - [\overline{\tau_{\mathbf{k}\nu}(g^p)} \times H_p'(g^p)]$$

и, следовательно, входят в пересечение нуль-пространств матриц $\Phi_p{}^{(\mathbf{k}\nu)}(g^p) \times$ $\times (g^p \in G^p)$. Обратными рассуждениями удается показать, что компоненты любого вектора из указанного пересечения удовлетворяют уравнениям (6.4). Таким образом, пространство $L^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle$ представляет собой пересечение нуль-пространств матриц $\Phi_p{}^{(\mathbf{k}\nu)}(g^p)$ $(g^p \in G^p)$.

Сказанное дает возможность фактически построить базисы в пространствах $L^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle$, $L^{(\mathbf{k}\nu)}$ и $L_{\mathbf{k}\nu\mu}$. Пусть $R_{\mathbf{k}\nu p}$ — размерность пространства $L^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle$, а векторы $E_\gamma{}^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle$ $(\gamma = 1, \ldots, R_{\mathbf{k}\nu p})$ образуют в $L^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle$ ортонормированный базис. Введем векторы

$$E_{\gamma p}^{(\mathbf{k}\nu)} \in L^{(\mathbf{k}\nu)}, \quad E_{\mathbf{k}\nu\rho}^{\gamma p} \in L_{\mathbf{k}\nu\rho} \quad (\gamma = 1, 2, \ldots. R_{\mathbf{k}\nu p};\ p = 1, 2, \ldots, N)$$

определяемые равенствами

$$(6.7)\qquad E_{\gamma p}^{(\mathbf{k}\nu)}\langle q\rangle = \delta_{pq} E_\gamma^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle, \quad E_{\mathbf{k}\nu\rho}^{\gamma p}\langle q, e\rangle = E_{\gamma p}^{(\mathbf{k}\nu)}\langle \rho, q\rangle \quad (q = 1, 2, \ldots, N)$$

где δ_{pq} — символ Кронекера. Составленные из таких векторов системы

$$(6.8)\qquad \{\{E_{\gamma p}^{(\mathbf{k}\nu)}\}_{\gamma=1}^{R_{\mathbf{k}\nu p}}\}_{p=1}^{N}, \quad \{\{E_{\mathbf{k}\nu\mu}^{\gamma p}\}_{\gamma=1}^{R_{\mathbf{k}\nu p}}\}_{p=1}^{N}$$

представляют собой соответственно ортонормированный базис в пространстве $L^{(\mathbf{k}\nu)}$ и ортогональный в $L_{\mathbf{k}\nu\mu}$.

Укажем, что скалярное произведение в пространстве $L_{\mathbf{k}\nu\mu}$, которое в отличие от обычного скалярного произведения (U, V) обозначается через $(U, V)_G$, задается равенством

(6.9) $$(U, V)_G = M_G[(U\langle g\rangle, V\langle g\rangle)]$$

Под M_G понимается специальный функционал на группе G (для конечных групп — функционал усреднения), который введен в [8] и обладает свойством

(6.10) $$M_G\,[\overline{\tau_{\mathbf{k}\nu\mu\rho}(g)}\,\tau_{\mathbf{k}_1\nu_1\mu_1\rho_1}(g)] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}\delta_{\nu\nu_1}\delta_{\rho\rho_1}\delta_{\mu\mu_1}/m_{\mathbf{k}\nu}$$

В этом скалярном произведении норма векторов $E^{\gamma p}_{\mathbf{k}\nu\mu}$ равна $1/\sqrt{m_{\mathbf{k}\nu}}$. Из выражений (6.9), (3.2), (6.7), (6.2), (6.10) следует, что

(6.11) $$(BE^{eq}_{\mathbf{k}\nu\mu}, E^{\gamma p}_{\mathbf{k}\nu\mu})_G =$$
$$= \frac{1}{m_{\mathbf{k}\nu}}\sum_{g\in G}\sum_{\rho_1,\rho_2=1}^{m_{\mathbf{k}\nu}} \overline{\tau_{\mathbf{k}\nu\rho_1\rho_2}(g)}\,(B\langle p, e, q, g\rangle\, E^{(\mathbf{k}\nu)}_{\varepsilon}\langle\rho_2, q\rangle, E^{(\mathbf{k}\nu)}_{\gamma}\langle\rho_1, p\rangle)$$

Теперь с помощью приемов линейной алгебры построим матрицу $B_*^{(\mathbf{k}\nu)}$, отвечающую оператору $B^{(\mathbf{k}\nu)}$ в принятом для пространства $L^{(\mathbf{k}\nu)}$ базисе. В силу соответствия (4.6) она должна иметь вид

(6.12) $$B^{(\mathbf{k}\nu)}_* = \| B^{(\mathbf{k}\nu)}_*\langle p, q\rangle \|_{p,q=1}^{N}$$
$$B^{(\mathbf{k}\nu)}_*\langle p, q\rangle = \| m_{\mathbf{k}\nu}(BE^{eq}_{\mathbf{k}\nu\mu}, E^{\gamma p}_{\mathbf{k}\nu\mu})_G \|_{\gamma,\,\varepsilon=1}^{R_{\mathbf{k}\nu p},\,R_{\mathbf{k}\nu q}}$$

Используя выражения (6.11), окончательно получаем

(6.13) $$B^{(\mathbf{k}\nu)}_*\langle p, q\rangle = \| (D^{(\mathbf{k}\nu)}_*\langle p, q\rangle\, E^{(\mathbf{k}\nu)}_{\varepsilon}\langle q\rangle,\quad E^{(\mathbf{k}\nu)}_{\gamma}\langle p\rangle) \|_{\gamma,\,\varepsilon=1}^{R_{\mathbf{k}\nu p},\,R_{\mathbf{k}\nu q}}$$

(6.14) $$D^{(\mathbf{k}\nu)}_*\langle p, q\rangle = \sum_{g\in G}[\overline{\tau_{\mathbf{k}\nu}(g)} \times B\langle p, e, q, g\rangle]$$

Итак, операторное уравнение (4.5) сводится к системе алгебраических уравнений

(6.15) $$B^{(\mathbf{k}\nu)}_* X^{(\mathbf{k}\nu)} = Y^{(\mathbf{k}\nu)}$$
$$X^{(\mathbf{k}\nu)}_i = \| X^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle \|_{p=1}^{N},\quad X^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle = \| X^{(\mathbf{k}\nu)}\langle\gamma, p\rangle \|_{\gamma=1}^{R_{\mathbf{k}\nu p}}$$

матрица которой определяется выражением (6.13). При этом

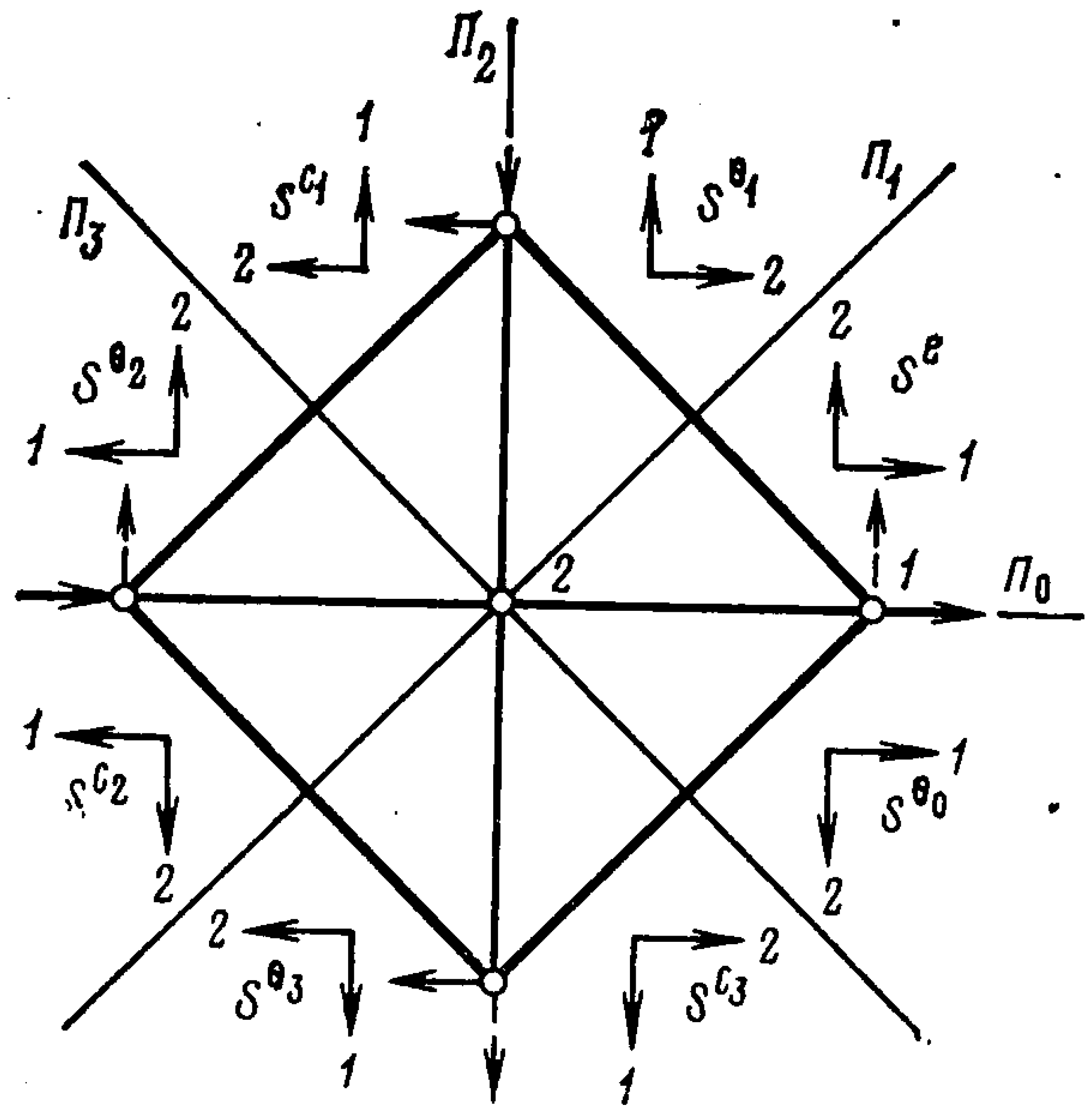
(6.16) $$Y^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p, \gamma\rangle = (V^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle, E^{(\mathbf{k}\nu)}_{\gamma}\langle p\rangle)$$
$$U^{(\mathbf{k}\nu)}\langle p\rangle = \sum_{\gamma=1}^{R_{\mathbf{k}\nu p}} X^{(\mathbf{k}\nu)}\langle\gamma, p\rangle\, E^{(\mathbf{k}\nu)}_{\gamma}\langle p\rangle$$

Пример. Построим разрешающую систему алгебраических уравнений для плоской фермы (фиг. 1), обладающей группой C_{4v} симметрии. Элементами симметрии являются повороты C_m на углы $m\pi/2$ и отражения Θ_m в плоскостях Π_m $(m = 0, 1, 2, 3)$. На фиг. 1 обозначены элементарные ячейки фермы, пронумерованы узлы в ячейке Ω^e (совпадающие с узлами фермы) и указаны направления единичных сил нагрузки V_{051}, которая входит в набор, преобразующийся по представлению τ_{05}. Единичные силы, образующие нагрузку V_{052}, показаны штриховыми линиями.

Матрицы $\tau_{05}(g)$ имеют вид

$$\tau_{05}(C_m) = \begin{Vmatrix} c & s \\ -s & c \end{Vmatrix},\quad \tau_{05}(\Theta_m) = \begin{Vmatrix} c & -s \\ -s & -c \end{Vmatrix};\quad c = \cos\frac{m\pi}{2}$$
$$s = \sin\frac{m\pi}{2}$$

Приведем необходимые исходные сведения, обозначая через $U\langle t, p, g\rangle$ перемещение узла $gz_p \in S^g$ в направлении оси с номером t из системы отсчета ω^g. В ячейке Ω^e число узлов $N = 2$. Все компоненты подвекторов $U\langle 2, g\rangle$ ($g \neq e$) и $U\langle \Theta_m\rangle$ ($m = 0, 1, 2, 3$) будем считать избыточными. Учитывая это, положим



Фиг. 1

$$B\langle e, e\rangle = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_5 \\ a_4 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_5 & 0 & a_3 \end{Vmatrix}$$

$$B\langle e, C_1\rangle = \begin{Vmatrix} a_6 & a_7 & 0 & 0 \\ -a_7 & a_8 & 0 & 0 \\ 0 & -a_5 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$B\langle e, C_2\rangle = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_5 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$B\langle e, C_3\rangle = \begin{Vmatrix} a_6 & -a_7 & 0 & 0 \\ a_7 & a_8 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & 0 & 0 \\ -a_4 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Здесь a_i ($i = 1, 2, \ldots, 8$) — соответствующие жесткостные характеристики фермы.

Согласно (6.3) и (6.1), $V^{(05)} = [1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$.

Группами узлов z_1 и z_2 являются соответственно $G^1 = \{e, \Theta_0\}$ и $G^2 = C_{4v}$. Необходимые для дальнейшего матрицы коэффициентов из уравнений связей (6.4) записываются следующим образом:

$$H_p(e) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad H_1'(\Theta_0) = H_2'(\Theta_0) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad H_2'(\Theta_1) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Теперь с помощью формулы (6.6) найдем матрицы

$$\Phi_p^{(05)}(\Theta_0) = \operatorname{diag}[0, 2, 2, 0] \quad (p = 1, 2)$$

$$\Phi_2^{(05)}(\Theta_1) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

и построим ортонормированные базисы в пространствах $L^{(05)}\langle 1\rangle$ и $L^{(05)}\langle 2\rangle$. Замечая, что первое является нуль-пространством матрицы $\Phi_1^{(05)}(\Theta_0)$, а второе — пересечением нуль-пространств матриц $\Phi_2^{(05)}(\Theta_0)$ и $\Phi_2^{(05)}(\Theta_1)$, имеем

$$R_{051} = 2; \quad E_1^{(05)}\langle 1\rangle = [1, 0, 0, 0], \quad E_2^{(05)}\langle 1\rangle = [0, 0, 0, 1]$$

$$R_{052} = 1; \quad E_1^{(05)}\langle 2\rangle = [\sqrt{2}/2, 0, 0, -\sqrt{2}/2]$$

Кроме того, из (6.14) следует

$$D_*^{(05)}\langle 1, 1\rangle = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 2a_7 \\ 0 & a_2 & -2a_7 & 0 \\ 0 & -2a_7 & a_1 & 0 \\ 2a_7 & 0 & 0 & a_2 \end{Vmatrix},$$

$$D_*^{(05)}\langle 2, 1\rangle = \begin{Vmatrix} 2a_4 & 0 & 0 & -2a_5 \\ 0 & 2a_5 & 2a_4 & 0 \\ 0 & 2a_5 & 2a_4 & 0 \\ -2a_4 & 0 & 0 & 2a_5 \end{Vmatrix}$$

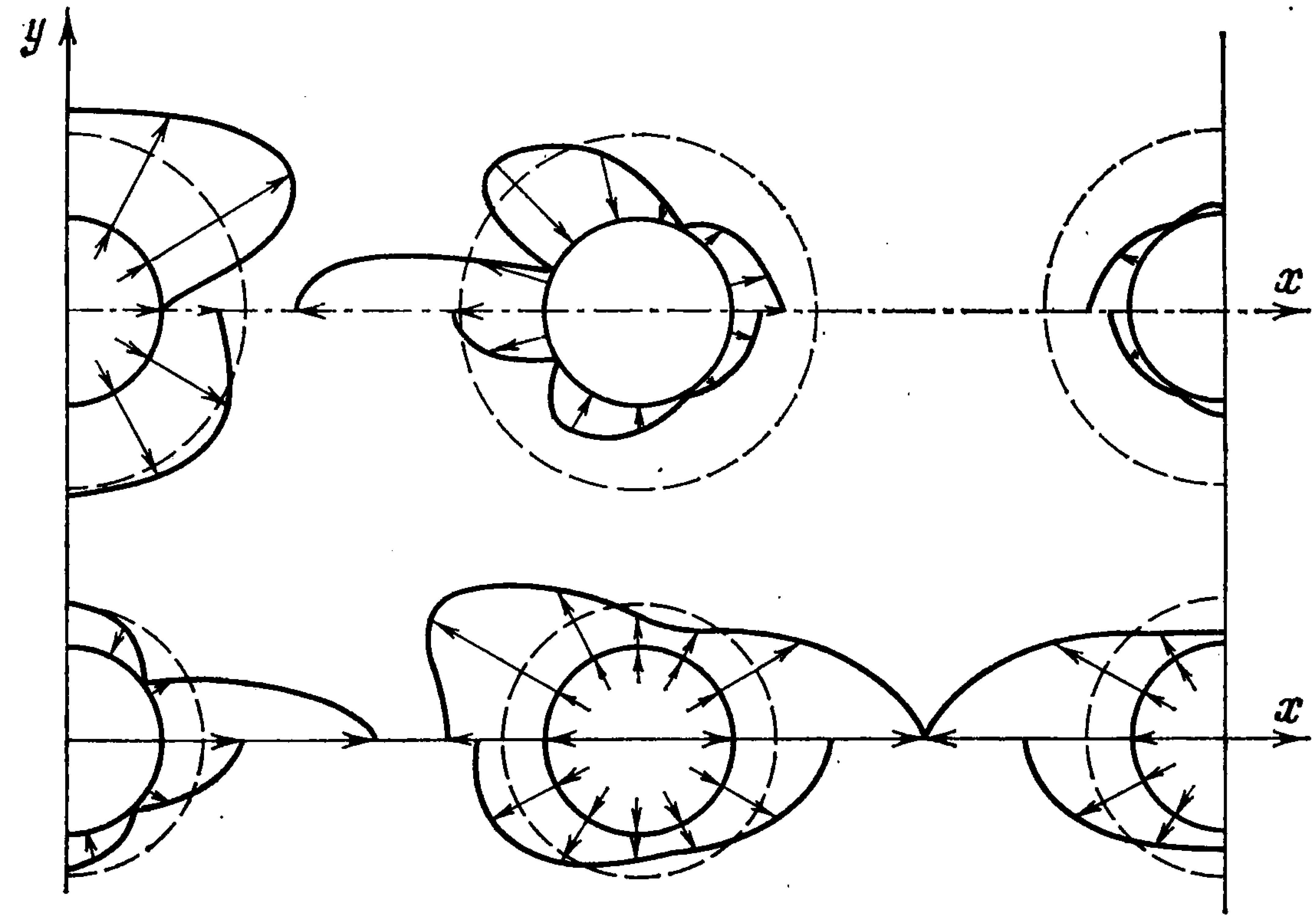
$$D_*^{(05)}\langle 1, 2\rangle = \operatorname{diag}[a_4, a_5, a_4, a_5], \quad D_*^{(05)}\langle 2, 2\rangle = \operatorname{diag}[a_3, a_3, a_3, a_3]$$

Используя выражения (6.13) и (6.16), получаем искомую систему (6.15)

$$\begin{Vmatrix} a_1 & 2a_7 & a_4/\sqrt{2} \\ 2a_7 & a_2 & -a_5/\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}a_4 & -2\sqrt{2}a_5 & a_3 \end{Vmatrix} X^{(05)} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

7. Плоская задача для изотропной среды. Из этого класса наиболее полно изучены обобщенные периодические задачи. Они были решены методом А. С. Космодамианского [9] и методом малого параметра [10].

Покажем возможности предложенной в п. 5 общей схемы. С помощью результатов из [9] по этой схеме был проведен расчет концентрации напряжений в среде, ослабленной регулярным рядом круговых отверстий, для двух случаев загружения внутренним давлением интенсивности q : а) загружен только основной контур, б) загружены все контуры, кроме основного. На фиг. 2 изображены контурные эпюры σ_θ/q (единичная эпюра по-



Фиг. 2

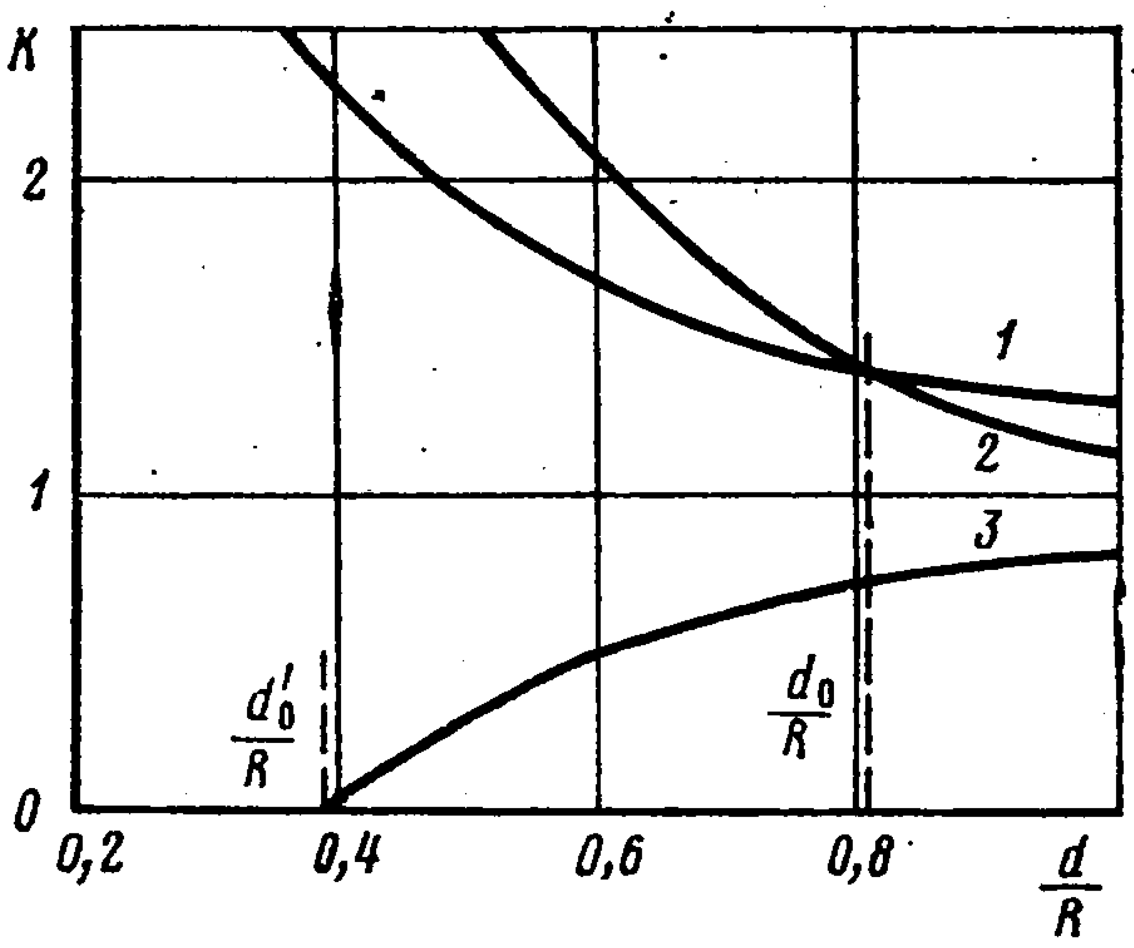
казана штриховой линией). Верхняя часть фигуры относится к случаю а), нижняя — к случаю б). Эпюры, расположенные над (под) осью x, отвечают величине $d = 0{,}4\ R$ $(d = R)$, причем R — радиус отверстия, d — толщина перемычки между отверстиями. Отметим два качественных эффекта: существуют такие значения d_0 и d_0', что при $d < d_0$ в случае загружения одного контура концентрация напряжений на нем окажется меньшей, чем на соседнем (назагруженном), а при $d < d_0'$ в случае одного незагруженного контура концентрация напряжений на нем будет большей, чем для обычной периодической задачи.

Численный анализ этих эффектов иллюстрируется графиками коэффициента концентрации K (фиг. 3). Линии *1* и *2* отвечают основному и соседнему с ним контурам при загружении а). Линия *3* — график разности между коэффициентами концентрации напряжений на основном контуре для обычной периодической задачи и для загружения б). Согласно фиг. 3, $d_0 \approx 0{,}8R$, $d_0' \approx 0{,}4R$.

Указанные выше методы решения обобщенных периодических задач можно использовать и для любых других групп симметрии. Весьма нагляден в этом смысле метод малого параметра.

Выражения для комплексных потенциалов $\varphi_{k\nu\mu}(z)$ и $\psi_{k\gamma\mu}(z)$ составлены в [5] для фиксированной координатной системы. Запишем их в новой координатной системе с началом в центре основного отверстия, которая получается из исходной параллельным переносом. Под a_r $(r = 1, 2)$ и D будем понимать комплексные числа, отвечающие основному вектору $\mathbf{a}_r$ и вектору переноса.

Следуя основным процедурам метода [10], разложим функции $\varphi_{k\nu\mu}^{*}(z)$ и $\psi_{k\nu\mu}(z)$ в ряд по степеням малого параметра $\varepsilon = 1/a_1$ и положим



Фиг. 3

$$\Phi^{(\eta)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Phi_s^{(\eta)}(z)$$

$$\Psi^{(\eta)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Psi_s^{(\eta)}(z)$$

Подставим все эти разложения в уравнения (4.7) и преобразуем их в последовательность $(s = 0, 1, \ldots)$ систем

$$K_1\Phi_s^{(\rho)}(t) + K_2\,[t\overline{\Phi_s^{(\rho)\prime}(t)} + \overline{\Psi_s^{(\rho)}(t)}] = f_s^{(\rho)}(t) \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}) \tag{7.1}$$

Здесь

$$f_0^{(\rho)}(t) = f^{(\rho)}(t)$$

$$f_s^{(\rho)}(t) = -K_1\sum_{r=0}^{s-1}\sum_{p=0}^{r} J_{\Phi sr}^{(\rho p00)} - K_2\Big\{\sum_{r=0}^{s-2}\sum_{p=0}^{r}(r-p+1)\overline{J_{\Phi s, r+1}^{(\rho p00)}}\,t/\bar t +$$

$$+\sum_{r=0}^{s-1}\sum_{p=0}^{r}[\overline{J_{\Psi sr}^{(\rho p20)}} + (r+1)\overline{J_{\Phi sr}^{(\rho p11)}}]\Big\} \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

$$J_{\Lambda sr}^{(\rho pqj)} = \sum_{\eta=1}^{m_{k\nu}} C_r^{\,p}(-1)^p t^{r-p}\,[\lambda_{r+j+1,\,r+q-p-1}^{(\rho\eta)(j+1)} I_{\Lambda sr}^{(\eta p)} + \lambda_{r+j+1,\,r+q-p-1}^{(\rho\eta)(j+3)}\overline{I_{\Lambda sr}^{(\eta p)}}]$$

$$I_{\Lambda sr}^{(\eta p)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Lambda_{s-r-1}^{(\eta)}(t)\,t^p\,dt \quad (\Lambda = \Phi, \Psi)$$

$$\lambda_{rp}^{(\rho\eta)(j+1)} = \lim_{N\to\infty}\sum_{m_1,\,m_2=-N}^{N}\ \sideset{}{^*}\sum_{m=0}^{n-1}\tau_{k\nu\rho\eta}(T_{m_1m_2}C_m)\,e^{-imp\alpha}\,\times$$

$$\times\,[1 + j(\bar\varepsilon_3 - \bar\varepsilon_3 e^{-im\alpha} - m_1\bar\varepsilon_1 - m_2\bar\varepsilon_2 - 1)]\,[e^{-im\alpha}(m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2) +$$

$$+\,\varepsilon_3(1 - e^{-im\alpha})]^{-r}$$

$$\lambda_{rp}^{(\rho\eta)(j+3)} = \lim_{N\to\infty}\sum_{m_1,\,m_2=-N}^{N}\ \sum_{m=0}^{n-1}\tau_{k\nu\rho\eta}(T_{m_1m_2}C_m\Theta)\,e^{-imp\alpha}\,\times$$

$$\times\,[1 + j(\bar\varepsilon_3 - \varepsilon_3 e^{-im\alpha} - m_1\bar\varepsilon_1 - m_2\bar\varepsilon_2 - 1)]\,[e^{-im\alpha}(m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2) +$$

$$+\,\bar\varepsilon_3 - \varepsilon_3 e^{-im\alpha}]^{-r}$$

$$\varepsilon_1 = a_1/|a_1|, \quad \varepsilon_2 = a_2/|a_1|, \quad \varepsilon_3 = D/|a_1|, \quad \alpha = 2\pi/n$$

$C_r^{\,p}$ — число сочетаний из r элементов по p, индекс j принимает значения 0 и 1, а звездочка над символом суммы означает отсутствие слагаемого с индексами $m_1 = m_2 = m = 0$.

Решение системы (7.1) при фиксированном значении s осуществляется методом Мусхелишвили [1] и определяет s-е приближение искомых функций $\Phi^{(\eta)}(z)$ и $\Psi^{(\eta)}(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1949. 635 с.
2. *Космодамианский А. С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. Киев — Донецк: Вища школа, 1976. 200 с.
3. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
4. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применение в физике. М.: Физматгиз, 1958. 354 с.
5. *Бурышкин М. Л.* О функциях Колосова — Мусхелишвили в обобщенных симметричных задачах упругости.— Докл. АН УССР, № 5, с. 344.
6. *Бурышкин М. Л.* Разложение вектор-функций, определенных на области с конечной группой симметрии, в усеченном случае.— Докл. АН АрмССР, 1976, т. 63, № 4, с. 193.
7. *Бурышкин М. Л.* Разложение вектор-функций, определенной в области с пространственной группой симметрии в трансляционно-усеченном случае.— Докл. АН УССР, 1975, № 7, с. 582.
8. *Бурышкин М. Л.* Структура регулярного представления пространственной группы в трансляционно-усеченном случае.— Докл. АН УССР, 1975, № 6, с. 486.
9. *Бурышкин М. Л., Романенко Ф. А.* О численном исследовании концентрации напряжений в изотропной пластинке, ослабленной регулярным рядом круговых отверстий.— Прикл. механика, 1979, т. 15, № 11, с. 93.
10. *Бурышкин М. Л.* Обобщенная периодическая задача теории упругости.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 521.

Одесса

Поступила в редакцию 22.VII.1980