Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 532.516

О СИЛЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ЦИЛИНДР В СТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛОМ ЧИСЛЕ РЕЙНОЛЬДСА

Васильев М. М.

Рассматривается плоское обтекание кругового цилиндра стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости при малом числе Рейнольдса. Дается строгий вывод известной формулы Лэмба для силы сопротивления с оценкой остаточного члена.

1. Обтекание цилиндрического тела плоскопараллельным стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Навье — Стокса с граничными условиями

$$\Delta v - 2\lambda (u_\infty \cdot \nabla) v - 2\lambda \operatorname{grad} p = 2\lambda \sum_{k=1}^{2} v_k \frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad \operatorname{div} v = 0 \tag{1.1}$$

$$v|_C = -u_\infty, \quad \lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $v = u - u_\infty$, u и p — безразмерные вектор скорости и давление, 2λ — число Рейнольдса, u_∞ — вектор скорости набегающего потока, $x = (x_1, x_2)$, C — контур поперечного сечения B обтекаемого тела. Начало координат будем считать помещенным внутри контура C, а оси координат направленными так, чтобы $u_\infty = (1, 0)$.

При исследовании краевой задачи (1.1), (1.2) в качестве вспомогательной системы уравнений будут использоваться линейные уравнения Озеена

$$\Delta v - 2\lambda (u_\infty \cdot \nabla) v - 2\lambda \operatorname{grad} p = f(x), \quad \operatorname{div} v = 0 \tag{1.3}$$

В [1] показано, что решение краевой задачи (1.1), (1.2) можно представить в виде ряда

$$v(x, \lambda) = v^{(0)}(x, \lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} v^{(k)}(x, \lambda) (2\lambda)^k \tag{1.4}$$

сходящегося при достаточно малых числах Рейнольдса. В формуле (1.4) $v^{(0)}(x, \lambda)$ — решение однородной системы уравнений Озеена (1.3) (при $f(x) = 0$) с граничными условиями (1.2), а $v^{(l)}(x, \lambda)$ $(l \geqslant 1)$ — решение неоднородной системы (1.3) при

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=0}^{l-1} v_k^{(j)} \frac{\partial v^{(l-1-j)}}{\partial x_k}$$

с нулевыми граничными условиями: $v|_C = 0$, $\lim v = 0$ $(|x| \to \infty)$.

2. Формула для силы лобового сопротивления в случае трехмерного обтекания тела стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости

получена ранее [1]. Пользуясь аналогичными рассуждениями, можно получить эту формулу и для двумерного плоского течения:

$$F_1 = F_1^{(0)} - \int\limits_D w_j^{(0)} v_k \frac{\partial v_j}{\partial y_k} dy \tag{2.1}$$

Здесь $F_1^{(0)}$ — сила сопротивления в приближении Озеена, $D = R^2 \setminus \setminus B$, $w^{(0)}$ — скорость возмущений в приближении Озеена при $u_\infty = = (-1, 0)$. Предполагается, что по дважды повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

При получении формулы (2.1) используются интегральные представления решения и некоторые его оценки, приведенные в [2], а также легко проверяемое равенство

$$\int\limits_{C_R} H_{ij}(x-y) n_1(x)\, dl_x = -\frac{\delta_{ij}}{4\pi} + o(1)$$

где C_R — окружность радиуса R ($R \to \infty$), H_{ij} — фундаментальное решение уравнений Озеена (K_0, K_1 — функции Макдональда)

$$H_{11} = \frac{Q+T_1}{4\pi}, \quad H_{22} = \frac{Q-T_1}{4\pi}, \quad H_{12} = H_{21} = \frac{T_2}{4\pi}$$

$$T_k = \frac{y_k - x_k}{|x-y|}\left[\frac{1}{\lambda|x-y|} - K_1(\lambda|x-y|)\, e^{\lambda(x_1-y_1)}\right] \quad (k = 1, 2)$$

$$Q = K_0(\lambda \mid x - y \mid) e^{\lambda(x_1-y_1)}$$

3. Пользуясь формулой (2.1), можно получить асимптотическую формулу для определения силы сопротивления кругового цилиндра при малом числе Рейнольдса. Входящая в эту формулу сила сопротивления цилиндра в приближении Озеена $F_1^{(0)}$ исследовалась в работах [3, 4] и др. В [3] решение задачи обтекания кругового цилиндра в полярных координатах r, θ представлено в следующем виде:

$$v_r^{(0)} = -\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\cos n\theta}{r^{n+1}} - \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty} B_m\left[\frac{2}{\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn}(\xi)\cos n\theta\right] \tag{3.1}$$

$$v_\theta^{(0)} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin n\theta}{r^{n+1}} - \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_m \Psi_{mn}(\xi)\sin n\theta \tag{3.2}$$

$$\Phi_{mn} = (K_{m+1} + K_{m-1})(I_{m-n} + I_{m+n}) + K_m(I_{m-n-1} + + I_{m-n+1} + I_{m+n-1} + I_{m+n+1})$$

$$\Psi_{mn} = (K_{m+1} - K_{m-1})(I_{m-n} - I_{m+n}) + K_m(I_{m-n-1} - - I_{m-n+1} - I_{m+n-1} + I_{m+n+1})$$

(I_m, K_m — модифицированные функции Бесселя от аргумента $\xi = \lambda r$, A_n, B_m — постоянные).

Граничные условия на теле (при $r = 1$) $v_r = -\cos\theta$, $v_\theta = \sin\theta$ будут

[1] *Бабенко К. И.* Теория возмущений стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса.— Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1975, № 79. 71 с.

удовлетворены, если

$$A_0 + \frac{1}{2\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} B_m = 0; \quad A_n + \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \Phi_{mn}(\lambda) = \delta_{n1}$$

$$A_n + \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \Psi_{mn}(\lambda) = -\delta_{n1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Исключая A_n, можно получить следующую систему уравнений для определения коэффициентов B_m:

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m \Lambda_{m,n}(\lambda) = 4\delta_{n1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

$$\Lambda_{m,n} = I_{m-n} K_{m-1} + I_{m+n} K_{m+1} + K_m (I_{m-n+1} + I_{m+n-1}) \tag{3.4}$$

Проводились [3] численные исследования поведения коэффициентов B_m при некотором числе Рейнольдса, которые показали [3], что коэффициенты B_m с ростом m достаточно быстро убывают по абсолютной величине. Расчеты показали также, что коэффициент B_0 убывает с уменьшением числа Рейнольдса. В приведенных в работе [3] формулах авторы ограничились одним коэффициентом B_0.

Для исследования решения уравнений (3.3) ниже применяется метод, предложенный К. И. Бабенко. Если положить $C_m = B_{m-1}\Lambda_{m-1,m}$, $\mu_{nm} = \Lambda_{m-1,n}/\Lambda_{m-1,m}$, то для определения $C_1, C_2, \ldots$ получится система уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{nm} C_m = 4\delta_{n1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.5}$$

с диагональными элементами μ_{nn}, равными единице. Обозначив через N разность между матрицей $M = (\mu_{nm})$ и единичной матрицей $E = (\delta_{nm})$, можно систему уравнений (3.5) переписать в следующем виде (штрих означает транспонирование):

$$(E + N)C = f \tag{3.6}$$

$$C = (C_1, C_2, \ldots)', \quad f = (4, 0, 0, \ldots)'$$

Можно показать, что элементы матрицы $N = (\nu_{nm})$ при $(n, m) \neq (1, 2)$ удовлетворяют неравенству $\nu_{nm} < CI_{|n-m|}(\lambda)$, а $\nu_{12} = 2K_0(\lambda) I_1(\lambda) + O(\lambda)$. Отсюда и из уравнения (3.6) вытекает, что при достаточно малых значениях λ ($\gamma \approx 0{,}57721$ — постоянная Эйлера)

$$C = (E + N)^{-1} f = f - Nf + N^2 f - \ldots = f + O(\lambda S) \tag{3.7}$$

$$S = {}^1/_2 - \gamma - \ln(\lambda / 2)$$

В [5] получена следующая формула для силы лобового сопротивления цилиндра:

$$F_1 = -\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \lim_{r\to\infty} (\sqrt{r}\, v_r)\Big|_{\theta=0}$$

Подстановка вместо v_r выражения (3.1) дает

$$F_1^{(0)} = -\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \lim_{r\to\infty} (\sqrt{r}\, v_r^{(0)})\Big|_{\theta=0} = \frac{\pi}{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} B_m = \frac{\pi}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{\Lambda_{m-1,\,m}}$$

Отсюда и из формул (3.4) и (3.7) следует, что

$$F_1^{(0)}=\frac{2\pi}{\lambda\,[I_0(\lambda)\,K_0(\lambda)+I_1(\lambda)\,K_1(\lambda)]}+O(\lambda S)$$

Таким образом, формулу (2.3) можно переписать в виде

$$F_1=\frac{2\pi}{\lambda\,(I_0K_0+I_1K_1)}-\int\limits_D w_j^{(0)}v_k\frac{\partial v_j}{\partial y_k}\,dy+O(\lambda S) \tag{3.8}$$

4. Для оценки входящего в формулу (3.8) интеграла

$$J=-\int\limits_D w_j^{(0)}v_k\frac{\partial v_j}{\partial y_k}\,dy=\int\limits_D v_jv_k\frac{\partial w_j^{(0)}}{\partial y_k}\,dy$$

можно воспользоваться оценками v_j и $\partial v_j^{(0)}/\partial y_k$ при $\lambda\to 0$, приведенными в работах [1, 6]. Из этих оценок вытекает, что

$$|\,J\,|<C\lambda^{-1}\ln^{-3}(1\,/\,\lambda)$$

Таким образом, для сопротивления кругового цилиндра при малом числе Рейнольдса получается следующее выражение:

$$F_1=\frac{2\pi}{\lambda\,[I_0(\lambda)\,K_0(\lambda)+I_1(\lambda)\,K_1(\lambda)]}+O\left(\frac{1}{\lambda}\ln^{-3}\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.1}$$

Эта формула без оценки остаточного члена приведена в работе [7]. Выделяя в (4.1) главный член, можно получить известную формулу Лэмба [8] с оценкой остатка

$$F_1=\frac{2\pi}{\lambda S}+O\left(\frac{1}{\lambda}\ln^{-3}\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.2}$$

Формулы (4.1) и (4.2) для силы сопротивления цилиндра соответствуют формулам, полученным [9] методом сращиваемых асимптотических разложений.

В заключение автор выражает глубокую признательность К. И. Бабенко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Finn R., Smith D. R.* On the stationary solutions of the Navier—Stokes eguations in two dimensions. Arch. Rath. Mech. and Analysis, 1967, vol. 25, No. 1.
2. *Smith D. R.* Estimates at infinity for stationary solutions of the Navier—Stokes equations in two dimensions. Arch. Rath. Mech. and Analysis, 1965, vol. 20, No. 5.
3. *Tomotika S., Aoi T.* The steady flow of viscous fluid past a sphere and cirular cylinder at small Reynolds number. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1950, vol. 3, pt 2. (Рус. перев: Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1952, вып. 2(12).)
4. *Tomotika S., Aoi T.* An expansion formula for the drag on a circular cylinder moving through a viscous fluid at small Reynolds number. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1951, vol. 4, pt 4. (Рус. перев.: Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1952, вып.5 (15).)
5. *Бабенко К. И.* Об асимптотическом поведении вихря вдали от тела при обтекании его плоским потоком вязкой жидкости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
6. *Finn R., Smith D. R.* On the linearized hydrodynamical equations in two dimensions. Arch. Rath. Mech. Analysis, 1967, vol. 25, No. 1.
7. *Bairstow L., Cave B. M., Lang E. D.* The resistance of cylinder moving in a viscous fluid. Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1923, vol. 223, p. 383.
8. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
9. *Kaplun S.* Low Reynolds number flow past a circular cylinder. Actes. IX Congr. internat. de Mècanique Appliquée. T. III, Bruxelles, Univ. de Bruxelles, 1957.

Москва

Поступила в редакцию
23.I.1980