Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 532.516

О СИЛЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ТЕЛО В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Бердичевский В. Л.

Дается обобщение формулы Кельвина — Тэта на случай тела, движущегося в вязкой жидкости. В связи с этим обсуждается вопрос об аналоге соотношений взаимности Онсагера для сред с памятью.

Проблема вычисления сил и моментов, действующих на абсолютно твердое тело при движении этого тела в неограниченном или ограниченном неподвижными стенками потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости, была сведена Кельвином и Тэтом (см. [1—3]) к проблеме вычисления кинетической энергии жидкости в случаях, когда кинетическая энергия конечна. Сила и момент определяются по кинетической энергии K формулами

$$F_i = \frac{\partial K}{\partial r^i} - \frac{d}{dt}\frac{dK}{\partial r^i_{,t}}, \quad K = K(r^i, r^i_{,t}, \alpha_a{}^i, \alpha^i_{a,t}) \tag{1}$$

$$M_i = e_{ijk}\left(\frac{\partial K}{\partial \alpha_a{}^j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \alpha^j_{a,t}}\right)\alpha_a{}^k$$

Здесь r^i — компоненты радиус-вектора r фиксированной точки тела, $\alpha_a{}^i$ — компоненты ортогональной матрицы α, задающей положение сопутствующих ортов тела ($i, j, k, a, b, c = 1, 2, 3$), запятой в индексах перед t обозначается дифференцирование по t, e_{ijk} — символы Леви-Чивита.

Аналогичные формулы для тела в стоксовом потоке вязкой жидкости связаны с диссипативным потенциалом жидкости D:

$$F_i = -\frac{\partial D(r, \alpha; r_{,t}, \alpha_{,t})}{\partial r^i_{,t}} \tag{2}$$

$$M_i = -\frac{\partial D(r, \alpha; r_{,t}\alpha_{,t})}{\partial \alpha^j_{a,t}}\alpha^k_{a,t}e_{ijk}$$

В случае ньютоновской жидкости D — половина диссипации в области, занятой движением.

Возникает вопрос, не существует ли универсального соотношения, связывающего силу, момент, кинетическую энергию и диссипацию для произвольного движения вязкой жидкости, когда имеется зависимость не только от мгновенных характеристик движения, но и от предыстории движения.

Дальше показано, что соответствующим обобщением формул (1) и (2) для движения, начинающегося из состояния покоя, является вариационное уравнение, имеющее место в каждый момент времени t:

$$F_i\delta r^i + M_i\delta\varphi^i = \delta K - \frac{d}{dt}\delta_{.}K - \delta_{.}D \tag{3}$$

В этом уравнении $\delta\varphi^i = {}^1/_2 e^{ijk}\alpha_j{}^a\delta\alpha_{ka}$ — вариация угла поворота тела, а кинетическая энергия и диссипативный потенциал — некоторые функционалы от истории движения. Их зависимость от предыстории может быть описана двумя группами аргументов (они разделены точкой с запятой):

$$K = \mathop{K}_{\tau=0}^{\tau=t}(r(\tau), \alpha(\tau);\ r_{,\tau}, \alpha_{,\tau})$$

$$D = \mathop{D}_{\tau=0}^{\tau=t}(r(\tau), \alpha(\tau);\ r_{,\tau}, \alpha_{,\tau})$$

Способ выделения двух групп аргументов приведен ниже.

В (3) δ — оператор варьирования по обоим аргументам, $\delta_{.}$ — оператор, действие которого заключается в варьировании по второй группе аргументов с последующей заменой $\delta r_{,\tau}$, $\delta\alpha_{,\tau}$ на δr, $\delta\alpha$.

Отметим следующее.

1°. Соотношения (1) и (2) вытекают из вариационного уравнения (3), когда K и D — функции мгновенного положения и скоростей тела.

2°. Вариационное уравнение (3) показывает, что шесть функционалов истории движения F_i и M_i выражаются через два функционала K и D. Поскольку уравнение (2) являющееся частным случаем уравнения (3), выражает принцип Онсагера для медленного движения тела в вязкой жидкости, уравнение (3) можно рассматривать как аналог принципа Онсагера для нелокальных во времени взаимодействий. В термодинамических системах, в которых инерционные эффекты несущественны, соответствующее обобщение принципа Онсагера можно сформулировать следующим образом:

$$X_A\delta u^A = -\delta U + \frac{d}{dt}\delta_{.}U - \delta_{.}D$$

где X_A — термодинамические потоки, du^A/dt — термодинамические силы, U и D — функционалы внутренней энергии и диссипации.

3°. Полагая в (3) $\delta r^i = \delta\varphi^i = 0$ в момент времени t, получим, что функционалы K и D обязаны удовлетворять условию: для любых $\delta r^i(\tau)$ и $\delta\varphi^i(\tau)$, обращающихся в нуль при $\tau = 0$ и $\tau = t$, должно выполняться тождество

$$\delta K - \frac{d}{dt}\delta_{.}K - \delta_{.}D = 0 \tag{4}$$

4°. Проблема вычисления сил и моментов, действующих на твердое тело в вязкой жидкости, крайне сложна. Поэтому естественно использовать вариационное уравнение (3) для полуэмпирического определения сил и моментов, задавая функционалы K и D так, что бы они удовлетворяли соотношению (4), и находя затем свободные параметры из эксперимента.

Дадим доказательство равенства (3). Рассмотрим в некоторой инерциальной системе координат x^i покоящийся сосуд, содержащий однородную вязкую несжимаемую жидкость и помещенное в нее тело A. В момент времени $t = 0$ система находится в покое

$$x^i(\xi^a, 0) = x_0{}^i(\xi^a), \quad v^i(\xi^a, 0) = 0, \quad r_{,t}(0) = 0, \quad \alpha_{,t}(0) = 0 \tag{5}$$

Здесь ξ^a — лагранжевы координаты жидкости и твердого тела, x^i (ξ^a, t) — закон движения среды, $v^i(\xi^a, t) = \partial x^i(\xi^a, t)/\partial t$ — скорость среды.

Затем под действием внешних сил тело начинает двигаться по некоторому закону $r(t)$, $\alpha(t)$. Примем дополнительно, что при $t = 0$:

$$r_{,tt}(0) = 0, \quad \alpha_{,tt}(0) = 0 \tag{6}$$

Движение жидкости определяется из уравнений импульсов и уравнения неразрывности

$$\rho \frac{d^2x^i(\xi^a, t)}{dt^2} = -\nabla^i p + \mu\Delta v^i, \quad \det\left\|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^a}\right\| = \det\left\|\frac{\partial x_0^i}{\partial \xi^a}\right\| \tag{7}$$

и краевых условий на границе тела ∂A_ξ и границе сосуда ∂V

$$\begin{aligned} &x^i(\xi^a, t) = r^i(t) + \alpha_a^{\ i}(t)\xi^a, \quad \xi^a \in \partial A_\xi \\ &x^i(\xi^a, t) = x^i_*(\xi^a), \quad \xi^a \in \partial V \end{aligned} \tag{8}$$

Граница тела ∂A_ξ в лагранжевых переменных неподвижна по частицам, $\xi^a = 0$ — лагранжевы координаты точки тела с радиус-вектором $x^i = r^i(t)$. Считается, что решение системы уравнений (5) — (8) на рассматриваемом промежутке времени существует и единственно.

Закон движения частиц жидкости $x^i(\xi^a, t)$ и давление $p(\xi^a, t)$ в момент времени t можно рассматривать как функционалы от закона движения твердого тела $r(t)$, $\alpha(t)$. Предположим, что производится бесконечно малое возмущение движения тела $\delta r(t)$, $\delta\alpha(t)$. Тогда $x^i(\xi^a, t)$ и $p(\xi^a, t)$ получат некоторые бесконечно малые приращения δx^i и δp. Символом δ обозначаются вариации при постоянных ξ^a, символом ∂ — при постоянных x^i. Выпишем уравнения для определения δx^i и δp. Они получаются варьированием уравнений (7)

$$\begin{aligned} &\rho\frac{d^2\delta x^i}{dt^2} = -\nabla^i\delta p + \nabla_k p\nabla^i\delta x^k + \mu\Delta\frac{d\delta x^i}{dt} - \\ &-\mu\nabla_k v^i\Delta\delta x^k - 2\mu\nabla_j\delta x^k\nabla^j\nabla_k v^i, \quad \nabla_i\delta x^i = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь использовано, что вариация δ при постоянных ξ^a перестановочны с оператором d/dt, а вариации ∂ при постоянных x^i — с оператором ∇_i, и привлечено соотношение $\delta u = \partial u + \delta x^k\nabla_k u$.

Варьируя (5) и (8), получим начальные и краевые условия для δx^i:

$$\begin{aligned} &\delta x^i = 0, \quad \frac{d\delta x^i}{dt} = 0 \quad \text{при } t = 0 \\ &\delta x^i = \delta r^i + \alpha_j^{\ a}(x^j - r^j)\delta\alpha_a^{\ i} \quad \text{на} \quad \partial A_\xi \\ &\delta x^i = 0 \quad \text{на} \quad \partial V \end{aligned} \tag{10}$$

Согласно (9) и (10), величины δx^i в момент времени t будут функционалами от предыстории движения $r(t)$, $\alpha(t)$ и от вариаций δr, $\delta\alpha$. Запишем этот факт следующим образом:

$$\delta x^i = \mathop{l^i}_{\tau=0}^{\tau=t}(r(\tau), \alpha(\tau); \ \delta r(\tau), \delta\alpha(\tau)) \tag{11}$$

Функционалы (11) зависят также от ξ, однако для краткости ξ не указываются в числе аргументов. Функционалы (11), как следует из системы (9) и (10), линейны по δr, $\delta\alpha$ и, вообще говоря, нелинейны по r, α.

Вывод вариационного уравнения (3) основан на равенстве

$$v^i = \overset{\tau=t}{\underset{\tau=0}{l^i}} (r(\tau),\ \alpha(\tau);\ r_{,\tau}, \alpha_{,\tau}) \tag{12}$$

Доказательство соотношения (12) начнем с утверждения: в силу предположения (6):

$$dv^i / dt = 0 \quad \text{при } t = 0 \tag{13}$$

Действительно, применяя к уравнениям импульсов операцию rot и используя, что $v^i = 0$ при $t = 0$, имеем

$$\operatorname{rot} (\partial v/\partial t) = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Кроме того, $\operatorname{div} (\partial v/\partial t) = 0$ при $t = 0$. На ∂V и ∂A_ξ $dv/dt = 0$ при $t = 0$. Это возможно лишь при $\partial v/\partial t = dv/dt = 0$ при $t = 0$ во всей области течения.

Заменим в (9) символ δ на производную по времени d/dt при постоянных ξ^a. Тогда уравнения (9) перейдут в уравнения (7), продифференцированные по времени. Будем рассматривать эти уравнения как линейные уравнения относительно v^i и dp/dt с переменными коэффициентами, которые считаем известными функционалами от $r(\tau)$, $\alpha(\tau)$. В начальный момент времени v^i в силу (5) и (13) удовлетворяют условиям

$$v^i = dv^i / dt = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Кроме того, на границе потока, дифференцируя по времени (8), имеем

$$v^i = 0 \text{ на } \partial V;\ v^i = r^i{}_{,t} + \alpha_j{}^a (x^j - r^j(t))\, \alpha_a{}^i{}_{,t} \text{ на } \partial A_\xi$$

Таким образом, система уравнений для определения v^i и dp/dt полностью совпадает с системой уравнений для определения δx^i и δp и справедливы формулы (12).

Кинетическая энергия жидкости и диссипативный потенциал определены формулами

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v^i \, dv, \quad D = \int_V \mu \nabla^i v^j \nabla_{(i} v_{j)} \, dv \tag{14}$$

Круглыми скобками в индексах обозначается симметрирование. Подстановка (12) в (14) определяет зависимость K и D от двух групп аргументов, причем K и D квадратичны по второй группе аргументов.

Умножим уравнение импульсов на δx^i и проинтегрируем по области, занятой жидкостью. Используя краевые условия для δx^i на ∂V и ∂A_ξ и определение силы и момента, получим

$$F_i \delta r^i + M_i \delta \varphi^i + \int_V 2\mu \nabla^{(i} v^{j)} \nabla_{(j} \delta x_{i)} \, dV + \int_V \rho \frac{dv^i}{dt} \delta x_i \, dV = 0 \tag{15}$$

В (15) под δx^i понимается изменение $x^i (\xi^a, t)$, порождаемое варьированием $r(\tau)$ и $\alpha(\tau)$. Перепишем (15), используя равенство $\delta v^i = d\delta x^i/dt$ и соотношение (12)

$$F_i \delta r^i + M_i \delta \varphi^i + \int_V 2\mu \nabla^{(i} v^{j)} \nabla_{(j} \overset{\tau=t}{\underset{\tau=0}{l_{i}}} (r(\tau), \alpha(\tau);\ \delta r(\tau), \delta\alpha(\tau))\, dv + \tag{16}$$

$$+ \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i \overset{\tau=t}{\underset{\tau=0}{l^i}} (r(\tau), \alpha(\tau);\ \delta r(\tau), \delta\alpha(\tau))\, dv - \int_V \rho v_i \delta v^i \, dv = 0$$

Согласно (14) и (12)

$$\delta K = \int_V \rho v_i \delta v^i \, dV \tag{17}$$

$$\delta_{\bullet} K = \int\limits_V \rho v_i \overset{\tau=t}{\underset{\tau=0}{\overline{l^i}}} (r(\tau), \alpha(\tau);\ \delta r, \delta\alpha)\, dV$$

$$\delta_{\bullet} D = \int\limits_V 2\mu \nabla^{(i} v^{j)} \nabla_i \overset{\tau=t}{\underset{\tau=0}{\overline{l_j}}} (r(\tau), \alpha(\tau); \delta\tau, \delta\alpha)\, dV$$

Из (16) и (17) следует (3).

Для деформируемого твердого тела, описываемого конечным числом степеней свободы, также справедливо вариационное уравнение (3), в которое добавится работа обобщенных сил на дополнительных степенях свободы. Не представляет труда также обобщение на неньютоновскую вязкую сжимаемую жидкость.

Ясно, что приведенный вывод, базирующийся на равенстве (12), дословно повторяется для любой системы, которая локально описывается уравнениями типа (7), и при «осреднении» (переходе к системе с меньшим числом степеней свободы) локальные соотношения заменятся вариационным соотношением (3).

Обратим внимание на то, что предположение о начале движения из состояния покоя существенно. В противном случае (например, для установившегося движения) в формулу (12) войдут дополнительные члены, которые дадут вклад в вариационное уравнение (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кирхгоф Г. Р.* Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
2. *Ламб Г.* Гидромеханика. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1936. 244 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.V.1980