

УДК 532.516

## АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ДЛЯ ЗАКРУЧЕННОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Смирнов Е. М.

Найдены автомодельные решения уравнений Навье—Стокса для закрученных и незакрученных течений в круглой трубе с проницаемыми и непроницаемыми стенками. Величины продольной и окружной составляющих скорости полагались линейными функциями продольной координаты. Проведено численное интегрирование полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения для незакрученного течения неединственны во всем исследованном диапазоне изменения параметра, характеризующего интенсивность отсоса или вдува жидкости. Особо выделены решения для закрученного и незакрученного течения в трубе с непроницаемыми стенками, являющиеся собственными решениями краевой задачи. Представлены графики распределения по радиусу величин составляющих скорости закрученных и незакрученных потоков с различной интенсивностью отсоса или вдува жидкости, а также графики и таблицы интегральных характеристик течения.

Известны автомодельные решения уравнений Навье—Стокса для течения в плоскопараллельном канале [1] и незакрученного течения в круглой трубе [2]. Стенки канала или трубы полагались пористыми, а функция тока — линейно-зависящей от продольной координаты. Ниже получены автомодельные решения для закрученного течения в трубе с проницаемыми и непроницаемыми стенками. Найдены также новые решения для течения без закрутки, в частности при непроницаемых стенках трубы.

1. Предполагая установившееся течение в круглой трубе радиуса  $a$  осесимметричным, запишем уравнения Навье — Стокса в цилиндрической системе координат  $x, r, \varepsilon$  (ось  $x$  направлена по оси трубы)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} &= \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь  $u, v, w$  — проекции вектора скорости соответственно на направления  $x, r, \varepsilon$ .

Подчиним решения системы (1.1) следующим граничным условиям по координате  $r$ :

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial r} = v = w = 0, \quad r = 0$$

$$(1.3) \quad u = w = 0, \quad v = -v_0 = \text{const}, \quad r = a$$

где  $v_0$  — скорость вдува через стенки трубы.

Условия по координате  $x$  не накладываются, так как целью работы является нахождение автомодельного решения.

2. Решение задачи будем искать в виде

$$(2.1) \quad u = \frac{vx}{a^2} f(\eta), \quad w = \frac{vx}{a^2} g(\eta), \quad \eta = \frac{r}{a}$$

Вводя функцию тока  $\psi$ , запишем

$$(2.2) \quad \psi = \int_0^r ru \, dr = vx\varphi(\eta), \quad \varphi(\eta) = \int_0^\eta \eta f \, d\eta$$

$$(2.3) \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{v}{a} \frac{\varphi}{\eta}$$

Решения вида (2.1) для течения без закрутки,  $g(\eta) = 0$ , рассматривались в работе [2].

Используя (2.1) — (2.3), из уравнения (1.1) получим

$$-\frac{a^4}{\rho v^2 x} \frac{\partial p}{\partial x} = S(\eta)$$

Отсюда

$$(2.4) \quad p = -\frac{\rho v^2}{a^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{a} \right)^2 S(\eta) + T(\eta) \right]$$

Подставив (2.4) во второе уравнение (1.1), найдем соотношения, связывающие  $S$  и  $T$  с функциями  $f$  и  $g$  (штрих означает дифференцирование по  $\eta$ ):

$$S' = -\frac{2g^2}{\eta}, \quad T' = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\varphi}{\eta} \right)^2 \right]' + \frac{1}{\eta^2} \left\{ \eta^2 \left[ \left( \frac{\varphi}{\eta} \right)' - \frac{\varphi}{\eta^2} \right] \right\}'$$

Выполняя интегрирование, получим

$$(2.5) \quad S = -\tau(\eta) + D, \quad \tau = \int_0^\eta \frac{2g^2}{\eta} \, d\eta, \quad D = \text{const}$$

$$(2.6) \quad T = \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi}{\eta} \right)^2 + f - f(0)$$

Подставляя (2.1) — (2.5) в первое и третье уравнения системы (1.1), запишем систему уравнений и граничные условия для функций  $f$  и  $g$  в виде

$$(2.7) \quad f'' + (1 + \varphi)f'/\eta - f^2 - \tau + D = 0$$

$$(2.8) \quad g'' + (1 + \varphi)g'/\eta - (1 - \varphi + \eta^2 f)g/\eta^2 = 0$$

$$(2.9) \quad f' = \varphi = g = 0, \quad \eta = 0$$

$$(2.10) \quad f = g = 0, \quad \eta = 1$$

$$(2.11) \quad \varphi = \gamma = v_0 a / v = \text{const}, \quad \eta = 1$$

Величина параметра  $\gamma$  положительна при вдуве и отрицательна при отсасывании жидкости через стенки трубы.

В случае непроницаемых стенок

$$(2.12) \quad \varphi = 0, \quad \eta = 1$$

получаем задачу (2.7) — (2.10), (2.12) на нахождение собственных функций, соответствующих собственным значениям  $D_k$ .

В работе найдено два собственных решения сформулированной задачи. Вопрос об общем числе таких решений остается открытым.

Отметим, что функция тока в [1, 2] полагалась пропорциональной величине  $v_0$  и представлялась зависимостью

$$\psi = 2v_0ax\varphi_*(\eta)$$

Указанное представление функции тока влечет за собой невозможность получения нетривиального решения ( $\psi \neq 0$ ) при непроницаемых стенках, когда  $v_0 = 0$ . Однако комбинация  $va$  также имеет размерность функции тока осесимметричного течения, а комбинация  $v/a$  — размерность скорости. Это использовано при записи решения в виде (2.1) — (2.3) и позволило, как будет показано далее, получить решения для закрученного и незакрученного течения в трубе с заглушенным торцом и непроницаемыми стенками.

3. Рассмотрим вначале течение без закрутки,  $g = \tau = 0$ . В работе [2] путем разложения в ряд по степеням параметра  $\gamma$  или обратной ему величины были получены соответственно решения для малых и больших значений  $\gamma$ . Используя эти результаты, запишем выражения для величин продольной составляющей скорости на оси трубы  $f_0 = f(0)$  и постоянной  $D$ :

$$(3.1) \quad f_0 = 4\gamma \left( 1 - \frac{1}{18}\gamma + \frac{166}{10800}\gamma^2 - \dots \right)$$

$$D = 16\gamma \left( 1 + \frac{3}{4}\gamma - \frac{11}{270}\gamma^2 + \dots \right), \quad |\gamma| \ll 1$$

$$(3.2) \quad f_0 = \gamma \left[ \pi + \frac{10,602}{\pi\gamma} + O(\gamma^{-2}) \right]$$

$$D = \gamma^2 \left[ \pi^2 + \frac{20,204}{\gamma} + O(\gamma^{-2}) \right], \quad |\gamma| \gg 1$$

Как показано в [3], при  $|\gamma| \rightarrow \infty$  существует множество предельных решений уравнения (2.7) с граничными условиями (2.9) — (2.11):

$$(3.3) \quad f = (-1)^n \pi\gamma(2n+1) \cos \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \eta^2 \right]$$

$$D = \pi^2\gamma^2(2n+1)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При  $n = 0$  выражения (3.3) соответствуют первым членам разложений (3.2). Наличие решений (3.3) свидетельствует о неединственности решения задачи, по крайней мере в некоторых областях изменения параметра  $\gamma$ .

В данной работе решения рассматриваемой задачи находились численными методами.

Уравнение (2.7) инвариантно к преобразованию

$$(3.4) \quad \eta_1 = B\eta, \quad f_1 = f/B^2, \quad \varphi_1 = \varphi, \quad D_1 = D/B^4, \quad B = \text{const}$$

что позволяет перейти от поставленной краевой задачи к задаче Коши. При этом величины  $f_1(0)$  и  $D_1$  можно задать, а величину  $\gamma$  определить в результате вычислений.

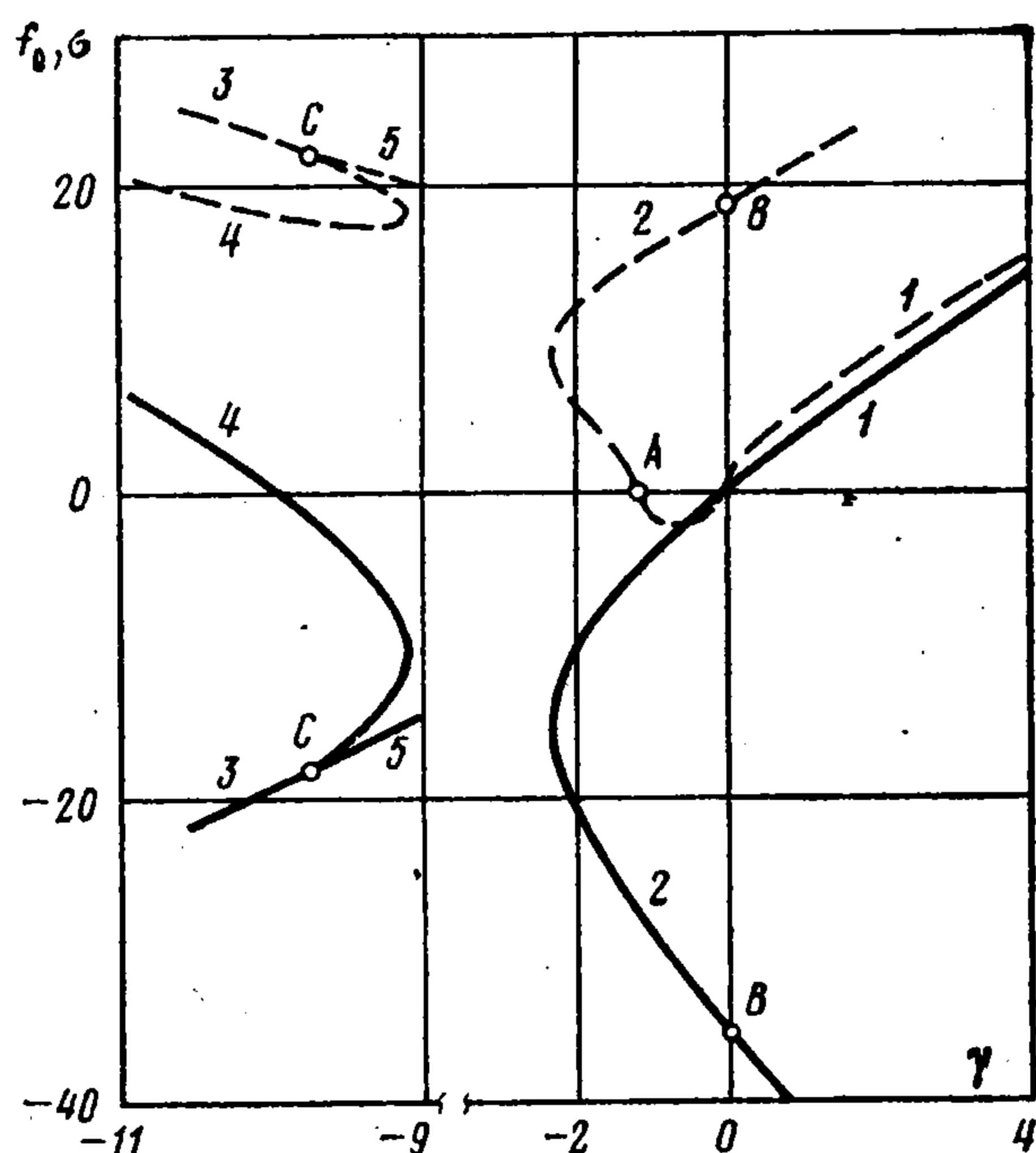
Интегрирование проводили от  $\eta_1 = 0$  вначале до точки  $\eta_1 = \eta_1^*$ , в которой функция  $f_1$  обращается в нуль, т. е. выполняется условие (2.10). Затем интегрирование продолжали за эту точку, так как при определенных парах значений  $f_1(0)$  и  $D_1$  функция  $f_1$  второй раз становилась равной нулю уже при  $\eta_1 = \eta_1^* > \eta_1^0$ . Для других пар  $f_1(0)$  и  $D_1$  абсолютная величина  $f_1$  монотонно возрастала до сколь угодно больших значений. Третьего обращения в нуль величины  $f_1$  достигнуто не было.

При интегрировании величину шага  $h_1$  по аргументу  $\eta_1$  полагали постоянной и выбирали (итерациями) такой, чтобы на интервале интегрирования располагалось пятьдесят расчетных узлов, не считая точки  $\eta_1 = 0$ . В окрестности  $\eta_1 = 0$  решение находили разложением функций в степенной ряд с точностью до членов порядка  $\eta_1^4$  включительно. Найденные таким образом значения  $f_1$  и  $\varphi_1$  при  $\eta_1 = h_1$  использовались в качестве начальных для интегрирования по методу Рунге—Кутты при  $\eta_1 > h_1$ . Условия обращения в нуль величины  $f_1$  при  $\eta_1 = \eta_1^\circ$  или при  $\eta_1 = \eta_1^*$  выполнялись с относительной погрешностью

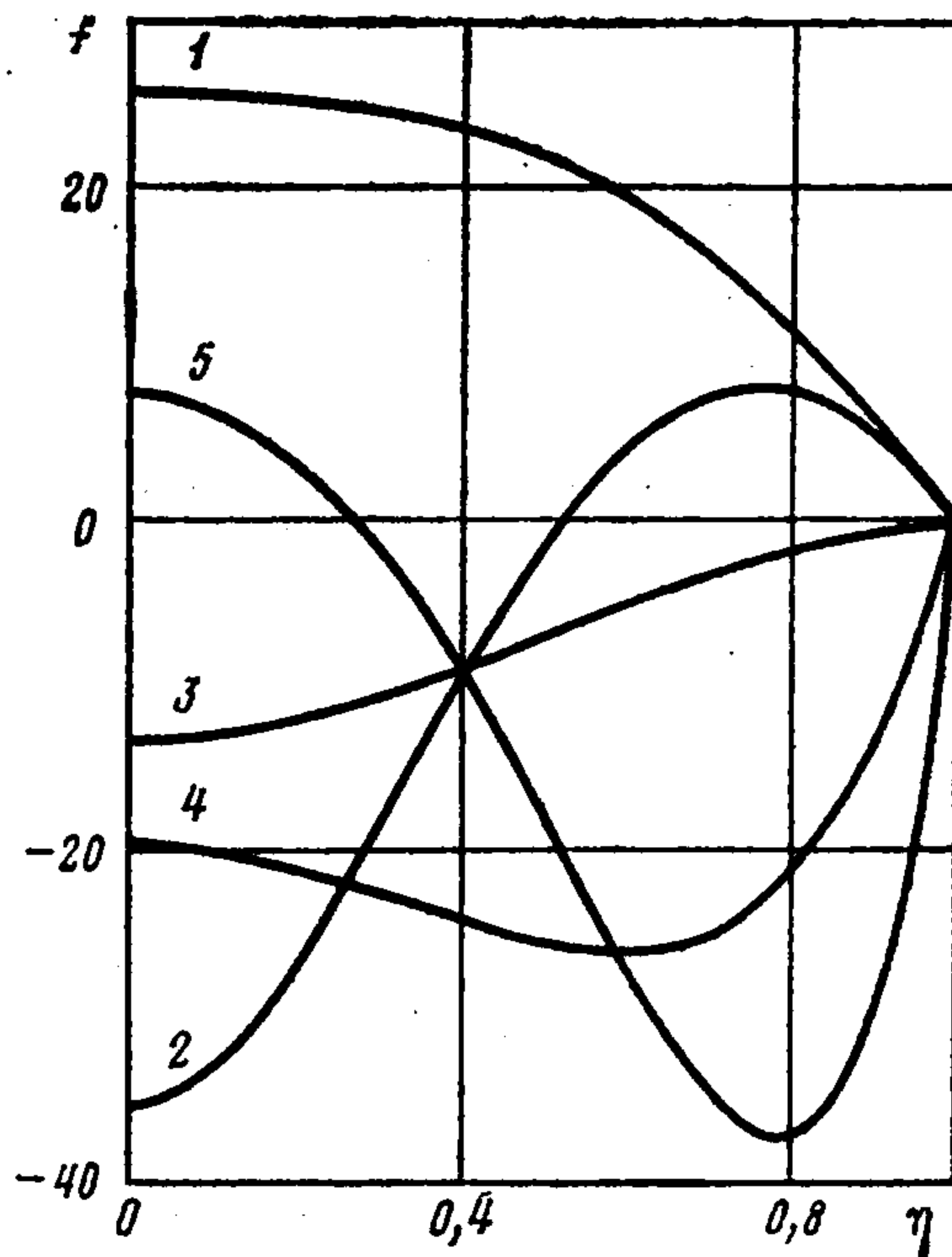
$$\delta = |f_1(\eta_1^\circ)| / |f_1|_{\max} < 10^{-4}$$

Найденные значения функций  $f_1$ ,  $\varphi_1$ , а также значения аргумента  $\eta_1$  и постоянной  $D$  пересчитывали согласно (3.4) к величинам без нижнего индекса. Коэффициент пересчета полагали равным  $\eta_1^\circ$  или  $\eta_1^*$ , а значение параметра  $\gamma$  определялось соответственно величиной  $\varphi_1(\eta_1^\circ)$  или значением  $\varphi_1(\eta_1^*)$ .

На фиг. 1 представлена зависимость величин  $f_0$  и  $\sigma = \sqrt{|D|} \operatorname{sign} D$  от параметра  $\gamma$ , сплошные кривые — значения  $f_0$ , пунктирные — значе-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния  $\sigma$ . Видно, что решения рассматриваемой задачи неединственны при всех значениях  $\gamma$ , для которых удалось их разыскать.

Значения  $f_0$  и  $\sigma$  на ветви 1 решения при  $0 < \gamma < 1$  совпадают с вычисленными по формулам (3.1), а при возрастании  $\gamma$  непрерывно приближаются к значениям, определяемым разложением (3.2). В частности, при  $\gamma = 7,4311$  решение 1 дает  $f_0 = 25,571$ ,  $D = 698,18$ . Профиль продольной составляющей скорости этого частного решения изображен кривой 1 на фиг. 2.

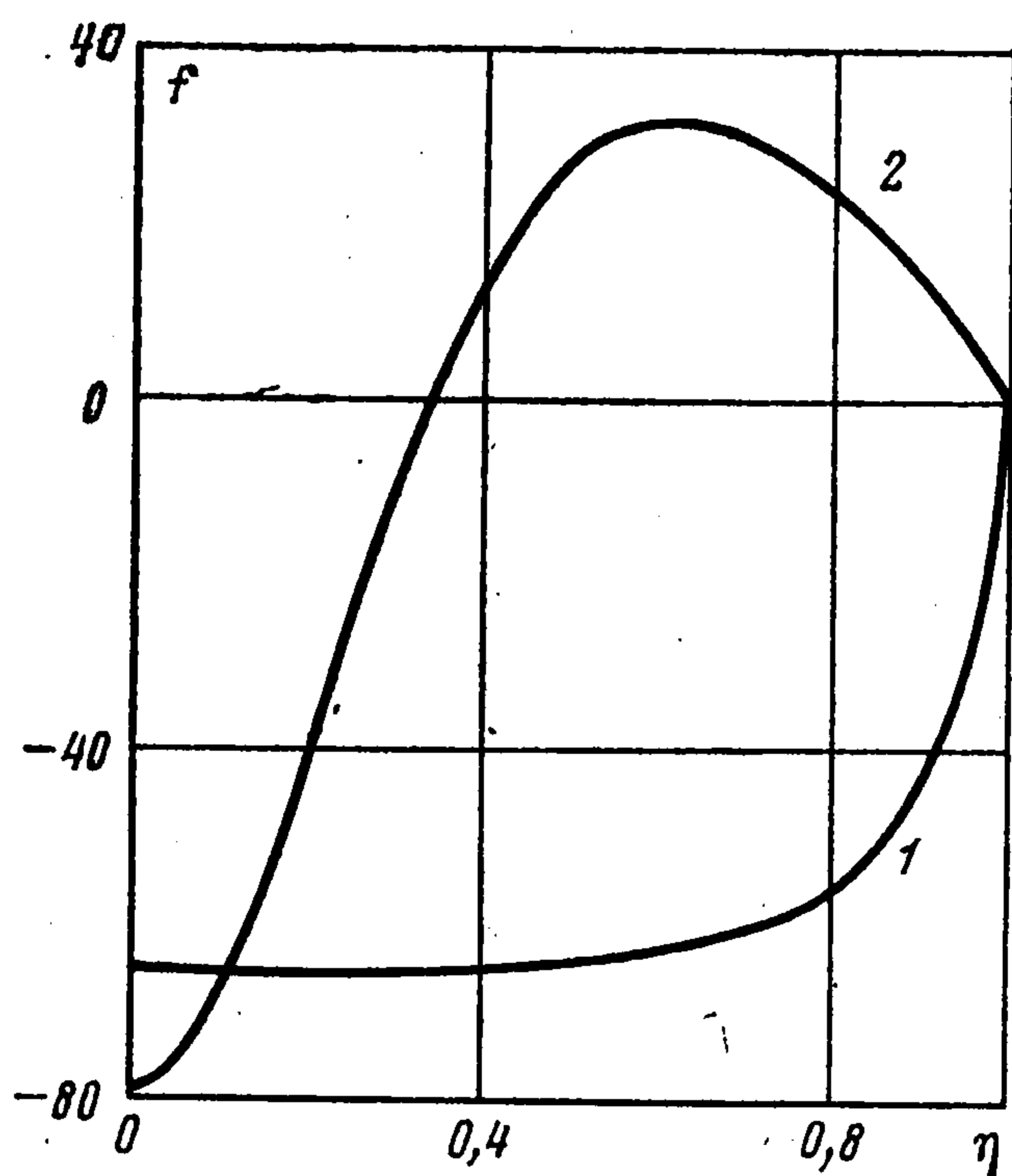
Если  $\gamma < 0$  и  $|\gamma| \ll 1$ , то решение 1 также соответствует (3.1), однако при возрастании  $|\gamma|$  оно не стремится к решению, задаваемому решением (3.2), а выходит на другое решение задачи (ветвь 2).

Заслуживают быть особо отмеченными решение 1 в точке A и решение 2 в точке B. Для первого из них  $D = 0$  при  $\gamma = -1,2065$ , т. е. давление неизменно вдоль пористой трубы. Профиль величины  $f(\eta)$  решения в точке A близок к профилю Пуазейля. Точка B соответствует возможному

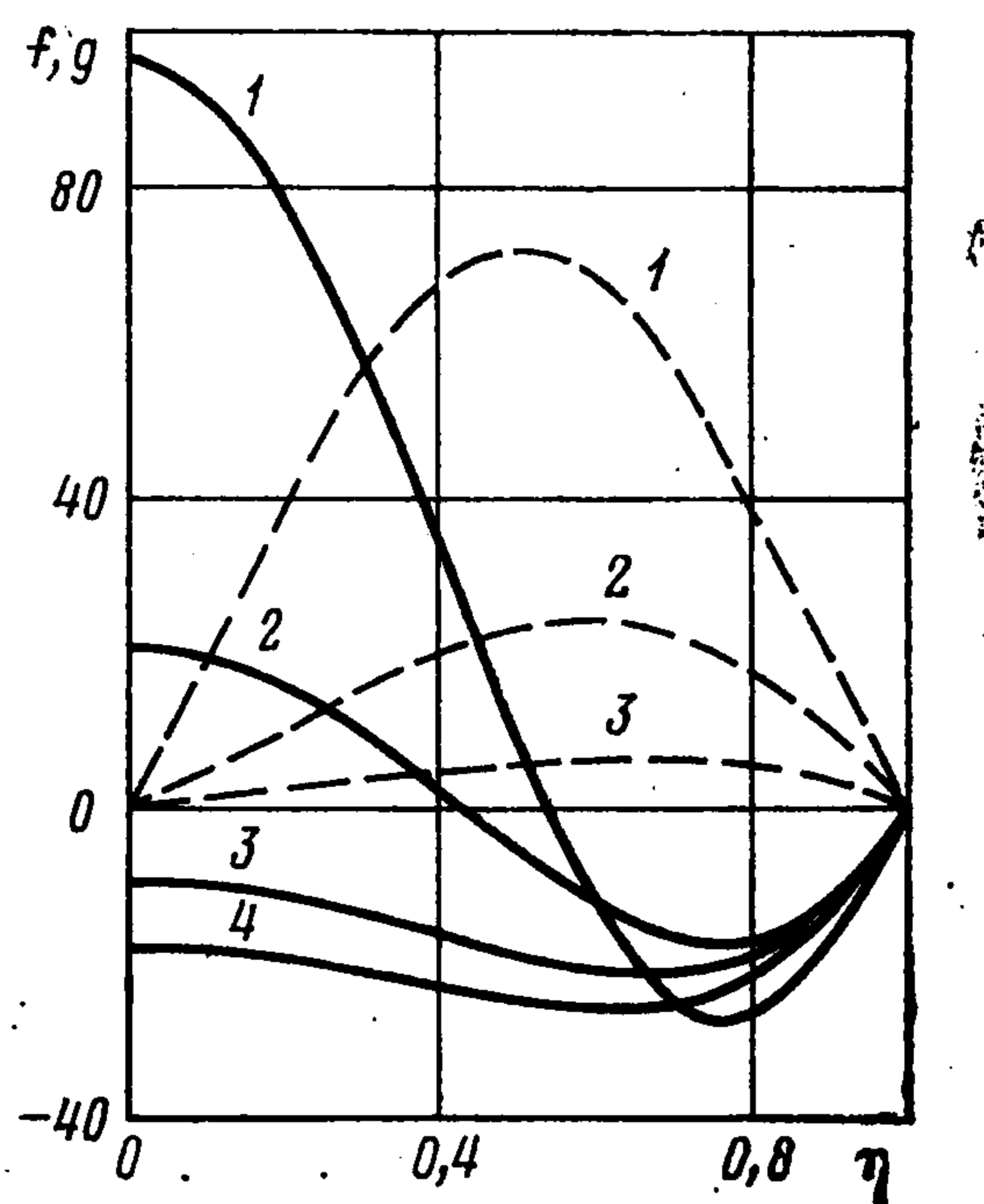
решению уравнений Навье — Стокса для течения с разворотом в тупике, который образован заглушенной с одного конца круглой трубой с непроницаемыми стенками ( $\gamma = 0$ ). В точке  $B$  величина  $f_0 = -35,315$ , а  $D = 348,68$ . Профиль продольной составляющей скорости изображен на фиг. 2 кривой 2. Это решение является собственным решением рассматриваемой краевой задачи при  $\gamma = 0$ .

Кривая 3 фиг. 2 представляет распределение  $f(\eta)$  в области перехода решения 1 в решение 2 ( $\gamma = -2,2469$ ,  $f_0 = -13,385$ ,  $D = 59,648$ ).

Другие две переходящие друг в друга ветви решения задачи найдены для значений параметра  $\gamma < -9,1126$ . Профили продольной составляющей



Фиг. 3



Фиг. 4

скорости для решения ветви 3 при  $\gamma = -10,026$  с  $f_0 = -19,765$ ,  $D = 533,49$  и решения ветви 4 при  $\gamma = -11,083$  с  $f_0 = 7,439$ ,  $D = 442,70$  изображены соответственно кривыми 4 и 5 на фиг. 2.

В точке  $C$  от решения 3 задачи о незакрученном течении ответвляется решение 5 для течения с закруткой, рассматриваемое в п. 4.

На фиг. 3 также представлены профили величины  $f$ . Кривая 1, относящаяся к решению 3 при  $\gamma = -27,279$  ( $f_0 = -64,925$ ,  $D = 4248,2$ ), указывает на разделение поля течения на невязкое ядро с  $f = \text{const} \approx -\sqrt{D}$  и пограничный слой. Толщина пограничного слоя убывает с ростом  $|\gamma|$ . Кривая 2 ( $\gamma = 7,3329$ ,  $f_0 = -78,621$ ,  $D = 1576,6$ ) соответствует течению, которое можно интерпретировать как встречный вдув струи в поток, созданный в результате подачи жидкости в трубу через ее пористые стенки. Толщина струи также убывает с ростом  $\gamma$ .

Заканчивая обсуждение результатов для незакрученного течения, отметим, что численные расчеты [4] автомодельного решения уравнений Навье—Стокса для течения в плоскопараллельном пористом канале ( $a$  — полувысота канала) показали, что это решение при  $\gamma > 0$  ведет себя аналогично полученному решению 1 для круглой трубы, в то время как в области  $\gamma < 0$  при возрастании  $|\gamma|$  непрерывно, в отличие от случая круглой трубы, переходит от решения с параболическим распределением  $f(\eta)$  к решению для невязкого потока с пограничным слоем, полученному автором [5].

4. Перейдем к рассмотрению течения с закруткой. При разыскании решений для такого течения использовалась несколько другая схема расчета. Краевая задача (2.7) — (2.12) решалась методом пристрелки. Инвариантность уравнений (2.7) — (2.8) относительно преобразования

$$(4.1) \quad \eta_1 = B\eta, \quad f_1 = f/B^2, \quad g_1 = g/B^2, \quad \varphi_1 = \varphi, \quad D_1 = D/B^4 \\ B = \text{const}$$

позволяет уменьшить на один число параметров пристрелки.

В силу этого величине  $g_1'(0)$  присваивалось некоторое произвольное значение, не меняющееся в ходе пристрелки. Параметрами пристрелки являлись значения  $f_1(0)$  и  $D_1$ . Интегрирование проводилось от  $\eta_1 = 0$  до точки  $\eta_1 = \eta_1^\circ$ , в которой функция  $f_1$  первый или второй раз (в зависимости от значения  $\gamma$ ) принимала нулевое значение. Искомые величины  $f_1(0)$  и  $D_1$  определяли требованием выполнения с заданной точностью условий  $g_1(\eta_1^\circ) = 0$ ,  $\varphi_1(\eta_1^\circ) = \gamma$ . Для приближения к искомым значениям  $f_1(0)$  и  $D_1$  применяли метод Ньютона.

Выбор шага и вычисление решения в окрестности  $\eta_1$  осуществляли так же, как при нахождении решений для течения без закрутки. Условия  $f_1 = 0$ ,  $g_1 = 0$ ,  $\varphi_1 = \gamma$  при  $\eta_1 = \eta_1^\circ$  выполнялись с относительной погрешностью  $\delta = |z(\eta_1^\circ)| / |z|_{\max} < 10^{-5}$ , где  $z$  — любая из функций  $f_1$ ,  $g_1$ ,  $\varphi_1$ .

Определение исходных функций  $f$ ,  $g$ ,  $\varphi$  и постоянной  $D$  производили простым пересчетом согласно (4.1), при этом коэффициент пересчета  $B = \eta_1^\circ$ .

По результатам решения (2.7), (2.8) вычислялась величина

$$\lambda = \int_0^1 \eta^2 f g d\eta$$

характеризующая перенос момента количества движения

$$L = 2\pi \int_0^a r^2 u w dr$$

а также значение безразмерного параметра закрутки

$$\omega = \frac{a |L|}{2\pi \psi^2(a)} = \frac{|\lambda|}{\gamma^2}$$

являющегося комбинацией величин потока момента количества движения, объемного расхода через данное сечение и радиуса трубы.

Результаты вычисления величин  $f(0)$ ,  $g'(0)$ ,  $D$ ,  $\lambda$  и  $\omega$  в зависимости от значения параметра  $\gamma$  сведены в таблицу

$\gamma$	$f(0)$	$g'(0)$	$D$	$\lambda$	$\omega$
-9,7479	-18,209	0	484,29	0	0
-9	-14,789	6,4977	389,38	-16,851	0,20804
-7	-3,9667	18,835	256,98	-37,337	0,76197
-5	10,685	38,022	483,33	-54,789	2,1916
-3	32,337	79,982	1662,0	-70,601	7,8446
-2	47,695	98,832	3100,9	-77,841	19,460
-1	67,941	137,18	6456,0	-84,640	84,641
0	95,511	193,35	10742	-91,086	$\infty$
1	134,34	278,27	20433	-97,335	97,335
2	190,92	410,88	40097	-103,68	25,919

На фиг. 4 изображены графики продольной (сплошные линии) и окружной (штриховые линии) составляющих скорости для значений  $\gamma = 0, -4, -8, -9,7479$  (кривые 1—4 соответственно).

Особый интерес представляет решение, полученное при условии непроницаемости стенок трубы ( $\gamma = 0$ ), также являющееся собственным значением краевой задачи (2.7) — (2.10), (2.12). Течение, соответствующее этому решению, можно реализовать, если на достаточном удалении от заглушенного торца трубы передавать жидкости момент количества движения, например вдувом тангенциальной струи или вращением крыльчатки.

При значениях  $\gamma$ , близких к  $-9,7479$ , параметр закрутки мал и величина  $f(\eta)$  одного знака, профиль  $f(\eta)$  имеет, однако, седлообразную форму, что является следствием довольно интенсивного отсоса. По мере приближения  $\gamma$  к нулю и возрастании при этом величины  $\omega$  провал профиля  $f(\eta)$  вблизи оси углубляется уже вследствие изменения поля давления, обусловленного закруткой потока. По данным таблицы можно получить, что при значении  $\gamma = -6,39$ , которому соответствует  $\omega = 1,05$ , возникает возвратное течение в приосевой области, прогрессирующее при дальнейшем приближении  $\gamma$  к нулю. В рассмотренном случае течения при  $\gamma < 0$  перенос массы жидкости в целом происходит в направлении удаления от устройства, сообщаемого жидкости закрутку, в то время как при  $\gamma > 0$  направлен к закручивающему аппарату. Первый случай представляется, однако, практически более интересным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls.— J. Appl. Phys. 1953, v. 24, No. 9, p. 1232.
2. Yuan S. W., Finkelstein A. B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall.— Trans. ASME, 1956, v. 78, No. 4, p. 719.
3. Culick F. E. C. Rotational axisymmetric mean flow and damping of acoustic waves in a solid propellant rocket.— AIAA Journal, 1966, v.4, No. 8, p. 1462.
4. Berman A. S. Concerning laminar flow in channels with porous walls.— J. Appl. Phys., 1956, v. 27, No. 12, p. 1557.
5. Sellars J. R. Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers.— J. Appl. Phys., 1955, v. 26, No. 4, p. 489.

Ленинград

Поступила в редакцию  
9.X.1980