Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 62—50

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Шахвердян С. В.

В развитие метода интегральных штрафных функций предлагаются методы решения задач оптимизации динамических систем с ограничениями на фазовые координаты высоких порядков. В форме принципа максимума получены необходимые условия оптимальности для задач оптимизации с ограничениями на скорость управления различных видов.

В настоящее время одним из основных методов решения задач оптимизации динамических систем с ограничениями на фазовые координаты является метод интегральных штрафных функций, который, например, для учета неравенства типа $g(x, t) \leqslant 0$ сводится к прибавлению к критерию качества интеграла [1—3]

$$K\int_0^T E(g)\, g^2\, dt, \quad E(g) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad g \leqslant 0 \\ 1, & \text{если} \quad g > 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

Здесь x — вектор состояния системы, K — штрафной коэффициент, T — конец периода управления.

Отметим, что задача оптимизации динамических систем с ограничениями на фазовые координаты путем ввода интеграла (0.1) в общем случае не решается. Это связано с тем, что в момент выхода фазовой траектории на границу допустимой области t_1 производная подынтегральной функции интеграла (0.1) по фазовым координатам равна нулю, в силу чего сопряженные переменные гамильтоновой системы получаются всегда непрерывными. Между тем известно, что эти переменные в момент t_1 в общем случае должны терпеть разрывы [4—6], в особенности когда порядок ограничения $g(x, t) \leqslant 0$ выше первого. (Здесь и всюду ниже под порядком ограничения понимается порядок наименьшей производной $g(x, t)$ по времени, содержащей управляющий параметр.) Кроме того, что более важно, непосредственным включением $g(x, t)$ в любой форме в целевой функционал, как будет показано ниже, в общем случае не обеспечивается нахождение фазовых траекторий в допустимой области, т. е. ограничение $g(x, t) \leqslant 0$ не выдерживается.

Если ограничение $g(x, t) \leqslant 0$ учесть с помощью добавления к критерию качества интеграла (α — множитель Лагранжа, y — дополнительный управляющий параметр)

$$\int_0^T \alpha Y\, dt, \quad Y \equiv y^2 + g(x, t) = 0 \tag{0.2}$$

то можно доказать, что метод интегральных штрафных функций и метод, основанный на непосредственном введении $g(x, t)$ в рассмотрение в форме (0.2), который назовем методом множителей, эквивалентны. (Два метода будем называть эквивалентными, если полученные по ним множества решений либо совпадают, либо оба пустые.)

В самом деле, из экстремума целевого функционала по y следует $\alpha = 0$ на $Q_0 = \{t : E(g) = 0\}$, $\alpha \neq 0$ на $Q_1 = \{t : E(g) = 1\}$.

Поэтому справедливо равенство

$$\int_0^T \alpha Y\, dt = \int_0^T \alpha E(g)\, g\, dt = 0$$

Следовательно

$$\frac{1}{2} K \int_0^T E(g) g^2 dt = 0$$

откуда при $g \to 0$ будем иметь $\alpha = {}^1/_2 Kg$, что и доказывает эквивалентность методов интегральных штрафных функций и множителей.

Задача оптимального управления с ограничением типа $|u^\cdot| \leqslant a$, которая наряду с другими рассматривается в данной работе, исследована в [7], где $u^\cdot$ — скорость изменения скалярного управления u, a — заданное число. Учет ограничения $|u^\cdot| \leqslant a$ в работе [7] организован путем ввода u в разряд фазовых координат, а за управляющий параметр принят $u^\cdot$. Полученное в [7] решение неполное, поскольку из него не следует решение внутри допустимой области изменения u и $u^\cdot$.

Ниже предлагаются методы решения задач оптимизации динамических систем с ограничениями на фазовые координаты и скорость управления, лишенные указанных выше недостатков.

1. Задача с фазовыми ограничениями. Для простоты изложения примем, что фазовая траектория один раз выходит за границу допустимой области и лежит на ней на интервале $[t_1, t_2]$, а также имеется одно ограничение типа $g(x, t) \leqslant 0$, p-го порядка. С этими предположениями рассмотрим стандартную задачу оптимального управления:
минимизировать

$$I = \int_0^T f_0(x, u, t)\, dt \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$x^\cdot = f(x, u, t), \quad x(0) = x^\circ, \quad x(T) = x^T \tag{1.2}$$

$$u(t) \in U = \{u: g(u) \leqslant 0\} \tag{1.3}$$

$$x(t) \in R = \{x: g(x, t) \leqslant 0\} \tag{1.4}$$

где x — n-мерный непрерывный фазовый вектор, имеющий всюду, кроме конечного числа точек, непрерывные производные по t, u — m-мерный кусочно-непрерывный управляющий вектор, q — в общем случае π-мерная непрерывная и непрерывно дифференцируемая по u функция на U, $\pi \leqslant 2m$; g — скалярная непрерывная и непрерывно дифференцируемая до порядка p по x, u функция на $R \times U$, f — n-мерная вектор-функция. Функции f_0 и f предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми по x, u на $R \times U$.

Для доказательства необходимости ввода тангенциальных ограничений [5], независимо от метода учета $g(x, t) = 0$ на Q_1, а также утверждения о том, что непосредственным включением только $g(x, t)$ в любой форме в целевой функционал не обеспечивается ограничение (1.4), рассмотрим метод расширенного фазового пространства. Он основан на дополнении (1.2) системой

$$2y_1y_1^\cdot - y_2 = 0, \quad y_2^\cdot - y_3 = 0, \ldots, \quad y_p^\cdot + g^{(p)}(x, u, t) = 0 \tag{1.5}$$

с условиями на правом конце

$$[y_1^2 + g(x, t)]_T = 0, \ldots, [y_p + g^{(p-1)}(x, t)]_T = 0 \tag{1.6}$$

Решение системы (1.5) с условиями (1.6) имеет вид [8]:

$$y_1^2 + g(x, t) = 0, \quad y_{j+1} + g^{(j)}(x, t) = 0 \tag{1.7}$$
$$g^{(j)} \equiv d^j g / dt^j, \quad j = 1, \ldots, p-1$$

Из (1.7) видно, что если $y_1(t)$ всюду на $[0, T]$ будет действительной переменной, тогда добавлением системы (1.5) с условием (1.6) к системе (1.2) можно было обеспечить выполнение условия $g(x, t) \leqslant 0$ на $[0, T]$. Однако из (1.7) не следует

$$y_1^2(t) \geqslant 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

Следовательно, в результате ввода (1.5) с (1.6) неравенство $g(x, t) \leqslant \leqslant 0$ не может быть соблюдено в общем случае.

Из (1.5) видно, что для того, чтобы на $[t_1, t_2]$ имело место равенство $y_1(t) = g(x, t) = 0$, необходимо и достаточно обеспечить выполнение следующих условий:

$$y_s^{\cdot}(t) = 0, \quad s \in M = \{1, \ldots, p\}; \quad y_j(t_1) = 0, \quad j = 1, \ldots, p$$

или

$$g^{(s)}(x, u, t) = 0, \quad s \in M \tag{1.8}$$
$$G(x, t_1) = [g(x, t_1), \; g^{(1)}(x, t_1), \ldots, g^{(p-1)}(x, t_1)] = 0$$
$$\frac{\partial g^{(s)}(x, u, t)}{\partial u} \begin{cases} = 0, & \text{если } s \in M \setminus p \\ \neq 0, & \text{если } s = p \end{cases}$$

Отметим, что решение задачи (1.1) — (1.4) с вводом системы (1.5) и условия (1.6) по существу равносильно решению задачи (1.1) — (1.3) с (0.2), а следовательно, и с (0.1). Таким образом, методы интегральных штрафных функций, множителей и расширенного фазового пространства эквивалентны и для учета (1.4) по любому из них необходим ввод второго условия (1.8).

Метод интегральных штрафных функций. В силу изложенного выше исходная задача (1.1) — (1.4) должна быть заменена следующей задачей: минимизировать (1.1) при ограничениях (1.2), (1.3) и (1.8). Если к этой задаче применить метод интегральных штрафных функций, то штрафная функция должна быть введена при помощи следующего уравнения с граничными условиями:

$$\dot{x}_{n+1} = \frac{1}{2} E(g)(g^{(j)})^2 \equiv f_{n+1}(x, u, t), \quad j \in M \tag{1.9}$$

$$x_{n+1}(0) = 0, \; x_{n+1}(T) = \frac{1}{2} \int_0^T E(g)(g^{(j)})^2 dt = 0 \tag{1.10}$$

где $E(g)$ определяется так же, как и в (0.1). Очевидно, что для учета (1.4) кроме (1.9) с (1.10) необходимо ввести в рассмотрение и второе условие (1.8), поскольку независимо от способа учета $g^{(j)}(x, u, t) = 0$ условие $G(x, t_1) = 0$ должно быть выполнено всегда.

Обозначим

$$x_0^{\cdot} = f_0(x, u, t), \quad x_0(0) = 0, \quad x_0(T) = I \tag{1.11}$$
$$\varphi_i = q_i(u) + v_i^2 = 0, \quad i = 1, \ldots, \pi \tag{1.12}$$

где v_i — дополнительный управляющий параметр, позволяющий учесть (1.3) в форме равенства (1.12).

Тогда задачу (1.1) — (1.4) можно сформулировать так: необходимо найти вектор-функции u и v, которые минимизируют

$$I^* = I + \lambda G'(x, t) \tag{1.13}$$

при ограничениях (1.2), (1.9) — (1.12), где λ — вектор-строка размера p, G' — p-мерный вектор-столбец; штрих означает транспонирование. Для этой задачи гамильтониан имеет вид

$$\begin{gathered} H = \psi^\circ f^\circ + \nu\varphi \\ f^\circ = (f_0, \ldots, f_{n+1}), \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_\pi), \quad \psi^\circ = (\psi_0, \ldots, \psi_{n+1}) \\ \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_\pi) \end{gathered} \tag{1.14}$$

где ψ° — $n+2$-мерный сопряженный вектор, ν — π-мерный вектор-множитель Лагранжа.

Система, сопряженная с (1.2), (1.9) и (1.11), с помощью гамильтониана может быть записана так:

$$\psi_0^{\cdot} = 0, \quad \psi_i' = -\partial H/\partial x_i, \quad \psi_{n+1}^{\cdot} = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.15}$$

Из условия максимума (1.14) имеем

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi^\circ \frac{\partial f^\circ}{\partial u} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0 \tag{1.16}$$

$$\partial H/\partial v = \nu v = 0 \tag{1.17}$$

Из (1.17) следует

$$\nu = 0, \quad v \neq 0; \quad \nu \neq 0, \quad v = 0; \quad \nu = 0, \quad v = 0 \tag{1.18}$$

Условия (1.18) являются существенно слабыми, что обусловлено сведением неравенства (1.3) к равенству (1.12). Из-за слабости условий (1.18), как правило, возникает зацикливание итерационной процедуры, поэтому (1.18) нуждаются в усилении. В этой связи с помощью теоремы Куна — Таккера [9] можно доказать, что справедливы условия

$$\nu \geqslant 0, \quad v = 0; \quad \nu = 0, \quad v \neq 0 \tag{1.19}$$

В момент t_1 должны быть выполнены известные условия сопряжения

$$\left(\psi^- - \psi^+ - \lambda \frac{\partial G'}{\partial x}\right)_{t_1} = 0, \quad \Phi = \left(H^- - H^+ + \lambda \frac{\partial G'}{\partial t}\right)_{t_1} = 0 \tag{1.20}$$

где верхними индексами плюс и минус отмечены значения ψ и H соответственно слева и справа от точки t_1. Условия сопряжения для t_2 аналогичны условиям (1.20), записанным при $\lambda = 0$.

Из $x_{n+1}(T) = 0$ и непрерывности и непрерывной дифференцируемости по $x \in R$ функции g следует, что f_{n+1}, а значит, и H — непрерывные и непрерывно дифференцируемые по $x \in R$ функции, причем $g^{(s)} = 0$ на Q_1.

Очевидно, что если в (1.9) принять $g^{(j)} = g$, тогда величина $x_{n+1}(T)$ будет равна интегралу (0.1), поэтому в (1.14) $(n+1)$-я компонента ψ° играет ту же роль, что и K в (0.1).

Таким образом, исходная задача сводится к решению следующей многоточечной краевой задачи: найти u, v, x, x_{n+1}, ψ°, ν, λ, t_1, t_2 путем совместного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений

(1.2), (1.9), (1.12), (1.15) с (1.17) при условиях (1.10), (1.11), (1.19), (1.20) и $G(x, t_1) = 0$. При этом предполагается, что существуют ненулевая вектор-функция ψ°, $\lambda \neq 0$ и вектор ν, удовлетворяющий условиям (1.19).

Метод множителей. К решению задачи (1.1) — (1.4) можно применить и метод множителей Лагранжа. Для этого из множества M выбираем j и составляем гамильтониан этой задачи в виде

$$(1.21)\qquad H = \psi f + \nu\varphi \text{ на } Q_0,\quad H = \psi f + \mu_j g^{(j)} + \nu\varphi \text{ на } Q_1$$
$$\psi = (\psi_0, \ldots, \psi_n),\quad f = (f_0, \ldots, f_n)$$

который на $Q_0 \bigcup Q_1$ непрерывен и непрерывно дифференцируем по $x \in R$, поскольку f и $g^{(j)}$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по $x \in R$. Следовательно, вектор-функция ψ может быть определена из системы

$$(1.22)\qquad \psi^{\boldsymbol\cdot} = -\psi\frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ на } Q_0,\quad \psi^{\boldsymbol\cdot} = -\left(\psi\frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_j\frac{\partial g^{(j)}}{\partial x_i}\right) \text{ на } Q_1$$
$$\psi^{\boldsymbol\cdot}_{\cdot} = 0$$

с использованием (1.20). Здесь условия (1.16) — (1.19) также остаются в силе.

Задача (1.1) — (1.4) с гамильтонианом H, определяемым по (1.21), и $j = p$ рассмотрена в [5].

Если сравнить решения задачи (1.1) — (1.3) и (1.8) при j и $j + 1$, можно доказать, что справедливы условия

$$(1.23)\qquad \psi_i^{(j)} = \psi_i^{(j+1)} + \mu_{j+1}\frac{\partial g^{(j)}}{\partial x_i},\quad i = 1, \ldots, n$$

$$(1.24)\qquad \mu_j = -\frac{d\mu_{j+1}}{dt},\quad j = 1, \ldots p - 1$$

где $\psi_i^{(j)}$ и $\psi_i^{(j+1)}$ — решение системы (1.22) при вводе в рассмотрение соответственно $g^{(j)}$ и $g^{(j+1)}$, а μ_j и μ_{j+1} — множители Лагранжа при $g^{(j)}$ и $g^{(j+1)}$ в выражении (1.21).

Из условия Лежандра — Клебша следует

$$(1.25)\qquad (-1)^j\frac{d^j\mu_p}{dt^j} \leqslant 0,\quad j = 1, \ldots, p$$

а из условия максимума (1.21) по u

$$(1.26)\qquad \mu_p(t_2) = 0$$

Учитывая (1.24) и (1.25), можно заметить, что в общем случае

$$\mu_j(t_2) \neq 0,\quad \forall j \in M \setminus p$$

Предлагаемый метод учета (1.4), имея ряд общих моментов с методом, изложенным в [4], отличается от него тем, что в (1.8) вектор G имеет размерность $j = p$, а в [4] $j \leqslant p$, и в (1.21) $Q_0 \neq \phi$, а в [4] $Q_0 = \phi$.

2. Задачи с ограничениями на скорость изменения управления. Рассматриваются три задачи с ограничениями на скорость изменения, управления, косвенно связанные с задачей, исследованной в п. 1. При их решении используется известный метод учета двусторонних ограничений на управляющий параметр [3, 10], дополненный требованием знакоопределенности множителей Лагранжа.

Задача 1. Требуется минимизировать

(2.1) $$I = \int_0^T f_0(x, u, t)\, dt$$

при ограничениях (1.2), (1.3) и

(2.2) $$|u_j^{\cdot}| \leqslant a$$

Обозначим

(2.3) $$u_j^{\cdot} = z$$

тогда (2.2) можно представить в виде неравенства $|z| \leqslant a$, которое с помощью параметра ρ можно заменить равенством

(2.4) $$F = 0, \quad F \equiv a^2 - z^2 - \rho^2$$

В результате требуется минимизировать (2.1) по u_s, z, ρ, $s = 1, \ldots, m$, $s \neq j$ при условиях (2.4), (1.2), (1.12).

Для этой задачи гамильтониан может быть представлен так:

$$H = \psi^\circ f^\circ + \nu\varphi + \mu F$$

где $f_{n+1} \equiv z$, μ — множитель Лагранжа.

С помощью гамильтониана H система, сопряженная (1.2), (1.11) и (2.3), может быть записана в виде

(2.5) $$\psi_0^{\cdot} = 0, \quad \psi_i^{\cdot} = -\partial H/\partial x_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

(2.6) $$\psi_{n+1}^{\cdot} = -\partial H/\partial u_j$$

Из условия максимума гамильтониана H дополнительно к (1.16) и (1.17) получим

(2.7) $$\partial H/\partial z = \psi_{n+1} - 2\mu z = 0, \quad \partial H/\partial\rho = \mu\rho = 0$$

(2.8) $$\psi_{n+1} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad z = a, \quad \psi_{n+1} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad z = -a$$

Из (2.7) и (2.8) следует

(2.9) $$\mu \geqslant 0, \text{ если } |z| = a, \ \mu = 0, \text{ если } -a \leqslant z \leqslant a$$

В задаче 1 особый интерес представляют уравнения (2.6) и (2.7).

Когда z на каком-то интервале находится внутри допустимой области, т. е. $\rho \neq 0$, $\mu = 0$, тогда из (2.7) следует, что на этом интервале $\psi_{n+1} = 0$, следовательно, и $\psi_{n+1}^{\cdot} = 0$. В этом случае из (2.6) имеем $\partial H/\partial u_j = 0$, откуда и определяется u_j по обычной схеме.

Когда же $|z| = a$, тогда $\rho = 0$, $\mu \geqslant 0$, а u_j и μ определяются соответственно из (2.3), (2.7). Причем, если условие (2.9) выполняется, то $|z| = a$ — решение, если же нет, решение следует искать внутри допустимой области.

Из (2.7), (2.9) и условия $\psi_{n+1}(\tau) \neq 0$, когда $u_j(\tau)$ фиксировано, $\psi_{n+1}(\tau) = 0$, в противном случае ($\tau = 0, T$) следует $\mu(\tau) \geqslant 0$, $|z(\tau)| = a$, когда u фиксировано, $\mu(\tau) = 0$, $-a \leqslant z(\tau) \leqslant a$ в противном случае.

Задача 2. Задача 2 от задачи 1 отличается тем, что здесь вместо (2.2) вводится неравенство (b — заданное число)

(2.10) $$\left| \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{m} u_j \right| \leqslant b$$

Обозначим

$$(2.11)\qquad V=\sum_{j=1}^{m}u_j,\quad \varphi_0=V-\sum_{j=1}^{m}u_j=0,\quad V^{\cdot}=\beta$$

Последнее уравнение (2.11) добавляется к системе (1.2), благодаря чему, а также (1.11), размерность фазового пространства становится равной $n+2$, причем для V левый и правый концы принимаются свободными.

Тогда ограничение (2.10) можно представить так: $|\beta|\leqslant b$ или $F_1 = b^2-\beta^2-\gamma^2=0$, где γ — дополнительный управляющий параметр. Для этой задачи гамильтониан имеет вид (μ_1 — множитель Лагранжа)

$$(2.12)\qquad H=\psi^\circ f^\circ+\nu^\circ\varphi^\circ+\mu_1F_1$$

$$f_{n+1}\equiv\beta,\quad \varphi^\circ=(\varphi_0,\varphi),\quad \nu^\circ=(\nu_0,\nu)$$

Для задачи 2 сопряженные уравнения гамильтоновой системы имеют вид

$$(2.13)\qquad \psi_0^{\cdot}=0,\quad \psi_i^{\cdot}=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\quad i=1,\ldots,n;\ \psi_{n+1}^{\cdot}=-\frac{\partial H}{\partial V}$$

Из условия максимума (2.12) наряду с (1.16) и (1.17) имеем

$$(2.14)\qquad \frac{\partial H}{\partial\beta}=\psi_{n+1}-2\mu_1\beta=0,\quad \frac{\partial H}{\partial\gamma}=\mu_1\gamma=0$$

$$(2.15)\qquad \psi_{n+1}\geqslant 0\ \text{ при } \beta=b;\quad \psi_{n+1}\leqslant 0\ \text{ при }\ \beta=-b$$

Из (2.14) и (2.15) получим $\mu_1\geqslant 0$, если $|\beta|=b$; $\mu_1=0$, если $-b\leqslant \beta\leqslant b$.

При $\mu_1=0$ β находится внутри допустимой области, а из (2.14) и последнего уравнения (2.13) имеем

$$\psi_{n+1}=0,\quad \partial H/\partial V=0,\quad \nu_0=0$$

Если же $\mu_1\geqslant 0$, $|\beta|=b$, тогда $\nu_0\neq 0$, причем ν_0 определяется из условия выполнения равенства $\varphi_0=0$, в котором V вычисляется из последнего уравнения (2.11). Отметим, что в этой задаче $\psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(T)=0$, так как переменная V рассматривается со свободными концами.

Задача 3. В этой задаче вместо неравенства (2.2) (задача 1) рассматривается равенство ($l(t)$ — заданная функция времени)

$$(2.16)\qquad \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{\tau}u_j=l(t),\quad \tau\leqslant m$$

Обозначим

$$\varphi_0=V-\sum_{j=1}^{\tau}u_j$$

Тогда (2.16) примет вид

$$(2.17)\qquad V^{\cdot}=l(t)$$

Уравнение (2.17) добавляется к системе (1.2), а $\varphi_0=0$ вводится как дополнительное ограничение. Здесь также переменная V вводится со свободными концами.

В силу этого для задачи 3 гамильтониан может быть записан так:

(2.18) $$H = \psi^\circ f^\circ + \nu^\circ \varphi^\circ$$

$$(f_{n+1} \equiv l\,(t), \quad \varphi^\circ = (\varphi_0, \varphi), \quad \nu^\circ = (\nu_0, \nu))$$

Для этой задачи необходимые условия максимума H аналогичны уравнениям (1.16) и (1.17), а сопряженная система — системе (2.13), причем

$$\dot\psi_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial V} = -\nu_0, \quad \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(T) = 0$$

Отметим, что постоянная интегрирования, получаемая при решении уравнения (2.17), должна быть определена из условия $\psi_{n+1}(T) = 0$.

Отметим, что ограничение (2.16) можно учесть и так.

Из (2.17) получим

$$V = L\,(t) + C, \quad L\,(t) \equiv \int\limits_0^t l\,(t)\,dt$$

где постоянная интегрирования C в этом случае является параметром, благодаря чему задача 3 сводится к параметрической задаче.

3. *Пример*. Требуется найти управление $u\,(t)$, минимизирующее функционал

(3.1) $$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^2\,dt$$

при ограничениях

(3.2) $$\dot x_1 = x_2, \ \dot x_2 = u, \ x^\circ = (0{,}1), \ x^T = (0, -1)$$

(3.3) $$g\,(x_1) = x_1\,(t) - d \leqslant 0, \ d < {}^1/_6$$

Этот пример взят из [5], где приведено точное решение задачи, полученное с помощью ввода $G\,(x, t_1) = 0$ и $g^{(p)}(u) = 0$ на $[t_1, t_2]$, где величина p для ограничения (3.3) равна двум.

Этот простой пример интересен тем, что на нем легко показать, что обычный метод интегральных штрафных функций, а также другие методы, основанные на непосредственном включении $g\,(x, t) = 0$ в любой форме в целевой функционал, для учета (3.3) не пригодны. В самом деле, если ограничение (3.3) учесть, например, с помощью равенства

(3.4) $$\varphi = y^2 + g\,(x_1) = 0$$

тогда для рассматриваемого примера гамильтониан можно представить так:

(3.5) $$H = \frac{1}{2}\psi_0 u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \lambda\varphi$$

а сопряженная система будет иметь вид (y — дополнительный управляющий параметр

(3.6) $$\psi_0 = -1, \quad \dot\psi_1 = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad \dot\psi_2 = -\psi_1$$

Из условия максимума (3.5) получим

(3.7) $$\partial H/\partial u = \psi_2 - u = 0, \ \psi_2 = u$$

(3.8) $$\partial H/\partial y = \lambda y = 0$$

Из (3.8) следует

(3.9) $$\lambda \neq 0, \ y = 0; \quad \lambda = 0, \ y \neq 0; \quad \lambda = 0, \ y = 0$$

Так как $[0, t_1]$ и $[t_2, T]$ $y \neq 0$, $\lambda = 0$, следовательно, на этих интервалах $\psi_1 = \mathrm{const}$. На $[t_1, t_2]$ $y = 0$, т. е. $g\,(x_1) = 0$, $x_1 = d$, $\dot x_1 = x_2 = 0$, $\dot x_2 = u = 0$.

Но при $y = 0$, согласно (3.9), $\lambda \neq 0$ или $\lambda = 0$. Если $\lambda \neq 0$, то из (3.6) следует, что на $[t_1, t_2]$ $\psi_2 \neq 0$, следовательно, $u \neq 0$, $x_2 \neq 0$ и $x_1 \neq d$. Иначе говоря, при любом отличном от нуля λ не может быть обеспечено условие (3.3). Если же $\lambda = 0$, то $\psi_1 = \text{const}$ на $[0, T]$ и ψ_2 — в общем случае линейная функция времени, что опять-таки не обеспечивает выполнение (3.3).

Отметим, что задача (3.1) — (3.3) была решена с использованием штрафных функций по обычной схеме, т. е. без ввода условия (1.8). При таком решении наблюдалась следующая картина. Когда коэффициент штрафной функции увеличивали, тогда фазовая траектория стягивалась к границе допустимой области, а правый конец в фазовой траектории существенно удалялся от точки $x^T = (0, -1)$. Когда же удерживались условия на правом конце, тогда ограничение (3.3) не выполнялось ни при каких коэффициентах штрафных функций. Все это еще раз подтверждает необходимость ввода условия (1.8).

Для рассматриваемого примера условие (1.8) имеет вид

$$G' = \left\| \begin{matrix} x_1 - d \\ x_2 \end{matrix} \right\|_{t_1} = 0 \tag{3.10}$$

$$g^{(j)} = 0,\ t \in [t_1, t_2],\ j \in M = \{1, 2\} \tag{3.11}$$

В задаче (3.1) — (3.3) учет (3.3), как было отмечено выше, следует организовать вводом в рассмотрение (3.10) и либо $g^{(1)} = 0$, либо $g^{(2)} = 0$. Задача (3.1) — (3.3) при помощи (3.10) и $g^{(2)} = 0$ исследована в [5], поэтому здесь будет дано решение с вводом условия $g^{(1)} = 0$ на интервале $[t_1, t_2]$.

Для задачи (3.1) — (3.3) при учете (3.3) с помощью (3.10) и $g^{(1)} = x_2 = 0$ гамильтониан может быть представлен в виде

$$H = \frac{1}{2}\psi_0 u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \mu_1 E(g)\, g^{(1)} \tag{3.11}$$

Сопряженная система такова:

$$\psi_0 = -1,\ \psi_1 = \text{const},\ \psi_2^{\cdot} = -(\psi_1 + \mu_1 E(g))$$

Условие (3.7) остается в силе и при H, определяемом по (3.11).

С учетом условий сопряжения (1.20) и (1.21) получим следующее решение задачи (3.1) — (3.3):

$$\mu_1 = -\psi_1 \text{ на } [t_1, t_2]$$

$$\psi_1 = \begin{cases} \dfrac{2}{9d^2}, & t \in [0, 3d] \\ -\dfrac{2}{9d^2}, & t \in [3d, 1] \end{cases}$$

$$\psi_2 = \begin{cases} \dfrac{2}{3d}\left(1 - \dfrac{t}{3d}\right), & t \in [0, 3d] \\ 0, & t \in [3d, 1-3d] \\ \dfrac{2}{3d}\left(1 - \dfrac{1-t}{3d}\right), & t \in [1-3d, 1] \end{cases}$$

Выражения для x_1 и x_2 имеют вид, аналогичный выражениям, полученным в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. М.: Мир, 1974. 376 с.
2. *Левитин Е. С.*, *Поляк Б. Т.* Методы минимизации при наличии ограничений.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 5, с. 787.
3. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета./Под ред. Лейтмана Дж. М.: Наука, 1965. 538 с.
4. *Семенов А. С.*, *Троицкий В. А.* О задачах оптимизации с ограничениями на фазовые координаты.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 1, с. 127.
5. *Брайсон А.*, *Хо-ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
6. *Понтрягин Л. С.*, *Болтянский В. Г.*, *Гамкрелидзе Р. В.*, *Мишенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961, 391 с.

7. *Чэнг С. Л.* Видоизмененный принцип максимума для оптимальных систем с ограниченными фазовыми координатами.— В кн.: Оптимальные системы. Статистические методы. М.: Наука, 1965, с. 131.
8. *Смольяков Э. Р.* Принцип максимума для задач с фазовыми ограничениями.— В. кн.: Исследование операций. Вып. 2. М.: ВЦ АН СССР, 1971, с. 136.
9. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967. 506 с.
10. *Троицкий В. А.* Вариационные задачи оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, с. 431

Ереван

Поступила в редакцию
25.I.1980