Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 531.36 + 62—50

О СХОДИМОСТИ ПРОЦЕДУР СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ МАРКОВСКИХ ПОМЕХАХ В ИЗМЕРЕНИЯХ

Кац И. Я.

Рассматривается задача о сходимости процедур стохастической аппроксимации [1, 2] для отыскания корня функции при условии, что доступные изменению значения этой функции содержат как внешние, так и внутренние возмущения. Отличие задачи от наиболее распространенных постановок состоит в отказе от предположения о независимости и аддитивности помех. Доказательство сходимости основано на использовании стохастических функций Ляпунова [3—6].

При иной форме учета возмущений и другими методами дискретные процедуры стохастической аппроксимации при зависимых измерениях рассматривались, например, в работах [7, 8].

Большинство работ, посвященных исследованию процедур стохастического программирования [9] и стохастической аппроксимации, содержат предположение о независимости измерений и аддитивности помех. Не умаляя ценности такого подхода, следует подчеркнуть, что им не исчерпывается все многообразие задач, изучение которых возможно свести к процедурам стохастической аппроксимации. В частности, если измерения производятся достаточно часто, а тем более непрерывно, то предположение о зависимости измерений оказывается весьма естественным, особенно если помехи реализуют параметрические возмущения системы.

Другие примеры, не укладывающиеся в схему независимых измерений, доставляют задачи адаптивного управления, наблюдения, оценивания [10].

Имеется сравнительно небольшое число работ (см., например, [7, 8]), где обосновывается сходимость градиентных процедур поиска экстремума при наличии аддитивных марковских помех.

В данной работе формулируются условия сходимости процедур стохастической аппроксимации при условии, что измерения содержат как аддитивные, так и неаддитивные (внутренние) марковские возмущения. При этом рассмотрение ограничивается процедурами типа Роббинса—Монро, главным образом в непрерывном варианте.

1. Постановка задачи. Пусть $f(x)$ — неизвестная n-векторная функция, определенная на евклидовом пространстве $R^{(n)}$. Решается задача об отыскании корня $\bar{x}$ уравнения $f(x) = 0$ с помощью рекуррентной процедуры

$$x(k+1) = x(k) + a(k)\, y(k+1), \quad x(0) = x_0, \quad k = 0, \ldots \tag{1.1}$$

Измерению доступен случайный n-вектор $y(k+1)$, определяемый на каждом шаге равенством

$$y(k+1) = f(k, x(k), \eta(k+1)) + \sigma(k, x(k))\, \xi(k+1) \tag{1.2}$$

Здесь $\eta(k)$ — марковская последовательность с произвольным ограниченным множеством состояний $\eta(k) \in Y$. Помехи $\xi(k)$, $k = 1, \ldots$ образуют последовательность независимых r-мерных векторов, не зависящих также от $\eta(k)$, причем

$$M\xi_k = 0, \ M\xi_k\xi_k' = E_r$$

В принятых обозначениях M — символ математического ожидания, штрих означает транспонирование, E_r — единичная r-матрица. Матрица $\sigma(k, x)$, вообще говоря, неизвестна, зависимость $f(k, x, \eta)$ от η будет конкретизирована в дальнейшем, $a(k)$ — неотрицательная числовая последовательность.

В этих условиях требуется указать ограничения на случайный процесс $\eta(k)$, функции $f(x)$, $f(k, x, \eta)$, $\sigma(k, x)$ и $a(k)$, которые обеспечивают сходимость $x(k) \to 0$ при $k \to \infty$ с вероятностью 1.

Естественным обобщением процедуры (1.1), (1.2) на случай непрерывных измерений может служить следующая модель.

Пусть измерению доступен n-векторный сигнал $y(t)$, $t \geqslant 0$, определяемый равенством

$$y(t) = f(t, x(t), \eta(t)) + \sigma(t, x(t))\xi^{\cdot} \tag{1.3}$$

Для определения корня уравнения $f(x) = 0$ строится непрерывная процедура

$$dx = a(t)[f(t), x(t), \eta(t))\,dt + \sigma(t, \bar{x}(t))\,d\xi], \ x(0) = x_0, \ \eta(0) = \eta_0 \tag{1.4}$$

Требуется, как и в дискретном случае, указать конкретные ограничения на параметры системы (1.4), при которых $x(t) \to \bar{x}$ при $t \to \infty$ с вероятностью 1.

Ограничимся обсуждением лишь непрерывного варианта задачи, поскольку результаты для дискретного случая формулируются аналогично. Причем, кроме того, что функция $f(x)$ имеет единственный корень $\bar{x}$, тогда без ограничения общности можно считать, что $\bar{x} = 0$.

2. Сходимость процедуры Роббинса — Монро при наличии чисто разрывных марковских возмущений. Будем рассматривать процедуру отыскания корня уравнения $f(x) = 0$, полагая в (1.4) $f(t, x, \eta) = f(x) + g(t, x, \eta)$, т. е. рассмотрим систему

$$dx = a(t)[(f(x) + g(t, x, \eta))\,dt + \sigma(t, x)\,d\xi] \tag{2.1}$$

Скалярный марковский процесс $\eta(t)$ предполагаем чисто разрывным имеющим компактное множество состояний $\eta(t) \in Y$ и допускающим разложение [11]:

$$P\{\eta(\tau) = \alpha, \ t \leqslant \tau \leqslant t + \Delta t \mid \eta(t) = \alpha\} = 1 - q(\alpha)\Delta t + o(\Delta t) \tag{2.2}$$

$$P\{\eta(t + \Delta t) \neq \alpha, \eta(t + \Delta t) \in G \mid \eta(t) = \alpha\} = q(\alpha, G)\,\Delta t + o(\Delta t), \ \alpha \notin G$$

где $P\{A \mid B\}$ — условная вероятность. В этих условиях соотношения (2.1), (2.2) и начальные условия

$$x(t_0) = x_0, \quad \eta(t_0) = \eta_0 \tag{2.3}$$

определяют на множестве $\{t \geqslant t_0\} \times R^{(n)} \times Y$ марковский случайный процесс $\{x(t), \eta(t)\}$, сепарабельная модификация которого имеет непрерывные реализации $x(t, \omega)$ и непрерывные справа реализации $\eta(t, \omega)$.

Сформулируем условия, обеспечивающие сходимость процедуры (2.1), (2.2).

1°. Вектор-функция $f(x)$ определена на $R^{(n)}$ и ее компоненты имеют ограниченные частные производные первого и второго порядка

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leqslant L, \quad \left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}\right| \leqslant L, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n \tag{2.4}$$

2°. Система $\dot{x} = f(x)$ экспоненциально устойчива в целом и, следовательно [12], существует положительно-определенная скалярная функция $v(x)$, допускающая оценки

$$c_1 \| x \|^2 \leqslant v(x) \leqslant c_2 \| x \|^2, \quad (\partial v/\partial x)' f(x) \leqslant -c_3 \| x \|^2 \tag{2.5}$$

$$\| \partial v/\partial x \| \leqslant c_4 \| x \|, \quad \| \partial^2 v/\partial x^2 \| \leqslant c_5 \tag{2.6}$$

Здесь $\partial v/\partial x$ — вектор с координатами $\partial v/\partial x_i$, $\partial^2 v/\partial x^2$, $n \times n$ — матрица, составленная из вторых производных $\partial^2 v/\partial x_i \partial x_j$, $c_1, \ldots, c_5$ — положительные постоянные.

3°. Справедлива оценка $\| g(t, x, \eta) \| \leqslant \varphi(\eta) \| x \|$, где функция $\varphi(\eta)$ ограничена на Y числом $M > 0$, причем для некоторого $\gamma > 0$

$$S = \{\eta : c_4 \varphi(\eta) \leqslant c_3 - \gamma\} \neq \varnothing \tag{2.7}$$

4°. Интенсивность белого шума $\sigma(t, x)$ ограничена по норме

$$\| \sigma(t, x) \sigma'(t, x) \| \leqslant K(1 + \| x \|^2), \quad K > 0, \quad \| A \|^2 = \operatorname{Tr}(AA') \tag{2.8}$$

5°. Дифференцируемая функция $a(t)$, $t \geqslant 0$ монотонна, неотрицательна, причем

$$\int_0^\infty a(t)\, dt = \infty, \qquad \int_0^\infty a^2(t)\, dt < \infty \tag{2.9}$$

Справедливо утверждение

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия 1°—5°. Тогда можно указать такие числа $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, что неравенства

$$q(\alpha, V) < q_1, \ \alpha \in S; \quad q(\beta, S) > q_2, \ \beta \in V = Y \setminus S \tag{2.10}$$

обеспечивают сходимость $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ с вероятностью 1, каковы бы ни были начальные условия (2.3).

Доказательство. Рассмотрим функцию [13]

$$V(t, x, \eta) = \begin{cases} v(x), & \eta \in S \\ (1 + \mu a(t)) v(x), & \eta \in V \end{cases} \tag{2.11}$$

где μ — некоторая положительная постоянная, которой распорядимся позднее. Эта функция положительно-определенная, допускает бесконечно большой низший и бесконечно малый высший пределы по x в области $\{t \geqslant 0\} \times R^{(n)} \times Y$, имеет непрерывную частную производную по t и ограниченные первую и вторую производные по x. Ее усредненная производная [4] в силу системы (2.1) в точке (x, η, t) вычисляется по формуле

$$\frac{dM[V]}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)'(f(x) + g(t, x, \eta))\,a(t) + \tag{2.12}$$

$$+ \frac{a^2(t)}{2}\operatorname{Tr}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma\sigma'\right) + \int [V(t, x, \vartheta) - V(t, x, \eta)]\,q(\eta, d\vartheta)$$

Оценим $dM[V]/dt$. С учетом (2.5) — (2.8) получим:
в точке $t \geqslant t_0,\ x \in R^{(n)},\ \eta \in S$

$$\frac{dM[V]}{dt} \leqslant -a(t)[\gamma(t) - \mu c_2 q(\eta, V)]\,\|x\|^2 + \frac{1}{2}Kc_5 a^2(t)(1 + \|x\|^2)$$

в точке $t \geqslant t_0,\ x \in R^{(n)},\ \eta \in V$

$$\frac{dM[V]}{dt} \leqslant a - (t)[\mu c_1 q(\eta, S) - (1 + \mu a(t))(c_4 M - c_3)]\,\|x\|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}Kc_5(1 + \mu a(t))\,a^2(t)(1 + \|x\|^2)$$

Если теперь при некотором $\mu > 0$ выполняются неравенства

$$q(\eta, V) < \gamma\mu c_2^{-1},\quad q(\eta, S) > (1 + \mu a(0))(c_4 M - c_3)(\mu c_1)^{-1}$$

то для любых $x \in R^{(n)}$, $\eta \in Y$, $t \geqslant t_0$ будет выполняться условие

$$\frac{dM[V]}{dt} \leqslant -a(t)\,\delta\,\|x\|^2 + h(t)(1 + V(t, x, \eta)) \tag{2.13}$$

где $\delta > 0$ — некоторая постоянная, $h(t)$ — интегрируемая на $[0, \infty)$ функция. Дальнейшее доказательство строится по известному плану ([2], стр. 100), если в качестве фигурирующего в [2] множества B принять $B = \{(x, \eta) : x = 0,\ \eta \in Y\}$, которое в данном случае является инвариантным [5] для процесса $\{x(t), \eta(t)\}$.

Примечание 2.1. Вероятностный смысл доказанной теоремы состоит в том, что при сформулированных условиях процедура стохастической аппроксимации будет сходиться к корню функции $f(x)$ почти наверное, если вероятности переходов за время Δt от малых значений возмущений $g(t, x, \eta)$ к большим достаточно малы, а вероятности обратных переходов достаточно велики. Следует, кроме того, подчеркнуть, что в этих условиях изменения процесса $\eta(t)$, происходящие внутри множеств S, V, не оказывают влияния на сходимость процедуры (2.1).

Примечание 2.2. Условие 2° теоремы 2.1 можно ослабить, потребовав лишь асимптотическую устойчивость в целом системы $x^{\cdot} = f(x)$, но тогда ограничение на интенсивность белого шума (2.8) необходимо выразить через параметры функции Ляпунова.

Рассмотрим теперь одномерную систему

$$dx = a(t)((f(x) + g(t, x, \eta))\,dt + \sigma(t, x)\,d\xi) \tag{2.14}$$

Предположим, что неизвестные функции $f(x)$, $g(t, x, \eta)$, $\sigma(t, x)$ удовлетворяют условиям

$$xf(x) \leqslant -c_3 x^2,\quad |g(t, x, \eta)| \leqslant \varphi(\eta)\,|x| \tag{2.15}$$

$$\sigma^2(t, x) \leqslant K(1 + x^2)$$

а случайный марковский процесс $\eta(t)$ может находиться лишь в двух состояниях η_1 и η_2. Примем, что $\varphi(\eta_1) - c_3 < 0$ $\varphi(\eta_2) - c_3 > 0$, иначе задача становится тривиальной. Коэффициенты разложения (2.2) обозначим q_{12} и q_{21} соответственно.

Выбирая $v(x) = {}^1/_2 x^2$, построим функцию $V(t, x, \eta)$ в виде (2.11).

Для того чтобы $dM[V]/dt$ удовлетворяла оценке (2.13), достаточно потребовать выполнения условий

$$(2.16)\qquad \begin{aligned} &\varphi(\eta_1) - c_3 + \mu q_{12} \leqslant -\varepsilon \\ &(1 + \mu a(t))(\varphi(\eta_2) - c_3 - \mu q_{21}) \leqslant -\varepsilon \end{aligned}$$

при некоторых положительных значениях μ, ε.

Пусть выполнено неравенство

$$(2.17)\qquad \beta = (\varphi(\eta_1) - c_3)\, q_{21} + (\varphi(\eta_2) - c_3)\, q_{12} < 0$$

тогда найдутся настолько малые значения $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$ и такой момент времени $T \geqslant t_0$, что при $t > T$ условия (2.16) будут справедливы и, следовательно, $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ с вероятностью 1.

Таким образом, для сходимости процедуры (2.14) достаточно выполнения (2.17).

Следует подчеркнуть, что это условие не может быть ослаблено, поскольку для линейного уравнения $x^{\cdot} = -c_3 x + \varphi(\eta)\, x$ оно является необходимым и достаточным условием сходимости $x(t)$ к нулю [14] с вероятностью 1.

3. Сходимость процедуры стохастической аппроксимации при наличии непрерывных марковских помех. Пусть рассматривается процедура отыскания корня неизвестной функции $f(x)$ при условии, что ее измерения содержат наряду с белым гауссовским шумом также непрерывные марковские возмущения, которые моделируются в виде выходных сигналов асимптотически устойчивой системы.

Иными словами, пусть процедура отыскания корня функции $f(x)$ описывается системой стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &dx = a(t)\,[(f(x) + A\eta)\, dt + \sigma_1(t, x)\, d\xi_1] \\ &d\eta = B\eta dt + \sigma_2(t, x)\, d\xi_2, \quad x(t_0) = x_0, \quad \eta(t_0) = \eta_0 \end{aligned}$$

Здесь векторы x, η имеют размерности n и m соответственно, $f(x)$, A, B, $\sigma_1(t, x)$, $\sigma_2(t, x)$ — неизвестные, вообще говоря, матрицы соответствующих размеров, $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ — независимые стандартные винеровские процессы размерностей r и s.

Ниже формулируются условия, при которых процедура (3.1) обеспечивает сходимость $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ с вероятностью 1.

Теорема 3.1. Пусть функции $f(x)$, $\sigma_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$, $a(t)$ удовлетворяют условиям (2.4) — (2.6), (2.8), (2.9) и, кроме того, собственные числа матрицы B имеют отрицательные действительные части, а функция $a(t)$ удовлетворяет при некотором значении постоянной $\delta > 0$ неравенству $|\, a^{\cdot}(t)\, a^{-2}(t)\, | \leqslant \delta$. Тогда при любых начальных условиях $x(t_0) = x_0$, $\eta(t_0) = \eta_0$ для решения $x(t)$ справедливо равенство

$$P\,\{\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \mid x(t_0) = x_0, \quad \eta(t_0) = \eta_0\} = 1$$

Доказательство. Возьмем функцию $v(x)$, удовлетворяющую условиям (2.5), (2.6), и построим квадратичную форму $w(\eta)$, для которой справедливы оценки

$$e_1 \| \eta \|^2 \leqslant w(\eta) \leqslant e_2 \| \eta \|^2, \quad (\partial w/\partial \eta)' B\eta \leqslant -e_3 \| \eta \|^2$$
$$\| \partial w/\partial \eta \| \leqslant e_4 \| \eta \|, \quad \| \partial^2 w/\partial \eta^2 \| \leqslant e_5$$

где $e_1, \ldots, e_5$ — положительные постоянные. (Последнее возможно в силу предположения о свойствах матрицы B.)

Переходя в системе (3.1) к новым переменным [8]

$$z = a(t)\eta, \quad y = x - AB^{-1}z$$

получим систему

$$dy = a(t)[(f(y + AB^{-1}z) + AB^{-1}a^{\cdot}(t)a^{-1}(t)z)dt + \sigma_1 d\xi_1 + + AB^{-1}\sigma_2 d\xi_2] \tag{3.2}$$
$$dz = (Bz - a^{\cdot}(t)z)dt + a(t)\sigma_2(t, x)d\xi_2$$

Возьмем функцию $V(y, z) = v(y) + \mu w(z)$, где $\mu > 0$ — некоторая постоянная. Вычисляя $dM[V]/dt$, в силу системы (3.2) с учетом условий теоремы получим

$$dM[V]/dt \leqslant -a(t)c_3 \| y \|^2 + a(t)c_4 (L + + \delta) \| AB^{-1} \| \| y \| \| z \| - \mu (e_3 - e_4 a(t)\delta) \| z \|^2 + + a^2(t)(Kc_5 + {}^1\!/_2 \mu e_5)(1 + \| y + AB^{-1}z \|^2)$$

Отсюда с помощью простых, но громоздких преобразований получим, что при соответствующем выборе числа μ, начиная с некоторого момента времени $T \geqslant t_0$, будет справедлива оценка

$$dM[V]/dt \leqslant -\alpha(t)\varphi(y, z) + h(t)(1 + V(y, z)) \tag{3.3}$$

где функции $\alpha(t) > 0$, $h(t) > 0$ удовлетворяют условиям

$$\int_T^\infty \alpha(t)\,dt = \infty, \quad \int_T^\infty h(t)\,dt < \infty$$

а $\varphi(y, z)$ — положительно-определенная форма в $R^{(n)} \times R^{(m)}$.

Далее следует воспользоваться теоремой 8.1 из [2]. Таким образом, $y(t) \to 0$, $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$ с вероятностью 1, что и завершает доказательство теоремы.

Примечание 3.1. Описанная процедура может быть использована и при отыскании минимума положительно-определенной скалярной функции $F(x)$, $x \in R^{(n)}$, если возможно измерять $\partial F/\partial x$ с помехами, представленными как марковской составляющей, так и независимым от нее белым шумом. В этом случае в предыдущих рассмотрениях следует положить $f(x) = -\partial F/\partial x$, $v(x) = F(x)$. В результате получаются условия сходимости градиентной процедуры, близкие к тем, которые в дискретном случае рассматривались в [8].

В заключение обсудим весьма кратко случай непрерывных по времени измерений при наличии случайных скачков.

Пусть процедура отыскания корня функции $f(x)$ описывается стохастическими дифференциальными уравнениями со скачками [4, 6].

$$dx = a(t)[(f(x) + A\eta)dt + \sigma_1(t, x)d\xi_1 + g_1(t, x)d\zeta_1]$$
$$d\eta = B\eta dt + \sigma_2(t, x)d\xi_2 + g_2(t, x)d\zeta_2$$

Они отличаются от уравнений (3.1) лишь тем, что наряду с независимыми стандартными винеровскими процессами $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ в них входят $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$ — независимые между собой и независящие от $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ пуассоновские процессы с вероятностью $\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$ того, что на интервале $[t, t + \Delta t]$ у процесса $\zeta_i(t)$ произойдет скачок. При условии, что скачок произошел, обозначим через $P_i(du)$ соответствующую вероятностную меру амплитуды скачка. Примем, что $P_i(du)$ имеет компактный носитель U, причем

$$\int_U u P_i(du) = 0, \quad \int_U u^2 P_i(du) = \nu_i^2 < \infty$$

Эти уравнения и начальные условия $x(t_0) = x_0$, $\eta(t_0) = \eta_0$ определяют процесс $\{x(t), \eta(t)\}$, реализации которого с вероятностью 1 непрерывны справа (условия существования и единственности решения для таких уравнений сформулированы в [6]).

Если сохранить все предположения теоремы 2.1 и потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\| g_i(t, x) g_i'(t, x) \| \leqslant K(1 + \|x\|^2), \quad i = 1, 2 \tag{3.4}$$

то можно повторить все рассуждения из доказательства этой теоремы.

В самом деле, отличие будет состоять лишь в появлении дополнительных слагаемых вида

$$\int_U [v(x + a(t) g_i(t, x) u) - v(x)] \lambda_i P_i(du)$$

при вычислении $dM[V]/dt$. Однако при наличии ограниченной второй производной $\partial^2 v/\partial x^2$ эти слагаемые мажорируются функцией $c_5 \nu_i^2 \lambda_i a^2(t)(1 + v(x))$ и окончательная оценка $dM[V]/dt$ по-прежнему будет иметь вид (3.3)

Можно убедиться, в том, что процесс $\{x(t), \eta(t)\}$ — феллеровский, а значит, поскольку его траектории непрерывны справа, он обладает строго марковским свойством. Это позволяет сделать вывод о его регулярности и возвратности по отношению к области $\|x\| < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Дальнейшие рассуждения строятся по схеме доказательства соответствующей теоремы для непрерывного случая.

Отметим, что аналогичную скачкообразную составляющую можно добавить и в уравнения (2.1). Если при этом будет выполнено условие типа (3.4), то заключение теоремы 2.1 остается справедливым и в таком случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вазан М. Т.* Стохастическая аппроксимация. М.: Мир, 1972. 295 с.
2. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972. 304 с.
3. *Красовский Н. Н.* Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 1, с. 64—79.
4. *Кац И. Я., Красовский Н. Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 5, с. 809—823.
5. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968. 354 с.
7. *Брусин В. А.* Обобщение задачи о стохастической аппроксимации.— Автоматика и телемеханика, 1969, № 3, стр. 78—85.
8. *Шильман С. В., Ястребов А. И.* Стохастические алгоритмы оптимизации при марковских шумах в измерениях градиента.— Автоматика и телемеханика, 1980, № 6, с. 96—100.

9. *Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976. 239 с.
10. *Цыпкин Я. З.* Основы теории обучающихся систем. М.: Наука, 1970. 251 с.
11. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 605 с.
12. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
13. *Кац И. Я.* О стабилизации линейных систем со случайными свойствами.— Дифференц. уравнения, 1970, т. 6, № 3, с. 420—424.
14. *Мильштейн Г. Н.* Об устойчивости линейной системы, находящейся под воздействием марковской цепи.— Дифференц. уравнения, 1970, т. 6, № 11, с. 1982—1993.

Свердловск

Поступила в редакцию
12.I.1981