Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 531.38

О ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЯХ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА НА АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Карапетян А. В.

Получены условия существования и устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Отмечена определенная аналогия исследуемой задачи и задач о перманентных вращениях тела на абсолютно гладкой плоскости и тела с неподвижной точкой, а также их существенные различия. В частности, в случае абсолютно шероховатой плоскости возможна асимптотическая по части переменных устойчивость перманентных вращений, хотя система консервативна; устойчивость при этом зависит от направления вращения.

1. Рассмотрим тяжелое твердое тело, ограниченное выпуклой поверхностью и находящееся на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Положение тела будем задавать координатами x и y его центра масс в неподвижной системе координат $Oxyz$ (плоскость Oxy совпадает с опорной горизонтальной плоскостью, ось Oz направлена вертикально вверх) и углами Эйлера θ, φ и ψ, которые составляют главные центральные оси $G\xi$, $G\eta$ и $G\zeta$ инерции тела с осями неподвижной системы координат. Тогда функция Лагранжа и уравнения связей системы, выражающие отсутствие проскальзывания в точке контакта тела с плоскостью, примут вид

$$
\begin{aligned}
L = {} & {}^1/_2\,[A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + m(\chi_1\cos\theta - \zeta\sin\theta)^2]\,\theta^{\cdot 2} + \\
& + {}^1/_2\,(C + m\chi_2^2\sin^2\theta)\,\varphi^{\cdot 2} + {}^1/_2\,[(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta + \\
& + C\cos^2\theta]\,\psi^{\cdot 2} + m(\chi_1\cos\theta - \zeta\sin\theta)\,\chi_2\sin\theta\,\theta^\cdot\varphi^\cdot + \\
& + (A - B)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\theta^\cdot\psi^\cdot + C\cos\theta\,\varphi^\cdot\psi^\cdot + {}^1/_2\,m\,\times \\
& \times (x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + mg(\chi_1\sin\theta + \zeta\cos\theta) \\
& x^\cdot = \alpha_1\theta^\cdot + \alpha_2\varphi^\cdot + \alpha_3\psi^\cdot, \quad y^\cdot = \beta_1\theta^\cdot + \beta_2\varphi^\cdot + \beta_3\psi^\cdot \\
& \alpha_1 = -(\chi_1\sin\theta + \zeta\cos\theta)\sin\psi, \quad \alpha_2 = \chi_2\cos\theta\sin\psi + \chi_1\cos\psi \\
& \alpha_3 = \chi_2\sin\psi + (\chi_1\cos\theta - \zeta\sin\theta)\cos\psi, \quad \beta_i = -\partial\alpha_i/\partial\psi \\
& (i = 1, 2, 3) \\
& \chi_1 = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi, \quad \chi_2 = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi
\end{aligned}
$$

Здесь m — масса тела, A, B, C — его главные центральные моменты инерции, ξ, η, ζ — координаты точки K касания тела с опорной плоскостью в системе $G\xi\eta\zeta$. Можно показать, что ξ, η, ζ представляют собой функции переменных θ и φ, определяемые по виду уравнения, задающего ограничивающую тело поверхность, и удовлетворяющие двум соотношениям вида

$$(\xi'\sin\varphi + \eta'\cos\varphi)\sin\theta + \zeta'\cos\theta \equiv 0 \tag{1.1}$$

где штрих означает дифференцирование по θ или φ.

Очевидно, тяжелое твердое тело на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости представляет собой неголономную (связи неинтегрируемы) систему Чаплыгина (функция Лагранжа и коэффициенты связей не зависят от x и y) и его движение описывается уравнениями Чаплыгина, которые в данном случае принимают вид

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial q_i^{\cdot}}=\frac{\partial L^*}{\partial q_i}+\sum_{j,k=1}^{3}\Gamma_{ijk}q_j^{\cdot}q_k^{\cdot}\quad (i=1,2,3;\ q_1=\theta,\ q_2=\varphi,\ q_3=\psi) \tag{1.2}
$$

$$
\Gamma_{ijk}=m\left[\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial q_j}-\frac{\partial\alpha_j}{\partial q_i}\right)\alpha_k+\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial q_j}-\frac{\partial\beta_j}{\partial q_i}\right)\beta_k\right]=-\Gamma_{jik}
$$

$$
L^*=\frac{1}{2}J_{22}\theta^{\cdot 2}+\frac{1}{2}(J_{11}\sin^2\theta+J_{33}\cos^2\theta-2J_{13}\sin\theta\cos\theta)\varphi^{\cdot 2}+
$$
$$
+\frac{1}{2}J_{33}\psi^{\cdot 2}-(J_{12}\sin\theta+J_{23}\cos\theta)\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}-J_{23}\theta^{\cdot}\psi^{\cdot}+
$$
$$
+(J_{33}\cos\theta-J_{13}\sin\theta)\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}+mg(\chi_1\sin\theta+\zeta\cos\theta)
$$
$$
J_{11}=(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi)\cos^2\theta+C\sin^2\theta+m[\chi_2^2+
$$
$$
+(\chi_1\sin\theta+\zeta\cos\theta)^2]
$$
$$
J_{22}=(A\cos^2\varphi+B\sin^2\varphi)+m(\chi_1^2+\zeta^2)
$$
$$
J_{33}=(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi)\sin^2\theta+C\cos^2\theta+m[\chi_2^2+(\chi_1\cos\theta-
$$
$$
-\zeta\sin\theta)^2]
$$
$$
J_{12}=(A-B)\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta-m\chi_2(\chi_1\cos\theta-\zeta\sin\theta)
$$
$$
J_{13}=(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi-C)\sin\theta\cos\theta-
$$
$$
-m(\chi_1\cos\theta-\zeta\sin\theta)(\chi_1\sin\theta+\zeta\cos\theta)
$$
$$
J_{23}=-(A-B)\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta+m\chi_2(\chi_1\sin\theta+\zeta\cos\theta)
$$

Здесь J_{ij} — осевые ($i=j$) и центробежные ($i\neq j$) моменты инерции тела по отношению к осям системы координат $Kx_1y_1z_1$, начало которой находится в точке касания тела с опорной плоскостью, ось Kz_1 направлена вертикально вверх, ось Ky_1 — параллельно линии узлов в сторону, откуда поворот вертикали, проходящей через центр масс тела, на угол θ до совмещения с осью $G\zeta$ происходит против часовой стрелки, и ось Kx_1 — перпендикулярно к плоскости Ky_1z_1 так, чтобы образовывать правую систему координат.

2. Очевидно, функция L^* не зависит от ψ; учитывая, что $\beta=-\partial\alpha/\partial\psi$, $\alpha=\partial\beta/\partial\psi$, убеждаемся, что этим свойством обладают и коэффициенты Γ_{ijk} в уравнениях (1.2). Следовательно, координата ψ — циклическая в смысле принятого в [1, 2] определения и исходная система может совершать стационарные движения вида

$$
\theta=\theta_0,\ \theta^{\cdot}=0,\ \varphi=\varphi_0,\ \varphi^{\cdot}=0,\ \psi^{\cdot}=\psi_0^{\cdot}\equiv\omega \tag{2.1}
$$

При этом тело опирается о горизонтальную плоскость одной и той же своей точкой и вращается вокруг вертикали, проходящей через эту точку, а центр масс тела описывает окружность, параллельную опорной плоскости, с центром на оси вращения тела.

Три постоянные θ_0, φ_0 и ω в (2.1) удовлетворяют системе двух уравнений

$$(\xi \sin\varphi + \eta\cos\varphi)\cos\theta - \zeta\sin\theta = -\frac{J_{13}\omega^2}{mg} \tag{2.2}$$

$$\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi = \frac{J_{23}\omega^2}{mg}$$

из которой следует определять θ_0 и φ_0, считая постоянную ω произвольной. Исключая ω^2, получим соотношение

$$(B - C)\ \xi \sin\theta\cos\varphi\cos\theta + (C - A)\ \eta\sin\theta\sin\varphi\cos\theta + \\ + (A - B)\ \zeta\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi = 0 \tag{2.3}$$

которому на стационарном движении (2.1) должны удовлетворять θ и φ или, что одно и то же, направляющие косинусы $\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi$, $\gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi$, $\gamma_3 = \cos\theta$ возможных осей перманентных вращений тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

Среди кинематически возможных осей перманентных вращений, направляющие косинусы которых удовлетворяют уравнению (2.3), динамически возможными будут не все, а лишь те из них, для которых из уравнений (2.2) следует неравенство $\omega^2 \geqslant 0$. Последнее приводит к условию

$$(A - B)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\,(\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi) \leqslant \\ \leqslant m\,(\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi)^2\,[(\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi)\sin\theta + \zeta\cos\theta] \tag{2.4}$$

правая часть которого неположительна, поскольку выражение в квадратных скобках в (2.4) представляет собой взятую со знаком минус высоту центра масс тела над опорной плоскостью.

Отсюда следует, что хотя уравнения, которым должны удовлетворять направляющие косинусы возможных осей перманентных вращений в задачах о движении тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой плоскостях, совпадают, область динамически допустимых осей в первом случае шире (в случае абсолютно гладкой плоскости уравнение, соответствующее (2.3), имеет точно такой же вид, а условие, соответствующее (2.4), получается из последнего заменой правой части на нуль [3]).

Отметим также некоторое различие задач о перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой плоскостях. В первом случае вращение тела происходит вокруг вертикали, проходящей через центр масс тела, центр масс неподвижен, а точка касания тела с опорной плоскостью описывает на последней окружность (при этом тело скользит по опорной плоскости). Во втором случае вращение тела происходит вокруг вертикали, проходящей через точку касания тела с опорной плоскостью, эта точка неподвижна, а центр масс тела описывает окружность, параллельную опорной плоскости.

3. Рассмотрим вопрос об устойчивости перманентных вращений исходной системы. Характеристическое уравнение, отвечающее системе уравнений возмущенного движения, имеет вид

$$\lambda\,(a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4) = 0 \tag{3.1}$$

$$a_0 = \{K_{11}K_{22} - K_{12}^2 - K_{33}^{-1}(K_{11}K_{23}^2 + K_{22}K_{13}^2 + \\ + 2K_{12}K_{13}K_{23})\}^0 > 0$$

$$a_1 = \omega\,\{-mh\,(r_2 - r_1)\,(K_{12} + K_{33}^{-1}\,K_{13}K_{23}) +$$
$$+ K_{33}^{-1}\omega^2 g^{-1}\,[K_{13}K_{23}(K_{11}r_1 - K_{22}r_2) + K_{12}\,(K_{13}^2 r_1 - K_{23}^2 r_2)]\}^{\circ}$$
$$a_2 = mg\,[(K_{22} - K_{33}^{-1}K_{23}^2)\,(r_2 - h) + (K_{11} - K_{33}^{-1}K_{13}^2)\,r_1 -)]^{\circ} +$$
$$+ \omega^2\,\{m^2h^2r_1r_2 + mh\,[(K_{33} - K_{11})\,r_2 + (K_{33} - K_{22})\,r_1 +$$
$$+ K_{33}^{-1}(K_{13}^2\,(r_1 + 2r_2) + K_{23}^2\,(2r_1 + r_2))] + (K_{33} - K_{11}) \times$$
$$\times (K_{33} - K_{22}) + K_{11}K_{22} - 2K_{12}^2 + 3\,(K_{13}^2 + K_{23}^2) + K_{33}^{-1} \times$$
$$\times [K_{11}(K_{13}^2 - 4K_{23}^2) + K_{22}\,(K_{23}^2 - 4K_{13}^2) -$$
$$- 10K_{33}^{-1}K_{12}K_{13}K_{23}]\}^{\circ} + K_{33}^{-1}\omega^4 g^{-1}\,\{mhr_1r_2\,(K_{13}^2 + K_{23}^2) +$$
$$+ (K_{33} + K_{22} - K_{11})\,K_{23}^2 r_2 + (K_{33} - K_{22} + K_{11})\,K_{13}^2 r_1 -$$
$$- 2K_{12}K_{13}K_{23}\,(r_1 + r_2)\}^{\circ}$$
$$a_3 = \omega^3\,\{mh\,(r_2 - r_1)\,(K_{12} + 3K_{33}^{-1}K_{13}K_{23}) + K^{-1}{}_{33}\,\omega^2 g^{-1} \times$$
$$\times [K_{13}K_{23}\,(K_{11}r_1 - K_{22}r_2) + K_{12}\,(K_{13}^2 r_1 - K_{23}^2 r_2) +$$
$$+ K_{13}K_{23}\,(K_{33} - K_{11} - K_{22})\,(r_2 - r_1)]\}^{\circ}$$
$$a_4 = [m^2g^2\,(r_1 - h)\,(r_2 - h)]^{\circ} + mg\omega^2\,\{K_{33}\,(r_1 + r_2 - 2h) -$$
$$- K_{11}\,(r_2 - h) - K_{22}\,(r_1 - h) + mh\,[2r_1r_2 - h\,(r_1 + r_2)] +$$
$$+ 4K_{33}^{-1}[K_{13}^2\,(r_2 - h) + K_{23}^2\,(r_1 - h)]\}^{\circ} +$$
$$+ \omega^4\,\{m^2h^2r_1r_2 + mh\,[(K_{33} - K_{11})\,r_2 + (K_{33} - K_{22})\,r_1] +$$
$$+ 2mhK_{33}^{-1}\,[2\,(K_{13}^2 r_2 + K_{23}^2 r_1) - (K_{13}^2 r_1 + K_{23}^2 r_2)] +$$
$$+ 2mr_1r_2K_{33}^{-1}(K_{13}^2 + K^2{}_{23}) + (K_{33} - K_{11})\,(K_{33} - K_{22}) -$$
$$- K_{12}^2 - 8K_{33}^{-1}\,K_{12}K_{13}K_{23} + 4K_{33}^{-1}[K_{23}^2\,(K_{33} - K_{11}) +$$
$$+ K_{13}^2\,(K_{33} - K_{22})]\}^{\circ} + 2K_{33}^{-1}\omega^6 g^{-1}\,\{(K_{13}^2 + K_{23}^2)\,mhr_1r_2 +$$
$$+ (K_{33} - K_{11})\,K_{23}^2 r_2 + (K_{33} - K_{22})\,K_{13}^2 r_1 -$$
$$- K_{12}K_{13}K_{23}\,(r_1 + r_2)\}^{\circ}$$
$$K_{11} = J_{11}\cos^2\alpha + J_{22}\sin^2\alpha - 2J_{12}\sin\alpha\cos\alpha, \quad K_{13} =$$
$$= J_{13}\cos\alpha + J_{23}\sin\alpha$$
$$K_{22} = J_{11}\sin^2\alpha + J_{22}\cos^2\alpha + 2J_{12}\sin\alpha\cos\alpha, \quad K_{23} =$$
$$= - J_{13}\sin\alpha + J_{23}\cos\alpha$$
$$K_{12} = (J_{11} - J_{22})\sin\alpha\cos\alpha + J_{12}\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \; K_{33} = J_{33}$$

Здесь K_{ij} — осевые ($i = j$) и центробежные ($i \neq j$) моменты инерции тела по отношению к осям системы координат $Kx_2y_2z_1$ с началом в точке касания тела с опорной плоскостью, оси координат Kx_2 и Ky_2 которой совпадают соответственно с направлениями главных радиусов кривизны $r_1 = r_1\,(\theta, \varphi)$ и $r_2 = r_2\,(\theta, \varphi)$ поверхности тела в точке K; $h = h\,(\theta, \varphi)$ — высота центра масс тела над опорной плоскостью; $\alpha = \alpha\,(\theta, \varphi)$ — угол между осями Kx_1 и Kx_2, отсчитываемый от оси Kx_1 к оси Ky_1; верхний нулевой индекс указывает, что соответствующая функция переменных θ и φ вычисляется для $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$.

Уравнение (3.1) всегда имеет один нулевой корень. Если при этом по крайней мере один корень уравнения (3.1) лежит в правой полуплоскости, то решение (2.1) неустойчиво. Если же все корни уравнения.

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \tag{3.2}$$

лежат в левой полуплоскости, то согласно [1, 2] имеет место особенный случай критического случая одного нулевого корня и решение (2.1) устойчиво, причем, хотя исходная система консервативна, асимптотически относительно части переменных, характеризующих отклонения θ, $\theta^{\cdot}$, φ, $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$ от их значений на многообразии стационарных движений.

Все корни уравнения (3.2) лежат в левой полуплоскости тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_4 > 0,\ a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 > 0. \tag{3.3}$$

При изменении знака по крайней мере в одном из неравенств (3.3) уравнение (3.1) имеет корень в правой полуплоскости.

4. Таким образом, условия (3.3) представляют собой необходимые (с точностью до знака равенства) и достаточные условия устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

Заметим, что поскольку θ_0 и φ_0 зависят от ω^2 (см. (2.2)), то коэффициенты a_0, a_2 и a_4 уравнения (3.2) представляют собой четные, а коэффициенты a_1 и a_3 — нечетные функции ω. Поэтому последние три условия в (3.3) накладывают ограничения только на распределение масс, геометрию поверхности и величину угловой скорости тела, а первое — на знак угловой скорости. Это означает, что при прочих равных условиях устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости зависит от направления вращения: движение, устойчивое в одном направлении, неустойчиво в противоположном.

Эта зависимость, а также возможность асимптотической по части переменных устойчивости при отсутствии внешних диссипативных сил существенно отличают исследуемую задачу от задачи устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости [3]. В последнем случае условия устойчивости не зависят от направления вращения тела, а при отсутствии внешних диссипативных сил невозможна асимптотическая устойчивость ни по одной из переменных.

Если вращение тела происходит вокруг одной из главных осей его эллипсоида инерции, построенного для точки касания тела с опорной плоскостью (при этом $K_{13} = K_{23} = 0$), то условия (3.3) значительно упрощаются и принимают вид

$$a_1^* > 0,\ a_4^* > 0,\ (a_2^* - a_0^*\omega^2)\,\omega^2 - a_4^* > 0 \tag{4.1}$$

где звездочка означает, что в соответствующих коэффициентах уравнения (3.1) K_{13} и K_{23} положены равными нулю, указанный в [2, 4, 5].

Заметим, что при вращении тела вокруг одной из главных осей его эллипсоида инерции для точки K для наличия асимптотической по части переменных устойчивости и зависимости условий устойчивости от направления вращения необходимо, чтобы главные радиусы кривизны поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью были не равны друг другу ($r_1 \neq r_2$), а их направления не совпадали с двумя другими главными осями эллипсоида инерции тела, построенного для этой точки ($K_{12} \neq 0$). При вращении вокруг произвольной оси это необязательно ($K_{12}(r_2 - r_1)$ может равняться нулю).

При $\omega = 0$ уравнения (2.2) определяют положения равновесия тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости и означают, что в положении равновесия тела его центр масс находится на вертикали, проходящей через точку касания тела с опорной плоскостью. Исследуя характер экстремума потенциальной энергии тела в его равновесии, согласно [6] заключаем, что равновесие устойчиво (относительно $\theta, \theta^{\cdot}$, φ, $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$), если центр масс тела находится ниже обоих центров кривизны поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью; в противном случае — неустойчиво [5]. Аналогичные утверждения справедливы и в случае абсолютно гладкой горизонтальной плоскости [3, 5]. Следовательно, результаты исследования устойчивости положений равновесия тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой горизонтальных плоскостях в известной мере эквивалентны, чего нельзя утверждать о результатах исследования устойчивости перманентных вращений.

5. Закрепим теперь неподвижную на перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости точку его касания с этой плоскостью. Тогда исследуемая неголономная система перейдет в голономную систему: тяжелое твердое тело с неподвижной точкой. Используя введенные переменные и обозначения (нетрадиционные для задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, в которой обычно в качестве жестко связанной с телом системы координат берут систему с началом в неподвижной точке (а не в центре масс) и с осями, направленными по главным осям эллипсоида инерции тела, построенного для неподвижной точки (а не для центра масс) можно показать, что уравнения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой получаются из уравнений (1.2) при $\Gamma_{ijk} = 0$ и условии, что ξ, η и ζ (координаты неподвижной точки в системе $G\xi\eta\zeta$) в выражениях для L^* и J_{ij} постоянны.

При этом оказывается, что уравнение многообразия перманентных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой также имеет вид (2.2), откуда следует совпадение в сравниваемых задачах областей и кинематически возможных (2.3) и динамически допустимых (2.4) осей перманентных вращений (с точностью до указанного смысла ξ, η, ζ).

Однако, несмотря на полную геометрическую аналогию, задачи о перманентных вращениях тяжелого твердого тела с неподвижной точкой и на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости существенно различаются. В первом случае [7], так же как и для тела на абсолютно гладкой плоскости, условия устойчивости не зависят от направления вращения тела, а при отсутствии внешних диссипативных сил невозможна асимптотическая устойчивость ни по одной из переменных.

Заметим, что соответствующее характеристическое уравнение, отвечающее случаю тела с неподвижной точкой, получается из уравнения (3.1) при $r_1 = r_2 = 0$, т. е. при $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = a_{20}$, $a_4 = a_{40}$, где нижний нулевой индекс указывает, что в соответствующем выражении следует положить $r_1 = r_2 = 0$; h означает высоту центра масс тела над горизонтальной плоскостью, проходящей через неподвижную точку.

Таким образом, существенную роль в необычном поведении тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости играет возможность его качения на возмущенных движениях (т. е. изменения ξ, η и ζ, первые производные от которых по θ и φ линейно зависят от главных радиусов кривизны поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью).

Автор благодарит Румянцева В. В. за полезные советы и обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетян А. В.* Об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина.— ПММ, 1978, т. 42, № 5, с. 801.
2. *Карапетян А. В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем.— ПММ, 1980, т. 44, № 3, с. 418.
3. *Карапетян А. В.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости.— ПММ, 1981, т. 45, № 3, с. 504.
4. *Астапов И. С.* Об устойчивости вращения кельтского камня.— Вестн. МГУ. Сер. матем. и механ., 1980, № 2, с. 97.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 11.
6. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения неголономных систем.— ПММ, 1967, т. 31, № 2, с. 260.
7. *Румянцев В. В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела.— ПММ, 1956, т. 20, № 1, с. 51.

Москва

Поступила в редакцию 20.X.1980