

УДК 531.38

**О ЛЯПУНОВСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОГО  
ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ  
В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ**

**Маринбах М. А.**

Дана геометрическая интерпретация класса периодических движений динамически несимметричного тяжелого твердого тела, существующих по теореме Ляпунова о голоморфном интеграле вблизи перманентных вращений. Исследованы ориентация и отношение полуосей эллипсов малых колебаний (траекторий первого приближения) по отношению к кривой Штауде перманентных вращений.

Случай, когда центр тяжести тела расположен на главной оси эллипсоида инерции, рассмотрен аналитически, как и ряд особенностей общего случая. Изучение общего случая дополнено результатами, полученными с помощью ЭВМ для характерного примера, наиболее интересного с точки зрения сложности строения кривой Штауде. Проведенный анализ позволяет выявить свойства ляпуновских периодических движений и их первого приближения, отличные от известных ранее [1, 2].

1. Движение твердого тела с неподвижной точкой (взвешенной твердой частицы) под действием силы тяжести описывается уравнениями Эйлера—Пуассона. Линеаризованные вблизи перманентного вращения (относительно положения равновесия) эти уравнения имеют вид [3]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} I_1 \dot{\xi}_1 &= (I_2 - I_3) (\omega_2 \xi_3 + \omega_3 \xi_2) + v_2 g_3 - v_3 g_2 \\ v_1 &= \omega_3 v_2 - \omega_2 v_3 + \xi_3 \gamma_2 - \xi_2 \gamma_3 \end{aligned} \quad (1\ 2\ 3)$$

Здесь  $g_i$  — координаты центра тяжести тела, умноженные на его вес,  $I_i$  — моменты инерции,  $\omega_i$  и  $\gamma_i$  — компоненты вектора угловой скорости  $\omega$  и вектора вертикали  $\gamma$  (задающего перманентное вращение) в системе координат, связанной с главными осями эллипсоида инерции,  $\xi_i$  и  $v_i$  — соответственно их вариации,  $i = 1, 2, 3$ ; символ (123) означает что невыписанные уравнения (или члены суммы) получают циклической перестановкой индексов.

Из полных уравнений движения следует, что величины  $\omega_i$  и  $\gamma_i$  связаны соотношениями

$$(1.2) \quad \gamma_1 = \omega_1 / \omega, \quad (I_2 - I_3) \omega^2 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma_3 g_2 - \gamma_2 g_3 \quad (1\ 2\ 3)$$

так что перманентные вращения заполняют кривую Штауде ( $K$ ) — ту часть пересечения конуса

$$(1.3) \quad \sum_{(1\ 2\ 3)} (I_2 - I_3) g_1 \gamma_2 \gamma_3 = 0$$

и единичной сферы

$$(1.4) \quad \sum_{(1\ 2\ 3)} \gamma_i^2 = 1$$

где  $\omega^2 \geq 0$ .

Траектории малых колебаний в окрестности перманентного вращения  
(1.5)  $\mathbf{v} = c (\mathbf{u} \cos \Omega t + \mathbf{v} \sin \Omega t)$

являются эллипсами с главными направлениями

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' \cos \varphi + \mathbf{v}' \sin \varphi, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{u}' \sin \varphi + \mathbf{v}' \cos \varphi$$

если угол  $\varphi$  выбран так, что скалярное произведение  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ . Здесь  $\mathbf{u}' + i\mathbf{v}'$  — координатная часть собственного вектора системы (1.1) с чисто мнимым собственным значением  $\lambda = -i\Omega$ .

При перемещении точки (1.2) по  $K$  изменяются две величины, полностью характеризующие форму и ориентацию эллипсов, располагающихся в касательной плоскости к сфере (1.4) в точке (1.2). Это отношение полуосей  $f = v/u$  и угол  $\theta = \arccos[(u, z)/(uz)]$  между вектором  $\mathbf{u}$  и нормалью  $\mathbf{z}$  к конусу (1.3) с компонентами

$$z_1 = (I_1 - I_2) g_3 \gamma_2 + (I_3 - I_1) g_2 \gamma_3! \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Таким образом, для определения величин  $\theta$  и  $f$  (как функций точки на  $K$ ) необходимо и достаточно знать в каждой точке пару  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ .

*Утверждение 1.* Векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  находятся в виде

$$(1.6) \quad \mathbf{u} = [\mathbf{R} \cos \varphi + \mathbf{S} \sin \varphi, \gamma], \quad \mathbf{v} = [-\mathbf{R} \sin \varphi + \mathbf{S} \cos \varphi, \gamma]$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2 \frac{(R, S) - (R, \gamma)(S, \gamma)}{R^2 - S^2 - (R, \gamma)^2 + (S, \gamma)^2}$$

$$\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3), \quad \mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$$

$$R_1 = -\frac{g_2 \gamma_2}{I_1 - I_2} (\alpha_1 \alpha_2 - 2\gamma_3^2) +$$

$$+ \frac{g_3 \gamma_3}{I_3 - I_1} (2\gamma_2^2 - \alpha_1 \alpha_3) - \lambda \omega \left( \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \sum_{(123)} \alpha_1 \gamma_1^2 \right)$$

$$R_2 = \frac{g_1 \gamma_2}{I_1 - I_2} (\alpha_1 \alpha_2 - 2\gamma_3^2) + 2\omega^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3^2$$

$$R_3 = \frac{g_1 \gamma_3}{I_3 - I_1} (\alpha_1 \alpha_3 - 2\gamma_2^2) - 2\omega^2 \gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_3$$

$$iS_1 = -\frac{g_2 \alpha_1 \gamma_1 \gamma_3}{I_1 - I_2} - \frac{g_3 \alpha_1 \gamma_1 \gamma_2}{I_3 - I_1} - 2\lambda \omega \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

$$iS_2 = \frac{g_1 \alpha_1 \gamma_1 \gamma_3}{I_1 - I_2} - \frac{g_3}{I_2 - I_3} (\alpha_3 \gamma_3^2 - \alpha_2 \gamma_2^2) + \omega^2 \gamma_3 \left( \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \sum_{(123)} \alpha_1 \gamma_1^2 \right)$$

$$iS_3 = \frac{g_1 \alpha_1 \gamma_1 \gamma_2}{I_3 - I_1} + \frac{g_2}{I_2 - I_3} (\alpha_3 \gamma_3^2 - \alpha_2 \gamma_2^2) - \omega^2 \gamma_2 \left( \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \sum_{(123)} \alpha_1 \gamma_1^2 \right)$$

$$\alpha_1 = -\frac{\lambda I_1}{\omega (I_2 - I_3)} \quad (1 \ 2 \ 3)$$

*Доказательство.* Выражая из первых трех уравнений системы для определения собственных векторов (1.1)  $\xi_i$  через  $v_i$ , получаем

$$\xi_1 = \delta^{-1} [\zeta_1 (\alpha_2 \alpha_3 - \gamma_1^2) + \zeta_2 (\gamma_1 \gamma_2 - \alpha_3 \gamma_3) + \zeta_3 (\gamma_1 \gamma_3 - \alpha_2 \gamma_2)] \quad (1 \ 2 \ 3)$$

$$\zeta_1 = (v_3 g_2 - v_2 g_3) [(I_2 - I_3) \omega]^{-1} \quad (1 \ 2 \ 3)$$

$$\delta = 2\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \sum_{(123)} \alpha_1 \gamma_1^2$$

Из четвертого уравнения системы находим  $(u' + iv', R + iS) = 0$ , где  $R$  и  $S$  задаются формулами (1.6), а из последних трех уравнений —  $(u' + iv', \gamma) = 0$ . Следовательно, можно принять  $u' + iv' = [R + iS, \gamma]$ . Наконец, угол  $\varphi$  в (1.6) определяем по формуле

$$(1.7) \quad \operatorname{tg} 2\varphi = 2(u', v') (u'^2 - v'^2)^{-1}$$

обеспечивающей выполнение условия  $(u, v) = 0$ .

*Замечание.* Поскольку угол  $\varphi$  находится лишь с точностью до  $\pi/2$ , то направления  $u, v$  определяются с точностью до замены на  $(\pm)v, (\mp)u$ .

2. Если на параметры тела не наложено ограничений, то зависимости функций  $\theta$  и  $f$  от положения точки на  $K$  сложны (см. ниже пп. 3, 4). Однако иногда картина упрощается.

*Утверждение 2.* Если центр тяжести тела находится на главной оси, то векторы  $u$  и  $v$  направлены по нормали и по касательной к кривой Штауде, т. е.  $\theta \equiv 0$ .

Действительно, кривая  $K$  распадается на две координатные полуокружности. Траектории движения оказываются симметричными относительно плоскостей этих полуокружностей,  $u \parallel z, v \perp z$  и, следовательно  $\theta \equiv 0$ , что вытекает также из общих формул (1.6). Утверждение 2 справедливо и тогда, когда центр тяжести тела находится в экваториальной плоскости (для допустимых точек, лежащих на координатной полуокружности), как и в случае динамической симметрии, разобранным в [4].

Таким образом, в случае расположения центра тяжести тела на главной оси следует изучить лишь поведение функции  $f$ . Пусть для определенности  $g_2 = g_3 = 0 < g_1, I_1 = mI_3, I_2 = nI_3$ . Перманентные вращения заполняют полуокружности  $\gamma_2 = 0, \gamma_1 > 0$  при  $m > 1$  ( $\gamma_2 = 0, \gamma_1 < 0$  при  $m < 1$ ),  $\gamma_3 = 0, \gamma_1 > 0$  при  $m > n$  ( $\gamma_3 = 0, \gamma_1 < 0$  при  $m < n$ ) и изолированные точки  $\gamma_1 = \pm 1$ . Ограничимся рассмотрением случая  $\gamma_2 = 0$ , считая, что на величины  $m$  и  $n$  не наложено никаких ограничений, кроме неравенства треугольника:

$$(2.1) \quad m + n \geq 1, \quad n - 1 \leq m \leq n + 1$$

Из формул для  $u$  и  $v$  следуют два эквивалентных выражения для  $f$ :

$$(2.2) \quad f = \sqrt{l(1-m)} \left| \frac{lmn + (n-1)\gamma_3^2 + m(m-n-1)\gamma_1^2}{lmn + (n-1)\gamma_3^2 - m(n-1)\gamma_1^2} \right| = \\ = \sqrt{l(1-m)} \left| \frac{m + (n-1)\gamma_3^2 - m(m-n)\gamma_1^2}{m(m-1)l - (m-1)(m\gamma_1^2 + \gamma_3^2)} \right|$$

$$l = \lambda^2 \gamma_1 I_3 g_1^{-1} = (-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q})/2$$

$$P = [2mn - m - n + 1 + \gamma_1^2 (m-1)(m^2 - 2mn - m - n + 1)] [(m-1)mn]^{-1}$$

$$Q = (n-1)\gamma_3^2 [1 - 3\gamma_1^2 (m-1)] [(m-1)mn]^{-1}$$

Дискриминант  $P^2 - 4Q$  является полным квадратом относительно  $\gamma_3^2$  лишь при  $m = 2$  и  $m + n = 1$ . При  $m = 2, 1 \leq n \leq 3$ :

$$l_1 = -\gamma_3^2, \quad l_2 = (n-1)(2 - 3\gamma_3^2)/2n$$

$$f_1 = |\gamma_3|, \quad f_2 = [n(3\gamma_3^2 - 2)/2(n-1)]^{1/2}$$

При  $m + n = 1$  (т. е. в случае плоской пластинки):

$$l_1 = \gamma_3^2/n, \quad l_2 = (1 + 3n\gamma_1^2)/n$$

$$f_1 = 2n |\gamma_3| / m, \quad f_2 = 1/2 (1 + 3n\gamma_1^2)^{1/2}$$

Для  $m + n \neq 1$  при  $\gamma_1 \rightarrow 0$  в соответствии с (2.2) имеем

$$f_1 = 1 + 1/2 (m - 1) [m(n - m) - 3(n - 1)] (m + n - 1)^{-1} \gamma_1^2 + O(\gamma_1^4)$$

$$f_2 = \left[ \frac{n(m - 1)}{m(n - 1)} \right]^{1/2} + \left[ \frac{m(m - 1)(m - 2)}{m + n - 1} + \frac{m^2 - m + 1}{2} \right] \gamma_1^2 + O(\gamma_1^4)$$

При  $\gamma_3 \rightarrow 0$  и  $n \neq (m - 1)^2 / (2m - 3)$ :

$$l_1 = \frac{n(2m - 3) - (m - 1)^2}{(m - 1)n} + O(\gamma_3^2)$$

$$l_2 = \frac{(n - 1)(3m - 4)\gamma_3^2}{[(m - 1)^2 - n(2m - 3)]m} + O(\gamma_3^2)$$

(2.3)  $f_1 = [(m - 1)^2/n - (2m - 3)]^{1/2} / (n - m + 1) + O(\gamma_3^2)$

$$f_2 = (n - m + 1) [(3m - 4)(1 - m)]^{1/2} \{m(n - 1) [(m - 1)^2 - n(2m - 3)]\}^{-1/2} |\gamma_3| + O(\gamma_3^2)$$

Зависимости  $f_{1,2}(\gamma_3)$  имеют вид, аналогичный построенным в [4], и в значительной мере определяются значениями

$$f_{1,2}, \quad \frac{\partial f_{1,2}}{\partial \gamma_1^2} \quad \text{при} \quad \gamma_1 = 0 \quad \text{и}$$

$$f_{1,2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \gamma_3^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \gamma_3} \quad \text{при} \quad \gamma_3 = 0$$

Так, на фиг. 1 знаки плюс и минус указывают подобласти области (2.1), внутри которых  $\frac{\partial f_1}{\partial \gamma_1^2} \Big|_{\gamma_1=0}$  сохраняет соответственно положительное либо отрицательное значение. Кривая на фиг. 1, где это выражение обращается в нуль, задается уравнением  $n = (m^2 - 3)/(m - 3)$ , и разложение  $f_1 - 1$  вблизи  $\gamma_1 = 0$  начинается с членов порядка  $\gamma_1^4$ . Аналогичная кривая для  $f_2$  задается уравнением

$$n = (m - 1)(m^2 - 3m - 1) / (m^2 - m + 1)$$

Разложения,  $f_{1,2}$  вблизи  $\gamma_3 = 0$  задаются формулами (2.3). Однако на кривой  $n = (m - 1)^2 / (2m - 3)$  коэффициент пропорциональности в соотношении  $f_2 \sim |\gamma_3|$  обращается в бесконечность. В этом случае имеем

$$l = \text{const} \cdot |\gamma_3| + o(\gamma_3) \quad \text{и} \quad f_2 = \text{const} \cdot |\gamma_3|^{1/2} + o(|\gamma_3|^{1/2}).$$

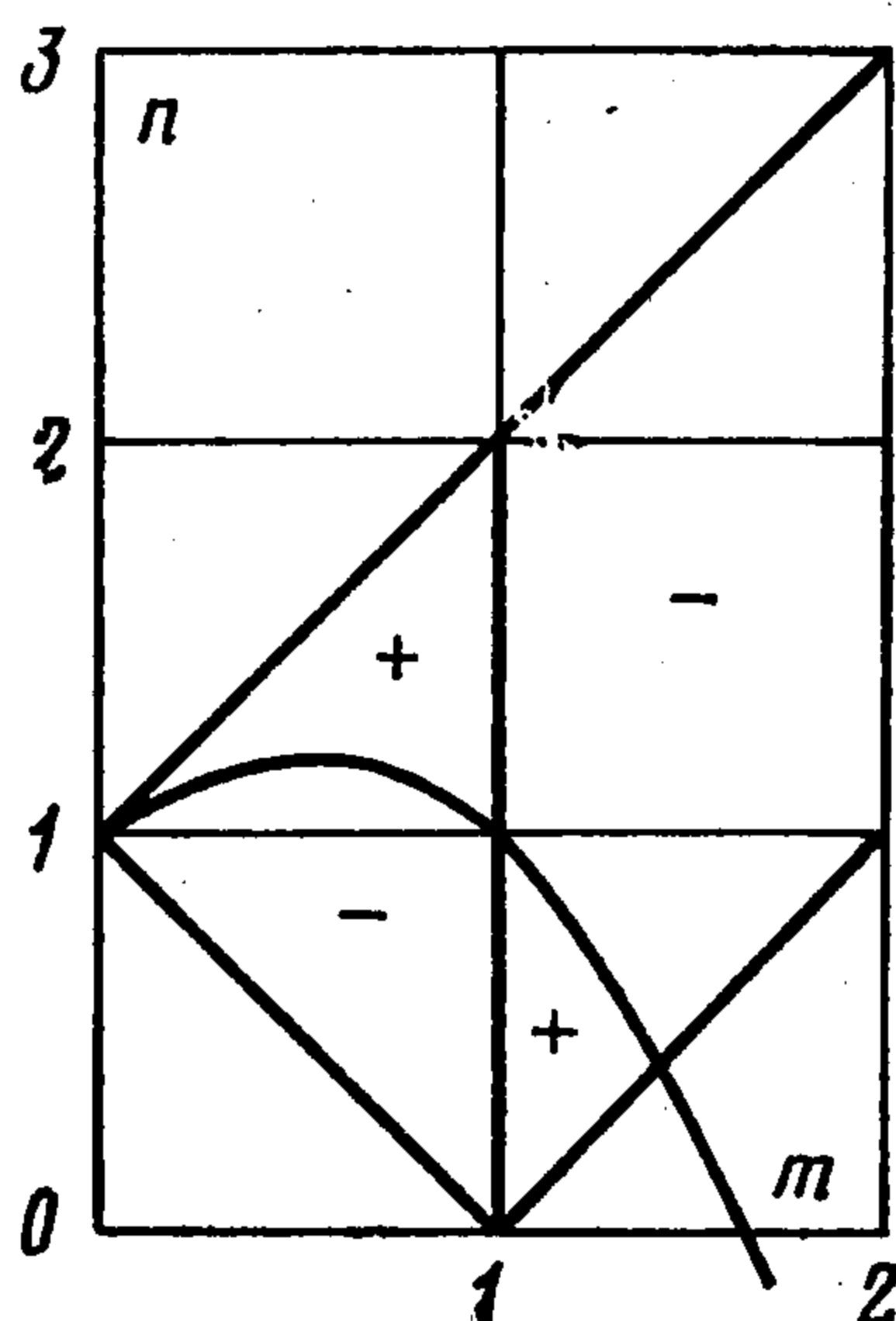
3. Рассмотрим общий случай, когда, не умаляя общности, можно считать  $g_1 > 0$  (123),  $I_1 \neq I_2$  (123) и кривая Штауде  $K$  состоит из четырех связанных компонент, примыкающих к полюсам сферы, где  $\gamma_i = \pm 1$ . Эти компоненты отмечены на фиг. 2, на единичной сфере направляющих косинусов, жирными линиями (остальные обозначения объяснены ниже).

Компоненты делятся точками бифуркации на участки как с измененной степенью неустойчивости [5] перманентных вращений, так и неизменным количеством семейств эллипсов. Отметим, кроме того, что на

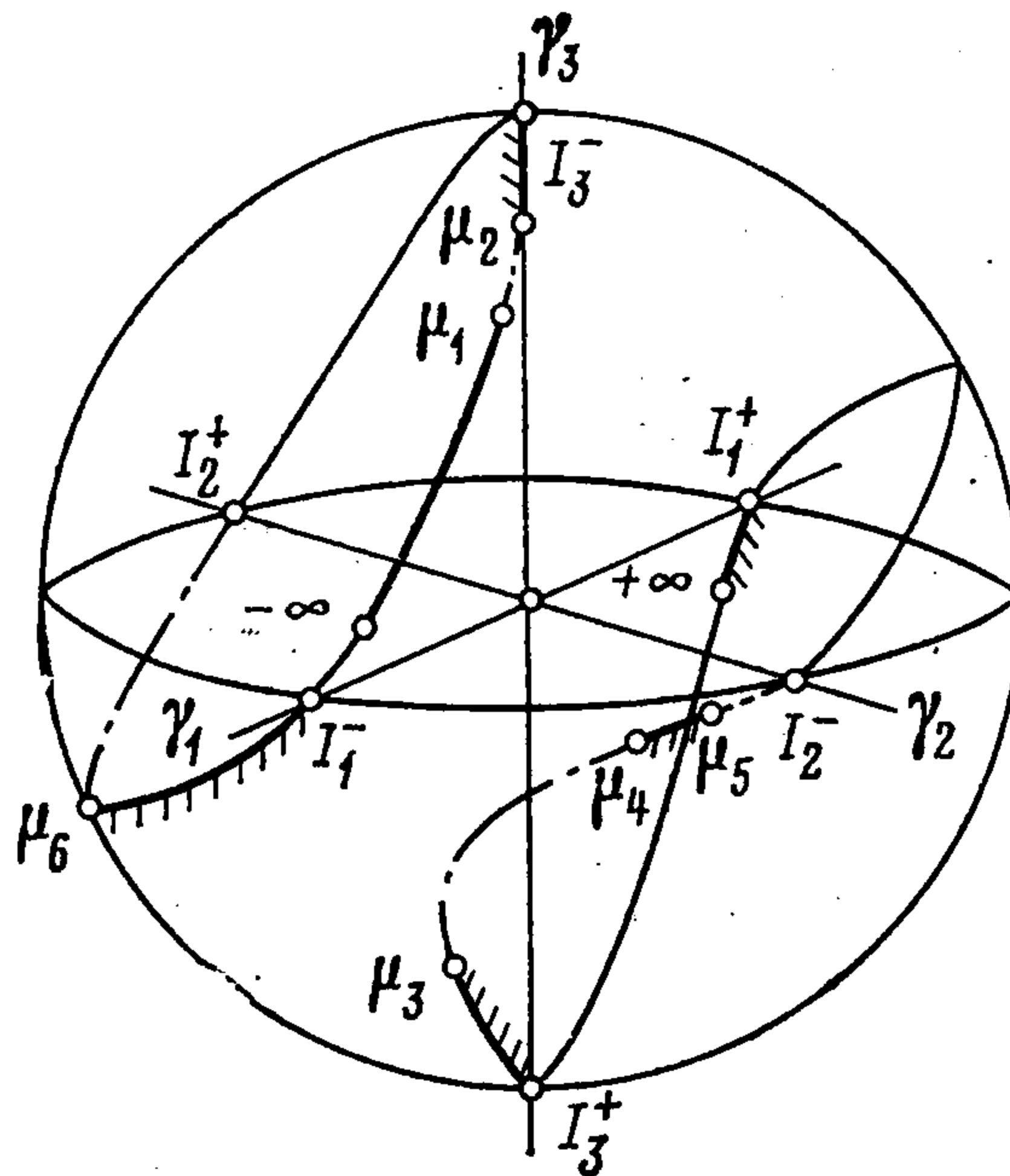
участках кривых, примыкающих к полюсам, соответствующим средней полуоси эллипсоида инерции тела, существует одно семейство, а для большой и малой — по два.

**Утверждение 3.** При стремлении точки (1.2) по  $K$  к полюсу  $\theta \rightarrow 0$  (или  $\pm\pi$ ) одно семейство эллипсов превращается в окружность, а для второго, если оно существует

$$f_2 \rightarrow [I_{i+1}I_{i+2} (I_i - I_{i+1})^{-1} (I_i - I_{i+2})^{-1}]^{1/2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Действительно, пусть для определенности  $i = 1$ , т. е.  $\gamma_1 \rightarrow 1$ . Удерживая члены наибольшего порядка в выражениях для коэффициентов характеристического уравнения  $\lambda^2(\lambda^4 + P\lambda^2 + Q) = 0$ , получаем

$$P = \omega^2 [1 + (I_1 - I_2)(I_1 - I_3)I_2^{-1}I_3^{-1}], \quad Q = \omega^4 (I_1 - I_2) \times \\ \times (I_1 - I_3)I_2^{-1}I_3^{-1}$$

Отсюда

$$\lambda_1^2 = -\omega^2 \leq 0, \quad \lambda_2^2 = -\omega^2 (I_1 - I_2)(I_1 - I_3)I_2^{-1}I_3^{-1}$$

Если первая ось соответствует большой или малой полуоси эллипсоида инерции, то  $\lambda_2^2 \leq 0$ . Из (1.6) имеем

$$\mathbf{R} = (-\lambda\omega d, 0, 0), \quad i\mathbf{S} = (0, g_1 d (I_3 - I_1)^{-1}, g_3 d (I_1 - I_2)^{-1}) \\ d = \alpha_1^* (\alpha_2^* \alpha_3^* - 1), \quad \alpha_1^* = \lim_{\gamma_1 \rightarrow 1} \alpha_1 < \infty \quad (1 \ 2 \ 3) \\ \mathbf{z} = (0, g_3 (I_3 - I_1), g_1 (I_1 - I_2))$$

Следовательно

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} = (0, \lambda\omega\gamma_3 d, -\lambda\omega\gamma_2 d) \parallel \mathbf{z}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' = (0, -\omega^2\gamma_2 d, \\ -\omega^2\gamma_3 d) \perp \mathbf{z} \\ f = \frac{v}{u} = \frac{\omega}{|\lambda|}, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = [I_2 I_3 (I_1 - I_2)^{-1} (I_1 - I_3)^{-1}]^{1/2}$$

что и требовалось.

*Утверждение 4.* При приближении к точке смены степени неустойчивости с нулевым характеристическим корнем эллипсы стягиваются в отрезок, направленный по касательной к  $K$  (т. е.  $\theta \rightarrow \left(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}\right) \pi/2, f \rightarrow 0$ ).

В самом деле, при  $\lambda = 0$   $\alpha_1 = 0$  (123),  $S = 0$  и согласно (1.6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{R} = & (g_2 \gamma_2 \gamma_3^2 (I_1 - I_2)^{-1} + g_3 \gamma_2^2 \gamma_3 (I_3 - I_1)^{-1} - \\ & - g_2 \gamma_1 \gamma_3^2 (I_1 - I_2)^{-1}, \quad - g_3 \gamma_1 \gamma_2^2 (I_3 - I_1)^{-1}) \end{aligned}$$

Тогда  $\mathbf{R} \parallel z, u = [R, \gamma] \perp z, v = 0$ , следовательно,  $\theta = \left(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}\right) \pi/2, f = 0$ . Возможен и другой тип изменения степени неустойчивости, когда дискриминант  $P^2 - 4Q$  меняет знак, а  $P < 0$ . При этом возникает два семейства эллипсов с общими начальными значениями  $\theta$  и  $f$ , как это было, например, в случае  $I_1 = I_2, g_1/g_3 \ll 1$  [4].

*Утверждение 5.* Функции  $\theta$  и  $f$  теряют непрерывность в точках, где  $u'^2 - v'^2$  обращается в нуль. При этом приращение  $\theta$  равно  $\pi/2$  или  $3\pi/2$ , а  $f$  меняется на  $1/f$ .

*Доказательство.* Пусть в пределе  $u'^2 - v'^2 = 0$ . Из формулы (1.7) следует, что при  $(u', v') \neq 0$  предельные значения до и после точки разрыва  $\varphi_- = -\pi/4, \varphi_+ = \pi/4$ , поэтому  $u_- = (u' - v')/\sqrt{2}, v_- = (u' + v')/\sqrt{2}, u_+ = v_-, v_+ = -u_-$  и  $(u_-, u_+) = (u'^2 - v'^2)/2 = 0$ . Следовательно, угол  $\theta$  получает приращение  $\Delta\theta = \pi/2$  или  $3\pi/2$  ( $z$  меняется непрерывно), а  $f_- = |u' + v'| / |u' - v'| = 1/f_+$ . Если  $(u', v') = 0$ , то  $u = u', v = v', u = v = 1, f = 1$ . При прохождении  $f$  через значение  $f = 1$  замена  $\varphi$  на  $\varphi \pm \pi/2$  приводит к замене  $u, v$  на  $\pm v, \mp u$  и опять к скачку  $\theta$ .

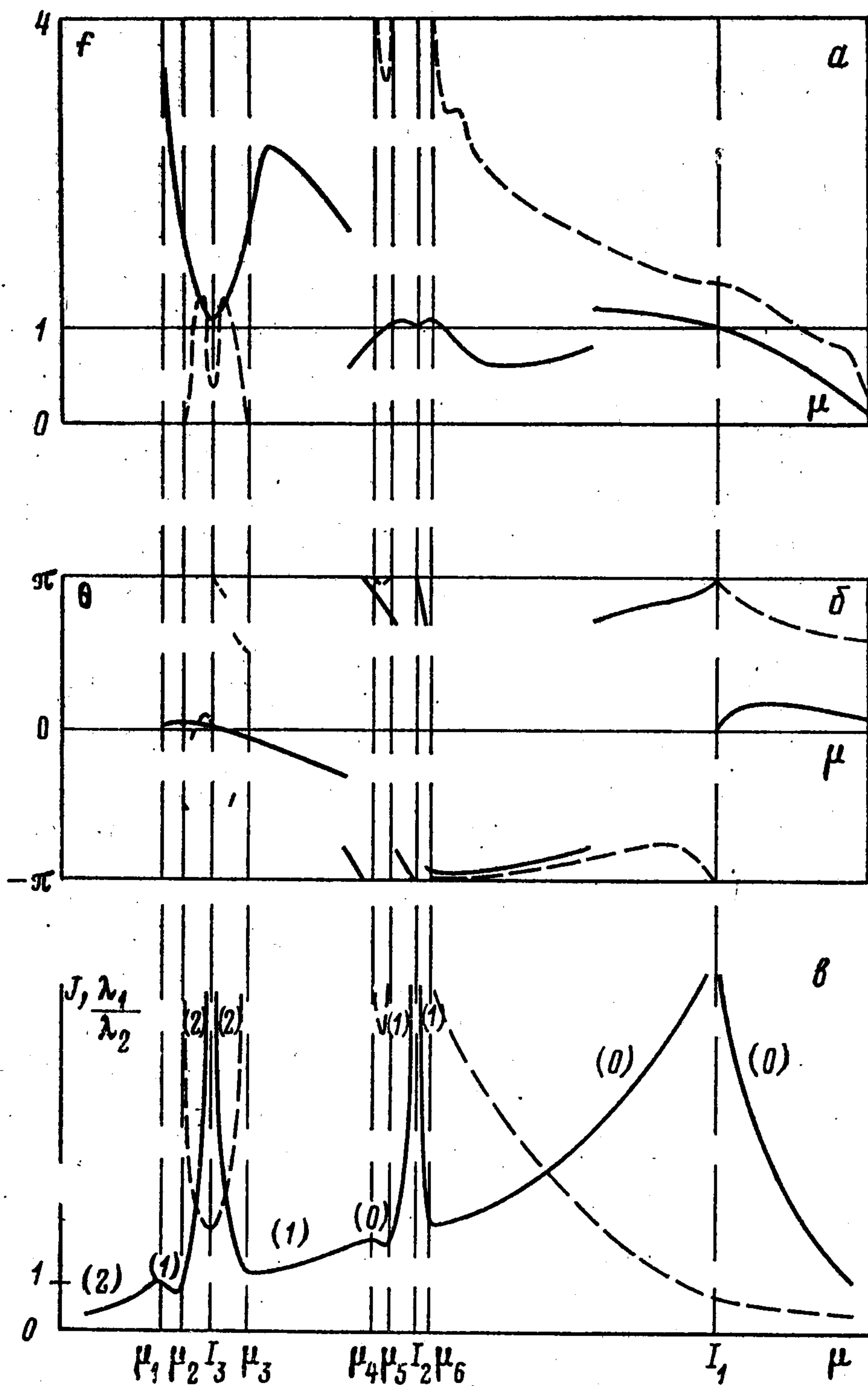
4. Полное аналитическое изучение поведения функций  $\theta$  и  $f$  на  $K$  сопряжено с трудностями. Эти функции были исследованы численно для  $I_1 = 6, I_2 = 4, I_3 = 3, g_1 = 1, g_2 = 0,01, g_3 = 0,02$  — при подобном наборе параметров кривая Штауде наиболее богата чередованием участков с неизменной степенью неустойчивости.

На фиг. 2, 3 приведены результаты. На фиг. 2 штрихпунктиром отмечены дуги  $K$ , где имеется по одному семейству эллипсов (и ляпуновских периодических движений). Точки на этих дугах являются седловыми для приведенного потенциала  $V$  и неустойчивы по первому приближению. Штриховкой отмечены дуги, где имеется по два семейства эллипсов (и ляпуновских периодических движений при выполнении условия нерезонансности  $\lambda_1 \neq s\lambda_2, s$  — целое). Это точки минимума либо максимума  $V$ . В случае минимума  $V$  (штриховые линии направлены вниз) от последнего условия можно отказаться согласно теореме [6]. Характер критических точек  $V$  на  $K$  находится в соответствии с работами [3, 7].

На фиг. 3, а и б построены зависимости  $f$  и  $\theta$  от величины  $\mu$ , параметризующей кривую  $K$  [8]:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\omega^2} \frac{g_1}{I_1 - \mu} \quad (123), \quad \omega^4 = \sum_{(123)} \frac{g_1^2}{(I_1 - \mu)^2}$$

Сплошные и штриховые кривые отвечают двум разным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Знак  $\theta$  выбирается, так, чтобы  $\theta > 0$ , если тройка векторов  $u, z, \gamma$  — правая. На фиг. 2 символами  $I_1 +$ ,  $I_1 -$  и т. д. указаны предельные значения  $\mu$ , соответствующие концам допустимых дуг, а также точки изме-



Фиг. 3

нения степени неустойчивости  $\mu_1, \dots, \mu_6$ , стационарные [5] для интеграла момента

$$J(\mu) = \sum_{(123)} I_1 \omega \gamma_1^2 = \omega^{-3} \sum_{(123)} \frac{I_1 g_1^2}{(I_1 - \mu)^2}$$

Зависимости величин  $J$  и  $\lambda_1/\lambda_2$  от  $\mu$  указаны на фиг. 3, в соответственно сплошными и штриховыми линиями.

Анализ результатов, приведенных на фиг. 3, позволяет сделать следующие выводы.

Функции  $\theta$  и  $f$  различны для разных частот в одной и той же точке.

Функции  $\theta$  и  $f$  изменяются не всегда монотонно и непрерывно. Их поведение подчиняется утверждениям 3—5 и замечанию. Именно поэтому, например,  $f \rightarrow \infty$  при  $\mu \rightarrow \mu_1, \mu_4, \mu_5$  или  $\mu_6$ .

Приращение  $\theta$  на каждой дуге ограничено величиной  $3\pi$  и кратко  $\pi/2$  на всех дугах, кроме  $(I_1, +\infty)$ .

Функции  $f$  и  $\lambda_1/\lambda_2$  непрерывны при  $\mu = I_i$

Резонансные точки накапливаются к точкам  $\mu_2$  и  $\mu_3$  (см. фиг. 3, в).

Степень неустойчивости изменяется на  $K$  в соответствии с характером  $V$  и отмечена цифрами (0), (1), (2) на фиг. 3, в.

Автор благодарен Румянцеву В. В., Демину В. Г. и Татаринovu Я. В. за полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Mettler E.* Periodische und asymptotische Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels.— *Math. Z.*, 1937, В. 43, No. 1, S. 59—100.
2. *Румянцев В. В.* К устойчивости перманентных вращений твердого тела около неподвижной точки.— *ПММ*, 1957, т. 21, вып. 3, с. 339—346.
3. *Румянцев В. В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела.— *ПММ*, 1956, т. 20, вып. 1, с. 51—66.
4. *Маринбах М. А.* О ляпуновских периодических движениях тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой.— *Вестн. МГУ. Сер. матем., механ.*, 1979, № 5, с. 75—79.
5. *Рубановский В. Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твердого тела.— *ПММ*, 1974, т. 38, вып. 4, с. 616—627.
6. *Weinstein A.* Normal modes for nonlinear Hamiltonian systems.— *Invent. math.*, 1973, v. 20, No. 1 p. 47—57.
7. *Татаринov Я. В.* Портреты классических интегралов задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— *Вестн. МГУ. Сер. матем., механ.*, 1974, № 6, с. 99—105.
8. *Кузьмин П. А.* К теории перманентных вращений.— *Изв. вузов. Авиац. техника*, 1958, № 2, с. 16—19.

Москва

Поступила в редакцию  
23.VII.1979