Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 531.36

О ЦИКЛИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ КОНСЕРВАТИВНЫХ НАТУРАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Сумбатов А. С.

Предлагается конструктивное решение задачи о существовании скрытых циклических координат в голономных системах с тремя степенями свободы. Решение сводится к построению в явном виде функционально независимых инвариантов лагранжиана системы. Благодаря известной взаимосвязи между наличием в системе циклических координат, существованием векторных полей Киллинга, а также линейных относительно скоростей первых интегралов уравнений Лагранжа, тем самым в локальной постановке для систем с тремя степенями свободы получено решение остальных из перечисленных задач.

1. Согласно определению [1], лагранжиан натуральной системы имеет вид

$$L = {}^1/_2\, a_{ij}q^{i\cdot}q^{j\cdot} + a_iq^{i\cdot} + a \quad (q^\cdot = dq/dt) \tag{1.1}$$

Коэффициенты a_{ij}, a_i, a — функции локальных координат $q^1, \ldots, q^n$ и времени t, $\| a_{ij} \|$ — положительно-определенная матрица. В формуле (1.1) и в последующих при наличии одинаковых индексов, встречающихся в мономах один раз вверху, а другой раз внизу, подразумевается сумма по всем значениям индекса от 1 до n (n — число степеней свободы системы). Натуральная система называется обратимой [2], если вектор $b = (a_1, \ldots, a_n)$ равен нулю, и необратимой в противном случае. Конфигурационное многообразие X_n системы предполагаем C^r-гладким, функции a_{ij}, a_i, a $(i, j = 1, \ldots, n)$ не содержат явно t и принадлежат классу C^r на X_n (чтобы не оговаривать существование и непрерывность всех тех производных рассматриваемых функций, которые используются в дальнейших рассуждениях, число r предполагается достаточно большим).

Пусть U — некоторая координатная окрестность произвольной точки $p \in X_n$. Рассматривается следующая задача: по коэффициентам лагранжиана (1.1) определить, существуют ли в U функция $\Psi(q^1, \ldots, q^n)$ и невырожденное преобразование координат

$$q^j = q^j(Q^1, \ldots, Q^n) \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

такие, что лагранжиан

$$L + \frac{d}{dt}\Psi = {}^1/_2 A_{ij}Q^{i\cdot}Q^{j\cdot} + A_iQ^{i\cdot} + A \tag{1.3}$$

имеет циклические координаты (для обратимых систем $\Psi(U) = 0$).

В случае $n = 2$ решение задачи дает теорема 1.

Введем обозначения

$$V_2 = (X_2,\ ds^2 = a_{ij}dq^i dq^j),\ \delta^2 = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2,\ \partial_i = \partial/\partial q^i$$
$$\operatorname{rot} b = (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1)/\delta,\ \Delta_1 f = a^{ij}\partial_i f \partial_j f,\ \Delta_2 f = \partial_i(\delta a^{ij}\partial_j f)/\delta,$$
$$\| a^{ij} \| = \| a_{ij} \|^{-1}$$

Последние формулы — определения дифференциальных параметров $\Delta_1 f$ и $\Delta_2 f$ функции $f(q^1, \ldots, q^n)$, справедливые при произвольном n.

Пусть $\Phi\ (q^1, q^2) \in C^2$ — некоторая функция, которая определена в U и не имеет критических точек. Точка $p \in X_n$ называется критической точкой функции f: $X_n \to R$, если $df(p) = 0$.

Теорема 1. 1) Если

$$\partial_1 F \partial_2 \Phi - \partial_1 \Phi \partial_2 F = 0\ (F = a,\ \operatorname{rot} b,\ \Delta_1\Phi,\ \Delta_2\Phi) \tag{1.4}$$

то на множестве U можно ввести локальные координаты, одна из которых — циклическая для рассматриваемой консервативной натуральной системы с двумя степенями свободы.

2) Циклическая координата существует также, когда функции a, $\operatorname{rot} b$, K (K — гауссова кривизна риманова многообразия) постоянны в U, причем обе координаты системы могут быть одновременно циклическими тогда и только тогда, когда $K(U) = (\operatorname{rot} b)(U) = 0$, $a(U) = \text{const}$.

Очевидно, что в случае существования циклической координаты для любой из функций a, $\operatorname{rot} b$, K, принимаемой в качестве Φ, выполняются условия (1.4). Достаточность условий (1.4) доказывается введением новых координат Q^1, Q^2 и выбором функции Ψ по формулам

$$Q^1 = \Phi(q^1, q^2),\quad Q^2 = \int \mu(a_{21}\partial_1\Phi - a_{11}\partial_2\Phi)\,dq^1 +$$
$$+ \mu(a_{22}\partial_1\Phi - a_{12}\partial_2\Phi)\,dq^2$$
$$\mu = \frac{1}{\delta}\exp\left(-\int\frac{\Delta_2\Phi}{\Delta_1\Phi}\,d\Phi\right),\quad \Psi = -\int B_1\,dQ^1 + (B_2 - A_2)\,dQ^2$$
$$a_i\,dq^i = B_i\,dQ^i,\quad A_2 = \Delta \operatorname{rot} b\,dQ^1,\quad \Delta^2 = A_{11}A_{22} - (A_{12})^2$$

В выражении

$$L + \frac{d}{dt}\Psi = \frac{1}{2\Delta_1 Q^1}\left[(Q^{1\cdot})^2 + \frac{(Q^{2\cdot})^2}{\mu^2\delta^2}\right] + A_2(Q^1)Q^{2\cdot} + A(Q^1)$$

координата Q^2 циклическая. При $K(U) = \text{const}$ существуют [3, 4] координаты Q^1 и Q^2, в которых $ds^2 = (dQ^1)^2 + A_{22}(Q^1)(dQ^2)^2$, отсюда вытекает справедливость утверждения 2 теоремы.

Данная теорема включает как частные случаи классический признак [3, 4] метрики вращения, критерий [5—7] существования циклической координаты в обратимых системах и аналогичный критерий [8] для необратимых систем. Ниже будет найдено решение поставленной задачи, когда $n = 3$.

Определение. Поле тензора $y_{\alpha\beta\ldots\tau}(q^1, \ldots, q^n)$, заданное на римановом многообразии $V_n = (X_n,\ ds^2 = a_{ij}dq^i dq^j)$, назовем инвариантом лагранжиана (1.1), если

1) компоненты $y_{\alpha\beta\ldots\tau}$ — функции только компонент a_{ij} метрического тензора, кососимметричных величин $\omega_{lk} = \partial_l a_k - \partial_k a_l$ $(1 \leqslant l < k \leqslant n)$,

скалярной функции a и частных производных до некоторого порядка от этих аргументов по $q^1, \ldots, q^n$:

$$y_{\alpha\beta\ldots\tau}=f_{\alpha\beta\ldots\tau}\left(a_{ij}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^r}, \ldots, \frac{\partial^m a_{ij}}{\partial^p q^1\ldots\partial^h q^n};\right.$$
$$\left.\omega_{lk}, \frac{\partial\omega_{lk}}{\partial q^c}, \ldots, \frac{\partial^s\omega_{lk}}{\partial^x q^1\ldots\partial^z q^n}; a, \frac{\partial a}{\partial q^b}, \ldots, \frac{\partial^e a}{\partial^v q^1\ldots\partial^u q^n}\right)$$

(m, s, e — фиксированные неотрицательные целые числа; $p, \ldots, h, x, \ldots$ $\ldots, z, v, \ldots, u$ пробегают всевозможные неотрицательные целые значения, такие, что $p+\ldots+h=m$, $x+\ldots+z=s$, $v+\ldots+u=e$, остальные индексы пробегают значения $1, 2, \ldots, n$);

2) при переходе (1.2), (1.3) к произвольным локальным координатам новые компоненты

$$Y_{\alpha\beta\ldots\tau}=f_{\alpha\beta\ldots\tau}\left(A_{ij}, \frac{\partial A_{ij}}{\partial Q^r}, \ldots, \frac{\partial^m A_{ij}}{\partial^p Q^1\ldots\partial^h Q^n};\right.$$
$$\left.\Omega_{lk}, \frac{\partial\Omega_{lk}}{\partial Q^c}, \ldots, \frac{\partial^s\Omega_{lk}}{\partial^x Q^1\ldots\partial^z Q^n}; A, \frac{\partial A}{\partial Q^b}, \ldots, \frac{\partial^e A}{\partial^v Q^1\ldots\partial^u Q^n}\right)$$
$$\left(\Omega_{lk}=\frac{\partial A_k}{\partial Q^l}-\frac{\partial A_l}{\partial Q^k}, 1\leqslant l<k\leqslant n, A=a\right)$$

где A_{ij} — новые компоненты метрического тензора.

Замечания. 1°. Для целей настоящей статьи не требуется, чтобы условие 2 выполнялось при всевозможных преобразованиях координат. Можно ограничить преобразования (1.2) условием $\operatorname{sgn}\det\|\partial_i Q^j\|=1$. Поэтому допускается, чтобы величины $y_{\alpha\beta\ldots\tau}$ были компонентами псевдотензора, т. е. коэффициентами внешней дифференциальной формы. В дальнейшем это отличие специально не оговаривается.

2°. В случае, когда инвариант имеет нулевой ранг, не зависит от функций a, ω_{ij} и их частных производных, приходим к классическому определению [3] скалярного дифференциального инварианта многообразия V_n (инвариант Гаусса). Если инвариант имеет нулевой ранг, не зависит от компонентов ω_{ij} и их частных производных, то он называется [3] скалярным дифференциальным параметром функции a (инвариант Бельтрами).

3°. Всевозможные ковариантные производные r-го порядка $\nabla_{\alpha\beta\ldots\tau}a$ функции a, очевидно, образуют инвариант лагранжиана (1.1) произвольного ранга r.

4°. Если $n=3$ и h (h_1, h_2, h_3) — дифференцируемая вектор-функция на многообразии X_3, то, как известно [3, 5], в произвольной системе координат $\{q^1, q^2, q^3\}$ величины

$$\beta^1=\frac{1}{\delta}(\partial_2 h_3-\partial_3 h_2),\quad \beta^2=\frac{1}{\delta}(\partial_3 h_1-\partial_1 h_3),\tag{1.5}$$
$$\beta^3=\frac{1}{\delta}(\partial_1 h_2-\partial_2 h_1),\quad \delta^2=\det\|a_{ij}\|$$

определяют контравариантные компоненты псевдовектора, который обозначается $\operatorname{rot} h$. При ограничении $\operatorname{sgn}\det\|\partial_i Q^j\|=1$ на преобразования (1.2) $\omega=\operatorname{rot} b$ — векторный инвариант лагранжиана (1.1).

5°. Из определения следует, что если существует $2\leqslant k\leqslant n$ взаимно функционально независимых скалярных инвариантов лагранжиана (1.1) (при $k=1$ требуется, чтобы инвариант не был константой), то при любом выборе локальных координат и функции Ψ лагранжиан (1.3) не может иметь более $n-k$ циклических координат.

Далее полагаем $n = 3$. Пусть $da \neq 0$ в точке p. Тогда существует окрестность U, в которой для каждой точки $x \in U$ решение уравнения $a = a(x)$ — двумерное подмногообразие. Другими словами, при всех значениях постоянной c из некоторого промежутка $I \subset R$ уравнение $a = c$ определяет в U однопараметрическое семейство поверхностей $\{a = c\}$, таких, что через каждую точку $x \in U$ проходит одна и только одна поверхность семейства. Если векторный инвариант y лагранжиана удовлетворяет в U условию $y \times \operatorname{grad} a \neq 0$, то поле

$$y - \frac{y \cdot \operatorname{grad} a}{\Delta_1 a} \operatorname{grad} a$$

есть ненулевой инвариант и его орт

$$e_1 \in \bigcup_{c \in I} \bigcup_{x \in U} T_x\,(a = c) \tag{1.6}$$

где $T_x\,(a = c)$ — касательное пространство в точке x поверхности $a = c$. Инвариант $e_2 = (\Delta_1 a)^{-1/2}\, e_1 \times \operatorname{grad} a$ назовем дополнительным к e_1, он также удовлетворяет включению (1.6).

Нетривиальными примерами инвариантов e_1, e_2 служат поля единичных векторов, касательных к линиям кривизны поверхностей семейства $\{a = c\}$.

Докажем это утверждение в частном случае, когда поверхности семейства $\{a = c\}$ геодезически параллельны (в дальнейшем потребуется только этот случай). Аналитическим признаком такого расположения поверхностей служит [5] функциональная зависимость инвариантов $\Delta_1 a$ и a. Не нарушая общности, можно считать, что $\Delta_1 a = 1$. Если поверхности геодезически параллельны, то компоненты z^1, z^2, z^3 вектора $\bar{e}_k$ в каждой фиксированной точке $x \in U$ доставляют экстремальное значение форме $E = {}^1/_2 \nabla_{ij}\, a z^i z^j$ при условиях $\nabla_i a z^i = 0$ и $a_{ij} z^i z^j = 1$ [6]. Составив вспомогательную функцию

$$\Pi = E + {}^1/_2\, \lambda\, (a_{ij} z^i z^j - 1) + \mu \nabla_i a z^i$$

запишем необходимые условия экстремума

$$(\lambda a_{ij} + \nabla_{ij} a) z^j + \mu \nabla_i\, a = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

Если z^1, z^2, z^3 — решение задачи, то

$$\mu = -(\nabla_{ij} a \nabla^i a + \lambda \nabla_j a)\, z^j = -\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta_1 a}{\partial a} + \lambda\right) \nabla_j a z^j = 0$$

Следовательно, необходимо, чтобы множитель λ был корнем уравнения

$$\delta^{-2} \det \| \lambda a_{ij} + \nabla_{ij} a \| = \lambda^3 + H \lambda^2 + K_{\mathrm{rel}}\, \lambda + \delta^{-2} \det \| \nabla_{ij} a \| = 0 \tag{1.7}$$

$$H = \Delta_2 a, \quad K_{\mathrm{rel}} = {}^1/_2\, e^{ijk} e^{lmv} a_{il} \nabla_{jm} a \nabla_{kv} a$$

Здесь $e^{ijk} = 1/\delta$ ($e^{ijk} = -1/\delta$), если последовательность i, j, k получается четной (нечетной) перестановкой индексов 1, 2, 3; $e^{ijk} = 0$ в остальных случаях. Величины $H\,(x)$, $K_{\mathrm{rel}}\,(x)$ — значения в точке $x \in U$ соответственно средней и относительной кривизн [3] поверхности $a = a\,(x)$. Все корни уравнения (1.7) действительные. Один из корней равен нулю. В этом проще всего убедиться, выбрав полугеодезическую систему координат v^1, v^2, $v^3 = a$, в которой линейный элемент многообразия V_3 записывается в виде [3]

$$ds^2 = b_{\alpha\beta}\, dv^\alpha dv^\beta + (da)^2 \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2) \tag{1.8}$$

а матрица вторых ковариантных производных функции a имеет вид

$$\nabla_{ij}a = \begin{Vmatrix} {}^1/_2\partial_a b_{11}, & {}^1/_2\partial_a b_{12}, & 0 \\ {}^1/_2\partial_a b_{21}, & {}^1/_2\partial_a b_{22}, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}$$

Если остальные корни $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то каждому корню λ_k $(k = 1,2)$ соответствует, очевидно, единственное решение e_k (z^1, z^2, z^3) уравнений

(1.9) $$(\lambda_k a_{ij} + \nabla_{ij}a)\, z^j = 0,\ \nabla_i a z^i = 0,\ a_{ij}z^i z^j = 1 \ (i = 1, 2, 3)$$

причем $e_1 e_2 = 0$. Таким образом величины z^j функционально выражаются через компоненты a_{ij}, $\nabla_{ij}a$, $\nabla_i a$. Уравнения (1.9) получены в произвольной системе локальных координат $\{q^1, q^2, q^3\}$, поэтому e_1 и e_2 действительно являются инвариантами лагранжиана (1.1), что и требовалось доказать.

2. Если функция a (x) непостоянна, то система может иметь две, одну или ни одной циклической координаты. Разберем последовательно эти случаи.

Теорема 2. 1) Пусть функция $f \in C^2$ определена в окрестности $U \ni p$ и не имеет критических точек

$$e_1 \in \bigcup_{c\in I} \bigcup_{x\in U} T_x (f = c)$$

дважды непрерывно дифференцируемый орт некоторого поля, e_2 — орт дополнительного поля. Если выражения

(2.1) $$a,\ \Delta_1 f,\ \pi_{\alpha\beta} = e_\alpha \operatorname{rot} e_\beta,\ \omega e_\alpha\ (\alpha,\ \beta = 1, 2)$$

функции только f и, кроме того

(2.2) $$\omega \cdot \operatorname{grad} f = 0$$

то в достаточно малой окрестности точки $p \in X_3$ можно выбрать обобщенные координаты системы, две из которых — циклические.

2) Если в системе существуют одновременно две циклические координаты и f — какой-нибудь нетривиальный скалярный инвариант лагранжиана, то любой другой скалярный инвариант — функция только f, причем выполняется условие (2.2).

Доказательство. Утверждение 2 следует с очевидностью из определения п. 1. В системе координат $\{Q^1, Q^2, Q^3\}$, где Q^1, Q^2 — циклические координаты лагранжиана (1.3), вектор $\Omega = \omega$ имеет, согласно (1.5), компоненты

$$\Omega^1 = -\partial_3 A_2/\Delta,\ \Omega^2 = \partial_3 A_1/\Delta,\ \Omega^3 = 0$$
$$(\Delta^2 = \det \| A_{ij} \|,\ \operatorname{grad} A = (0,\ 0,\ \partial_3 A))$$

Поскольку $f = f\,(Q^3)$, выполняется условие (2.2).

Докажем утверждение 1 теоремы. Рассмотрим уравнения

(2.3) $$dq^i/ds = a^{ij}\partial_j f\ (i = 1,\ 2,\ 3)$$

нормальной конгруенции семейства $\{f = c\}$. Для определения отдельной кривой конгруенции достаточно задать координаты точки пересечения этой кривой с какой-нибудь фиксированной поверхностью семейства. Выберем поверхность $f = f\,(p)$ и введем на ней систему координат $\{\gamma^1, \gamma^2\}$ с координатными векторами e_1, e_2. В достаточно малой окрестности U

точки $p \in X_3$ общее решение уравнений (2.3) можно представить в виде

$$v^1(q^1, q^2, q^3) = \gamma^1, \; v^2(q^1, q^2, q^3) = \gamma^2$$

где v^1, v^2 — регулярные функции. Очевидно, функции v^1, v^2, $v^3 = f$ независимы в U и могут быть выбраны в качестве новых координат системы. В этих координатах линейный элемент

$$ds^2 = b^{\alpha\beta}dv^\alpha dv^\beta + b_{33}(df)^2 \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

Так как $b_{33} = 1/(\Delta_1 f)$ — функция только от f, то, не нарушая общности, будем считать, что линейный элемент записывается в виде (1.8).

Докажем, что коэффициенты b_{11}, b_{12}, b_{22} не содержат v^1, v^2. По условию имеем

$$(2.4) \qquad b^{\alpha\beta}w_{\lambda\alpha}w_{\iota\beta} = \varepsilon_{\lambda\iota}, \quad e^{\alpha\beta}w_{\lambda\alpha}\frac{\partial w_{\iota\beta}}{\partial f} = \pi_{\lambda\iota}\delta \quad (\alpha, \beta, \lambda, \iota = 1, 2)$$

где $\| b^{\alpha\beta}\| = \| b_{\alpha\beta}\|^{-1}$ $(w_{\lambda1}, w_{\lambda2}, 0)$ — ковариантные компоненты вектора e_λ в полугеодезической системе координат $\{v^1, v^2, f\}$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 1$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0$, $e^{11} = e^{22} = 0$, $e^{21} = -e^{12} = 1$, $\delta^2 = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2$. Поскольку $w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21} \neq 0$, из уравнений (2.4) находим

$$(2.5) \qquad b_{11} = w_{12}^2 + w_{22}^2, \quad b_{12} = w_{11}w_{12} + w_{21}w_{22}, \quad b_{22} = w_{11}^2 + w_{21}^2$$

$$(2.6) \qquad \partial w_{\lambda\alpha}/\partial f = e^{\iota\beta}\pi_{\iota\lambda}w_{\beta\alpha} \quad (\lambda, \alpha = 1,2)$$

Таким образом, компоненты векторов e_1, e_2 удовлетворяют уравнениям (2.6) и условию

$$(2.7) \qquad w_{11} = 1, \; w_{12} = 0, \; w_{21} = 0, \; w_{22} = 1 \quad \text{при } f = f(p)$$

Но по теореме существования и единственности для дифференциальных уравнений решение системы (2.6) при начальном условии (2.7) — функции только f. Следовательно, коэффициенты (2.5) не зависят от координат v^1, v^2, что и утверждалось.

В качестве следствия получаем, что

$$(2.8) \qquad \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{rot} e_\lambda = 0 \quad (\lambda = 1, 2)$$

Эти соотношения имеют простой геометрический смысл. Если Γ — какая-нибудь гладкая кривая в двумерном римановом многообразии и $\tau(\tau_1, \tau_2)$ — единичный вектор ее касательной, то псевдоскаляр $\operatorname{rot}\tau = (\partial_1\tau_2 - \partial_2\tau_1)/\delta$ равен геодезической кривизне кривой [9]. Произвольная поверхность $f = c$ определяет риманово подмногообразие $V_2 = (x \in U$: $f(x) = c$, $ds^2 = b_{\alpha\beta}dv^\alpha dv^\beta$; $\alpha, \beta = 1, 2)$.

Соотношения (2.8) означают, что гладкие кривые на поверхности $f = c$, которые в каждой своей точке касаются одного из векторов e_1 или e_2, — геодезические линии подмногообразия V_2.

Циклические координаты метрики $ds^2 = a_{ij}dq^idq^j$ можно найти следующим способом. Рассмотрим соотношение

$$(2.9) \qquad \nu(\mu e_1 + e_2) = \operatorname{grad} Q(q^1, q^2, q^3)$$

Левая часть этого равенства является градиентом тогда и только тогда, когда [10] $(\mu e_1 + e_2)\operatorname{rot}(\mu e_1 + e_2) = 0$, т. е.

$$(2.10) \qquad \partial\mu/\partial f + \mu^2\pi_{11} + \mu(\pi_{21} + \pi_{12}) + \pi_{22} = 0$$

Коэффициенты полученного уравнения зависят только от f, поэтому его можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение типа Риккати, μ — неизвестная функция, f — независимая переменная.

Пусть $\mu_1(f) \neq \mu_2(f)$ — два любых частных решения уравнения (2.10). Каждому решению μ_k ($k = 1, 2$) соответствует некоторая функция $\nu_k(q^1, q^2, q^3) \neq 0$, при которой вихрь левой части (2.9) равен нулю. Умножив его скалярно на некомпланарные векторы $\mu_k e_1 + e_2$, e_1, $\operatorname{grad} f$, получим соответственно уравнение (2.10) и с учетом (2.8) уравнения

$$\partial\nu_k/\partial f - \nu_k(\mu_k\pi_{11} + \pi_{12}) = 0, \quad \operatorname{grad}\nu_k \cdot \operatorname{grad} f \times (\mu_k e_1 + e_2) = 0$$

Следовательно, $\nu_k = \nu_k(f)$. Независимые функции Q^k ($k = 1, 2$), полученные квадратурами уравнения (2.9) при $\mu = \mu_k$, $\nu = \nu_k$ и $Q^3 = f$, можно принять в качестве новых координат системы. В этих координатах

$$ds^2 = A_{11}(dQ^1)^2 + 2A_{12}dQ^1dQ^2 + A_{22}(dQ^2)^2 + (dQ^3)^2$$

$$A_{11} = \frac{(\mu_2)^2 + 1}{(\nu_1)^2(\mu_1 - \mu_2)^2}, \quad A_{12} = -\frac{\mu_1\mu_2 + 1}{\nu_1\nu_2(\mu_1 - \mu_2)^2}$$

$$A_{22} = \frac{(\mu_1)^2 + 1}{(\nu_2)^2(\mu_1 - \mu_2)^2}$$

Таким образом, коэффициенты однородной квадратичной части лагранжиана (1.1), отнесенного к координатам Q^1, Q^2, Q^3, не зависят от Q^1, Q^2.

По условию, для линейной части лагранжиана (1.1) $a_i q^{i\cdot} = B_i Q^{i\cdot}$ имеем

$$\frac{\partial B_1}{\partial Q^2} = \frac{\partial B_2}{\partial Q^1}, \quad \frac{\partial B_1}{\partial Q^3} = \frac{\partial B_3}{\partial Q^1} + R(Q^3)\Delta, \quad \frac{\partial B_2}{\partial Q^3} = \frac{\partial B_3}{\partial Q^2} + W(Q^3)\Delta \tag{2.11}$$

$$(R = \nu_2\omega(\mu_2 e_1 + e_2), \quad W = \nu_1\omega(\mu_1 e_1 + e_2), \quad \Delta^2 = \det\|A_{ij}\|)$$

Эти соотношения, рассматриваемые как уравнения относительно B_1, B_2, B_3, допускают частное решение вида $A_i = A_i(Q^3)$ ($i = 1, 2, 3$). Следовательно, $B_i = A_i + \partial_i\Phi(Q^1, Q^2, Q^3)$ ($i = 1, 2, 3$). Полагая $\Psi = -\Phi$, получим лагранжиан (1.3), в котором все коэффициенты — функции одной координаты Q^3. Теорема доказана.

Замечания 6°. Условия теоремы позволяют обнаружить наличие двух скрытых циклических координат в системе или доказать несуществование таких координат. Пусть, например, $da(p) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $U \ni p$ можно положить $f = a$. В необратимой системе при выполнении условия (2.2) (в противном случае, согласно утверждению 2 теоремы, система не имеет двух циклических координат) удобно взять

$$e_1 = \omega(a_{ij}\omega^i\omega^j)^{-1/2}$$

Если $H^2 - 4K_{\rm rel} \neq 0$ в точке $p \in X_3$, то в некоторой ее окрестности U в качестве e_1 и e_2 можно принять инварианты — единичные векторы касательных к линиям кривизны поверхностей семейства $\{a = c\}$.

7°. Пусть условия теоремы 2 нарушены: выражения (2.1) и $P = \omega\cdot\operatorname{grad} f$ — функции одной переменной f, но $P \neq 0$. Тогда лагранжиан системы приводим к виду с одной циклической координатой. Действительно, рассуждая так же, как при доказательстве утверждения 1 теоремы, получим вместо (2.11) систему уравнений

$$\frac{\partial B_1}{\partial Q^2} = \frac{\partial B_2}{\partial Q^1} + P(Q^3)\Delta, \quad \frac{\partial B_1}{\partial Q^3} = \frac{\partial B_3}{\partial Q^1} + R(Q^3)\Delta,$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial Q^3} = \frac{\partial B_3}{\partial Q^2} + W(Q^3)\Delta$$

Эти уравнения совместны только при $P\Delta \equiv \text{const}$, они допускают частное решение

$$A_1 = Q^2P\Delta + \int R\Delta\, dQ^3, \quad A_2 = \int W\Delta\, dQ^3, \quad A_3 = 0$$

Следовательно, $B_i = A_i + \partial_i \Phi$ (Q^1, Q^2, Q^3 ($i = 1, 2, 3$)). Полагая $\Psi = -\Phi$, получим лагранжиан (1.3), коэффициенты которого не зависят от Q^1.

В соответствии с замечанием 6° представляет интерес

Теорема 3. Пусть натуральная система обратима и в некоторой окрестности $U \ni p$ имеем $df \neq 0$ $(H^2 - 4K_{\text{rel}})(f) = 0$. Тогда

1) Для существования в системе одновременно двух циклических координат достаточно, чтобы, во-первых, выражения

(2.12) $\quad a, \ \Delta_1 f, \ \Delta_2 f$

были функциями от f и, во-вторых, абсолютная кривизна K_{abs} поверхности $f = f(p)$ равнялась нулю, т. е.

(2.13) $$\left[\frac{1}{2(\Delta_1 f)^2} e^{ijk} e^{lmr} \partial_i f \partial_l f \nabla_{jm} f \nabla_{kr} f\right]\Bigg|_{f=f(p)} = 0$$

2) Если $f(x)$ — скалярный инвариант системы, то оба условия необходимы для существования двух циклических координат.

Доказательство. Необходимость. Необходимость первого условия очевидна. Так как метрика подмногообразия $V_2 = (x \in U: f(x) = f(p);$ $ds^2|_{f=f(p)})$ является евклидовой, то абсолютная (гауссова) кривизна поверхности $f = f(p)$ равна нулю. Отметим, что выражение в квадратных скобках (2.13) для K_{abs} следует из символической формулы Машке [11].

Достаточность. В полугеодезических координатах v^1, v^2, f линейный элемент многообразия V_3 записывается в виде (1.8) (при условии, что $\Delta_1 f = 1$). Здесь $v^1 = \gamma^1$, $v^2 = \gamma^2$ — общие интегралы уравнений (2.3), γ^1, γ^2 — локальные координаты на поверхности $f = f(p)$. В силу условия (2.13) систему координат $\{\gamma^1, \gamma^2\}$ можно выбрать декартовой, тогда

(2.14) $\quad b_{11} = 1, \ b_{12} = 0, \ b_{22} = 1 \quad$ при $f = f(p)$

Условие $(H^2 - 4K_{\text{rel}})|_U = 0$ означает, что в каждой точке $x \in U$ главные кривизны поверхности $f = f(x)$ совпадают, т. е. x — омбилическая точка поверхности $f = f(x)$. По определению [3] в омбилической точке коэффициенты первой и второй основных квадратичных форм поверхности пропорциональны

(2.15) $\quad \Omega_{11}/b_{11} = \Omega_{12}/b_{12} = \Omega_{22}/b_{22}$

В полугеодезических координатах v^1, v^2, f имеем [3]

(2.16) $\quad \Omega_{\alpha\beta} = \partial_f b_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$

$$\Delta_2 f = \frac{b_{22}\partial_f b_{11} + b_{11}\partial_f b_{22} - 2b_{12}\partial_f b_{12}}{2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}$$

Из уравнений (2.15), (2.16) находим, что

(2.17) $\quad \partial b_{\alpha\beta}/\partial f = b_{\alpha\beta}\Delta_2 f \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$

Таким образом, коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ удовлетворяют системе (2.17) и начальному условию (2.14). Следовательно

$$b_{11} = b_{22} = \exp\left(\int\limits_{f(p)}^{f} \Delta_2 f \, df\right), \quad b_{12} = \exp\left(\int\limits_{f(p)}^{f} \Delta_2 f \, df\right) - 1$$

Теорема доказана.

Замечание 8°. Если натуральная система обратима, $f(x)$ — некоторая функция, такая, что $df \neq 0$ и $(H^2 - 4K_{\text{rel}})(f) = 0$ в окрестности $U \ni p$, дифференциальные параметры $\Delta_1 f$, $\Delta_2 f$, K_{abs} — функции от f, но $K_{\text{abs}}|_{f=f(p)} \neq 0$, то лагранжиан системы приводим к виду с одной циклической координатой.

Действительно, в этом случае абсолютная кривизна поверхности $f = f(p)$ постоянна, поэтому [3, 4] существуют координаты γ^1, γ^2, в которых

$$ds^2|_{f=f(p)} = G(\gamma^2)\ (d\gamma^1)^2 + (d\gamma^2)^2$$

Решение уравнений (2.17) с начальным условием $b_{11} = G(\gamma^2)$, $b_{12} = 0$, $b_{22} = 1$ при $f = f(p)$ имеет вид $b_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}(\gamma^2, f) = b_{\alpha\beta}(v^2, f)$, т. е. v^1 — циклическая координата.

3. Учитывая замечания 7° и 8°, рассмотрим случай, когда среди инвариантов (2.1), f, $\omega\cdot\text{grad}\ f$ или (2.12), f, K_{abs} имеются два функционально независимых.

Теорема 4. 1) Пусть на множестве U определены некоторые функции φ_1, φ_2, дифференциалы которых независимы во всех точках. Если выражения

(3.1) $$\Delta_1\varphi_\alpha,\ \nabla(\varphi_1, \varphi_2),\ \text{grad}\ \varphi_\alpha\cdot\text{rot}\ \tau,\ \tau\cdot\text{rot}\ \tau$$

(3.2) $$\omega\cdot\text{grad}\ \varphi_\alpha,\quad \omega\tau\quad (\nabla(\varphi_1, \varphi_2) = a^{ij}\partial_i\varphi_1\partial_j\varphi_2,\quad \tau = \text{grad}\ \varphi_1 \times \times\ \text{grad}\ \varphi_2;\ \alpha = 1,2)$$

и a — функции только φ_1 и φ_2, то в окрестности $U \ni p$ можно выбрать координаты системы, одна из которых будет циклической.

2) Если в системе существует не более одной циклической координаты, то условиям 1 удовлетворяет любая пара функционально взаимно независимых скалярных инвариантов φ_1, φ_2 лагранжиана (1.1).

Доказательство. Необходимость. Из определения п. 1 следует, что любой скалярный инвариант лагранжиана (1.1) является функцией позиционных координат. Поэтому должны выполняться условия теоремы, так как инварианты φ_1, φ_2 независимы.

Достаточность. Покажем, что существуют функции $f(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0$ и $h(\varphi_1, \varphi_2)$, такие, что

(3.3) $$\lambda f = \text{grad}\ Q\ (q^1, q^2, q^3)$$
$$(\lambda = h\varkappa + \tau,\ \varkappa = e^{\alpha\beta}\,\nabla(\varphi_1, \varphi_\beta)\cdot\text{grad}\ \varphi_\alpha;\ \alpha, \beta = 1, 2)$$

Вместо координат q^1, q^2, q^3 возьмем координаты ψ, φ_1, φ_2, где $\psi(q^1, q^2, q^3)$ удовлетворяет в U условию

$$\frac{D(\psi, \varphi_1, \varphi_2)}{D(q^1, q^2, q^3)} \neq 0$$

Левая часть (3.3) является градиентом тогда и только тогда, когда [10] $\lambda\ \text{rot}\ \lambda = 0$, т. е.

$$\frac{\partial h}{\partial\psi}\,\tau\cdot(\text{grad}\,\psi \times \varkappa) + he^{\alpha\beta}\nabla(\varphi_1, \varphi_\beta)\,\text{grad}\,\varphi_\alpha\cdot\text{rot}\,\tau +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\,[h\nabla(\varphi_1, \varphi_i)]\,(\Delta_1\varphi_1\Delta_1\varphi_2 - [\nabla(\varphi_1, \varphi_2)]^2) + \tau\cdot\text{rot}\,\tau = 0$$
$$(\alpha, \beta, i = 1, 2)$$

Так как выражения (3.1) — функции от φ_1, φ_2, то полученное уравнение допускает решение вида $h = h(\varphi_1, \varphi_2)$. Этому решению соответствует функция $f(\varphi_1, \varphi_2, \psi) \neq 0$, при которой вихрь левой части (3.3) равен нулю

$$\operatorname{grad} f \times \lambda + f \operatorname{rot} \lambda = 0 \tag{3.4}$$

Здесь

$$\operatorname{rot} \lambda = \tau \frac{\partial}{\partial \varphi_i} [h \nabla (\varphi_1, \varphi_\tau)] + \operatorname{rot} \tau \qquad (i = 1, 2)$$

Для данных функций h, f равенство (3.3) определяет некоторую функцию Q. Далее предполагаем, что $\psi = Q$.

Линейный элемент многообразия V_3, отнесенного к координатам $Q^1 = \psi$, $Q^2 = \varphi_1$, $Q^3 = \varphi_2$, равен

$$ds^2 = A_{ij} dQ^i dQ^j, \quad \| A_{ij} \| = \| A^{ij} \|^{-1} \tag{3.5}$$

$$A^{11} = f^2 \, (h^2 \Delta_1 \varphi_1 + 1) \, (\Delta_1 \varphi_1 \Delta_1 \varphi_2 - [\nabla(\varphi_1, \varphi_2)]^2), \quad A^{12} = 0$$

$$A^{13} = fh \, (\Delta_1 \varphi_1 \Delta_1 \varphi_2 - [\nabla(\varphi_1, \varphi_2)]^2), \quad A^{22} = \Delta_1 \varphi_1, \quad A^{23} = \nabla(\varphi_1, \varphi_2), \quad A^{33} = \Delta_1 \varphi_2$$

Следовательно, определитель квадратичной формы (3.5) имеет вид $\Delta^2 = M(\varphi_1, \varphi_2) f^{-2}$.

Векторное уравнение (3.4) запишется в равносильной форме, если его умножить скалярно на некомпланарные векторы $\operatorname{grad} \varphi_1$, $\operatorname{grad} \varphi_2$, λ. Получим систему двух уравнений, третье уравнение удовлетворится тождественно в силу выбора функции h. Эта система

$$\frac{1}{f\Delta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} + f \operatorname{grad} \varphi_1 \cdot \operatorname{rot} \tau = 0, \qquad \frac{1}{f\Delta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} - f \operatorname{grad} \varphi_2 \cdot \operatorname{rot} \tau = 0$$

совместна и, очевидно, допускает ненулевое решение вида $f(\varphi_1, \varphi_2)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим компоненты вектора $\omega = \operatorname{rot} b$ в системе координат $\{Q^1, Q^2, Q^3\}$:

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial B_3}{\partial Q^2} - \frac{\partial B_2}{\partial Q^3}\right) = \omega \, (h e^{\alpha\beta} \nabla (\varphi_1, \varphi_\beta) \operatorname{grad} \varphi_\alpha + \tau) f \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial B_1}{\partial Q^3} - \frac{\partial B_3}{\partial Q^1}\right) = \omega \cdot \operatorname{grad} \varphi_1$$

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial B_2}{\partial Q^1} - \frac{\partial B_1}{\partial Q^2}\right) = \omega \cdot \operatorname{grad} \varphi_2, \qquad B_i Q^{i\cdot} = a_i q^{i\cdot}$$

Из формул (3.6) выводим

$$\partial / \partial \varphi_i \, (\Delta \omega \cdot \operatorname{grad} \varphi_i) = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{3.7}$$

Поскольку функции (3.2) зависят только от φ_1, φ_2 и выполняется условие (3.7), равенства (3.6), рассматриваемые как система уравнений относительно B_1, B_2, B_3, допускают, очевидно, частное решение вида $A_i = A_i(Q^2, Q^3)$ $(i = 1, 2, 3)$. Следовательно, $B_i = A_i + \partial_i \Phi \, (Q^1, Q^2, Q^3)$ $(i = 1, 2, 3)$. Положив $\Psi = -\Phi$, получим лагранжиан (1.3) с циклической координатой Q^1. Теорема доказана.

4. Если консервативная натуральная система обладает инвариантом $v(q^1, q^2, q^3)$, для которого в достаточно малой окрестности $U \ni p$ выполнено условие $dv \neq 0$, то предыдущие результаты позволяют конструктивно решить вопрос о существовании в U скрытых циклических координат системы. Простейшим скалярным инвариантом лагранжиана (1.1) яв-

ляется функция $v = a$. Непрерывная дифференцируемость функции a гарантирует существование указанной окрестности, когда $da(p) \neq 0$.

Если p — критическая точка функции a, то возможны два случая в зависимости о того, выполняется или нет следующее условие: существует окрестность U, в которой $a(V) \neq \text{const}$ для любого открытого подмножества $V \subset U$.

Первый случай не представляет трудностей для исследования. Отметим утверждение, справедливое при произвольном $n \geqslant 2$: если решение уравнения $a = a(p)$ не является подмногообразием в U, то ни в какой окрестности точки p нельзя ввести систему координат с $(n-1)$-циклической координатой (иначе уравнение $a = a(p)$ определяло бы координатную поверхность, т. е. подмногообразие в U).

Во втором случае можно воспользоваться полученными результатами, если вместо a найден какой-нибудь другой скалярный инвариант β лагранжиана (1.1), такой, что $d\beta(p) \neq 0$. Тогда в формулировке утверждения 1 теоремы 2 следует положить $f = \beta$. Скалярными инвариантами лагранжиана (1.1) являются скалярные инварианты векторного поля $\omega = \text{rot}\, b$, гауссовы инварианты многообразия V_3. Полезно иметь в виду, что в работах [12, 13] приведен явный вид гауссовых инвариантов второго и третьего порядков для дифференциальной квадратичной формы с тремя независимыми переменными.

Второй из указанных случаев имеет место, например, когда лагранжиан

$$L = {}^1/_2\, a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + a_i\dot{q}^i \tag{4.1}$$

В системе с лагранжианом (4.1) все три координаты могут быть циклическими. Из критерия существования евклидовой метрики [3] вытекает следующая

Теорема 5. Для существования в системе с лагранжианом (4.1) одновременно трех циклических координат необходимо и достаточно, чтобы $\omega = 0$ и шесть существенных компонент тензора кривизны многообразия V_3 равнялись нулю.

5. Задача определения циклических координат консервативной натуральной системы эквивалентна также задаче определения некоторых частных интегралов системы. Рассмотрим натуральное семейство траекторий системы [14], т. е. ∞^{2n-1} семейство решений уравнений Лагранжа, отвечающих одному общему значению постоянной h интеграла энергии. Интеграл

$$f_i(q^1, \ldots, q^n, h)\,\dot{q}^i + f(q^1, \ldots, q^n, h) = \text{const} \tag{5.1}$$

этого семейства называется [2] условным линейным интегралом уравнений Лагранжа, его коэффициенты могут содержать h в качестве параметра. Наряду с данной системой, которая имеет лагранжиан (1.1), введем вспомогательную систему с конфигурационным многообразием $X_n^* = \{x \in X_n : h + a > 0\}$ и с лагранжианом

$$L^* = {}^1/_2(h + a)\, a_{ij}\frac{dq^i}{d\tau}\frac{dq^j}{d\tau} + a_i\frac{dq^i}{d\tau} \tag{5.2}$$

h — параметр, τ — независимая переменная.

Справедлива

Теорема 6. Если соотношение (5.1) выражает условный интеграл заданной системы, отвечающий значению h постоянной интеграла энергии, то соотношение

$$(5.3) \qquad (h+a) f_i \frac{dq^i}{d\tau} + f = \mathrm{const}$$

является общим интегралом вспомогательной системы.

Доказательство. Положим $d\tau = (h + a)\, dt$, выражение (5.1) перейдет в (5.3), уравнения Лагранжа заданной системы примут вид

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L^*}{\partial q^{j'}} - \frac{\partial L^*}{\partial q^j} + \left(\frac{1}{2} a_{ik} q^{i'} q^{k'} - \frac{1}{h+a}\right)\frac{\partial a}{\partial q^j} = 0$$

$$(j = 1, \ldots, n) \qquad \left(q' = \frac{dq}{d\tau}\right)$$

Следовательно, натуральное семейство траекторий с постоянной h является семейством интегральных кривых уравнений

$$(5.4) \qquad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L^*}{\partial q^{j'}} - \frac{\partial L^*}{\partial q^j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$(5.5) \qquad {}^1/_2\, (h + a)\, a_{ik} q^{i'} q^{k'} = 1$$

Продифференцировав интеграл (5.3) по τ в силу уравнений (5.4), получим

$$(5.6) \qquad {}^1/_2\, (\nabla_i \eta_k + \nabla_k \eta_i)\, q^{i'} q^{k'} + [\partial_k \eta + \eta^i (\nabla_i a_k - \nabla_k a_i)] q^{k'} = 0$$

где $\eta_i = (h + a) f_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\eta = f$ — ковариантные производные вычислены относительно метрики риманового многообразия $V_n^* = (X_n^*, dl^2 = (h + a)\, a_{ij} dq^i dq^j)$. Равенство (5.6) должно выполняться для всевозможных значений величин $q^{1'}, \ldots, q^{n'}$, которые удовлетворяют соотношению (5.5). Если $q^{1'}, \ldots, q^{n'}$, представляют такую совокупность значений, то величины $-q^{1'}, \ldots, -q^{n'}$ тоже удовлетворяют (5.5). Поэтому квадратичная и линейная части (5.6) по отдельности должны быть равны нулю. Отсюда известными рассуждениями находим, что

$$\nabla_i \eta_k + \nabla_k \eta_i = 0, \; \partial_k \eta_i + \eta^i (\nabla_i a_k - \nabla_k a_i) = 0 \, (i, k = 1, \ldots, n)$$

Но эти же равенства вытекают из (5.6), когда величины $q^{j'}$ не связаны никакими зависимостями. Теорема доказана.

Замечание 9°. В качестве следствия выводим, что если система с лагранжианом (1.1) допускает условный линейный интеграл, соответствующий некоторому значению h постоянной энергии, то существует преобразование координат и функция Ψ $(q^1, \ldots, q^n)$, такие, что преобразованный лагранжиан $L^* + \Psi'$ имеет по крайней мере одну циклическую координату. Для систем с двумя степенями свободы это утверждение впервые доказал Биркгоф Дж. Д. [2, 15] при помощи изотермических координат, а необходимые и достаточные условия существования условного линейного интеграла получены в работе [16]. Чтобы получить аналогичные условия для систем с тремя степенями свободы, следует воспользоваться указаниями п. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
2. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.— Л.: Гостехиздат, 1941, 320 с.
3. *Bianchi L.* Lezioni di geometria differenziale. V. 1—2. Pisa: Spoerri, 1902.
4. *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Pt. 3. Paris: Gauthier-Villar, 1894, 512 p.
5. *Ricci G., Levi-Civita T.* Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.— Math. Ann., 1901, B. 54, S. 128—201, 608.
6. *Synge J. L.* On the geometry of dynamics.— Philos Trans. Roy. Soc. London, 1926, A226, No. 637, p. 31—106.
7. *Сумбатов А. С.* К проблеме поиска циклических координат в консервативных динамических системах.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 43—51.
8. *Сумбатов А. С.* О циклических координатах консервативных динамических систем с двумя степенями свободы.— В кн.: Теория устойчивости и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1979, с. 214—221.
9. *Норден А. П.* Теория поверхностей. М.: Гостехиздат, 1956. 260 с.
10. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 2. Ч. 2. М.— Л.: Гостехиздат, 1933. 287 с.
11. *Maschke H.* The Kronecker-Gaussian curvature of huperspace.— Trans. Amer. Math. Soc., 1906, v. 7, No. 1, p. 81—93.
12. *Суворов Ф. М.* О характеристиках систем трех измерений. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1871. 114 с.
13. *Петров П. И.* Скалярные дифференциальные инварианты третьего порядка риманова пространства трех измерений.— Acta math. Acad. sci. hung., 1960, v. 11, No. 3—4, p. 205—211.
14. *Painlevé P.* Mémoire sur la transformation des équations de la dynamique.— J. Math. Pures et Appl. Ser. 4, 1894, t. 10, p. 5—92.
15. *Birkhoff G. D.* Dynamical systems with two degrees of freedom.— Trans. Amer. Math. Soc., 1917, v. 18, № 2, p. 199—300.
16. *Сумбатов А. С.* Решение одной задачи Биркгофа.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 1136—1141.

Москва

Поступила в редакцию
29.II.1980