Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 5, 1981

УДК 531.36

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ УСРЕДНЕНИЯ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Акуленко Л. Д.

Рассматривается вопрос о существовании решения задачи Коши для стандартной по Н. Н. Боголюбову системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1—3], описывающей широкий класс нелинейных процессов колебаний и вращений. Методом последовательных приближений [4, 5] устанавливаются конструктивные достаточные условия существования и единственности этого решения на асимптотически большом интервале времени. Исследуются свойства гладкости нестационарного процесса по параметрам задачи (начальным данным).

1. Постановка задачи и исходные предположения. Рассматривается стандартная система обыкновенных дифференциальных уравнений на асимптотически большом интервале времени с заданными начальными условиями [1—3]

(1.1) $$x^{\cdot} = \varepsilon X(t, x),\ x(t_0) = x^\circ,\ t \in [t_0, T],\ T = \Theta\varepsilon^{-1}$$

Здесь x, X — векторы произвольной размерности $n \geqslant 1$, t_0, x°, Θ — заданные постоянные величины, $\varepsilon > 0$ — малый числовой параметр, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Относительно вектор-функции X предполагаются выполненными следующие требования.

1) Она определена для всех $t \geqslant t_0$ и $x \in D_x$, где $D_x \subset E^n$ — открытое связное множество, 2π-периодична и кусочно-непрерывна по t.

2) Функция X обладает непрерывной производной по $x \in D_x$, удовлетворяющей условию Липшица в указанной области.

3) Для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $x^\circ \in D_{x^\circ} \subset D_x$ существует единственное решение задачи Коши (1.1) (далее это будет доказано)

(1.2) $$x = x(t, t_0, x^\circ, \varepsilon),\quad t \in [t_0, T]$$

принадлежащее открытой области D_x.

4) Задача Коши для усредненной системы (1.1)

(1.3) $$d\xi / d\tau = X_0(\xi),\ \xi(0) = x^0,\ \varepsilon t = \tau \in [\tau_0, \Theta]$$

где X_0 — среднее функции X по t на периоде 2π, τ — медленное время, допускает в указанной области общее решение

(1.4) $$\xi = \xi(\tau - \tau_0, x^\circ),\ \xi \in D_x,\ x^\circ \in D_{x^\circ}$$

Это решение предполагается далее известным.

Имеется большое число исследований (см. [1—3] и библиографию к [3]), устанавливающих свойство близости, в частности ε-близости, между неизвестным решением

(1.2) исходной задачи Коши (1.1) и решением (1.4) усредненной системы (1.3) при тех же начальных условиях. Усредненная система автономна и позволяет исключить параметр ε; ее решение обычно исследуется или может быть построено существенно проще, чем исходной полной системы. Определение искомого общего решения (1.2) с более высокой степенью точности по ε на рассматриваемом асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-1}$ затруднено, так как построения метода усреднения, связанные с заменой переменных, приводят к решению возмущенной системы уравнений в частных производных. Последнее обстоятельство требует соответствующей высокой гладкости функции X по $x \in D_x$.

В работе рассматривается задача существования и единственности общего решения (1.2) системы (1.1) при выполнении предположений 1), 2), 4). Развивается конструктивный алгоритм построения этого решения и исследуются его свойства по отношению к изменению параметров задачи.

2. Упрощение исходной задачи Коши. Совершим в системе (1.1) ряд замен неизвестной переменной x. Аналогично [1—3] введем погрешность метода усреднения δ

$$\delta = x - \xi_*, \ \xi_*(t, \varepsilon) = \xi(\tau) + \varepsilon u(t, \varepsilon) \tag{2.1}$$

$$u(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^{t} [X(s, \xi(\sigma)) - X_0(\xi(\sigma))]\, ds, \quad \sigma = \varepsilon s$$

Здесь функция u равномерно ограничена по t, ε; зависимость u, ξ от t_0, x^0 в (2.1) для сокращения записи не указывается. Для неизвестной δ получим задачу Коши

$$\delta^{\cdot} = \varepsilon X'(t, \xi)\,\delta + \varepsilon \Phi(t, \delta, \varepsilon), \ \delta(t_0) = 0 \tag{2.2}$$

$$\Phi = [X(t, \xi_*) - X(t, \xi)] + [X(t, \xi_* + \delta) - X(t, \xi_*) - X'(t, \xi), \delta] \tag{2.3}$$

Здесь Φ — известная функция t, δ, ε. В области $(\xi_* + \delta) \in D_x$, как следует из (2.3), для Φ справедлива оценка

$$|\Phi| \leqslant c_\Phi(\varepsilon + \varepsilon|\delta| + \delta^2), \ c_\Phi = \mathrm{const} \tag{2.4}$$

$$|\Phi(t, \delta_1, \varepsilon) - \Phi(t, \delta_2, \varepsilon)| \leqslant \lambda_\Phi |\delta_1 - \delta_2| (|\delta_1| + |\delta_2| + \varepsilon), \ \lambda_\Phi = \mathrm{const}$$

Совершим линейное преобразование вектора δ, близкое к тождественному [6]

$$\delta = (I + \varepsilon U) z, \quad U(t, \varepsilon) \equiv \int_{t_0}^{t} [X'(s, \xi(\sigma)) - X_0'(\xi(\sigma))]\, ds \tag{2.5}$$

Здесь I — единичная матрица, U — равномерно ограниченная матричная функция, аналогичная u из (2.1); штрих означает производную по вектору x. Дифференцируя подстановку (2.5) в силу системы (2.2), для неизвестной z получим задачу Коши

$$z^{\cdot} = \varepsilon X_0'(\xi) z + \varepsilon F(t, z, \varepsilon), \ z(t_0) = 0 \tag{2.6}$$

$$F \equiv (I + \varepsilon U)^{-1} \{[X(t, \xi_*) - X(t, \xi)] - \varepsilon U X_0'(\xi) z + \varepsilon X'(t, \xi) U z + [X(t, \xi_* + (I + \varepsilon U) z) - X(t, \xi_*) - X'(t, \xi_* - \varepsilon u) z]\} \tag{2.7}$$

Здесь F — известная функция t, z, ε; для нее согласно (2.7) при $[\xi_* + (I + \varepsilon U) z] \in D_x$ на основе предположения 2) п. 1 справедлива оценка типа (2.4) и выполняется условие Липшица

$$
(2.8) \qquad | F | \leqslant c_F (\varepsilon + \varepsilon | z | + z^2), \quad c_F = \mathrm{const}
$$

$$
| F (t, z_1, \varepsilon) - F (t, z_2, \varepsilon) | \leqslant \lambda_F | z_1 - z_2 | (| z_1 | + | z_2 | + \varepsilon), \quad \lambda_F = \mathrm{const}
$$

При помощи оценки (2.8) возмущение может быть сделано величиной порядка ε^2. Действительно, функцию F можно представить в виде

$$
(2.9) \qquad F (t, z, \varepsilon) = \varepsilon F_\varepsilon (t, \varepsilon) + \varepsilon F_{\varepsilon z} (t, z, \varepsilon) z + F_{z^2} (t, z, \varepsilon) z^2
$$

где F_ε, $F_{\varepsilon z}$, F_{z^2} — равномерно ограниченные функции. Отметим, что при $F \equiv 0$ (2.6) есть система в вариациях для (1.3). Учитывая перечисленные свойства, совершим в системе (2.6) замену искомой переменной z

$$
(2.10) \qquad z = \varepsilon Z (r + \varphi), \quad Z (\tau) \equiv \partial \xi / \partial x^\circ, \quad \varphi (t, \varepsilon) \equiv \int_{t_0}^{t} Z^{-1} (\sigma) F (s, 0, \varepsilon) ds
$$

Здесь Z — фундаментальная матрица для указанной системы в вариациях, φ — известная равномерно ограниченная функция, а r — неизвестная переменная. Интеграл в (2.10) равномерно ограничен на основе (2.8), (2.9). В результате для искомого вектора r получаем задачу Коши

$$
(2.11) \qquad r^\cdot = \varepsilon R (t, r, \varepsilon), \quad r (t_0) = 0
$$

Функция R равномерно ограничена и удовлетворяет условию Липшица

$$
(2.12) \qquad | R | \leqslant \varepsilon c_R, \quad c_R = \mathrm{const}
$$

$$
| R (t, r_1, \varepsilon) - R (t, r_2, \varepsilon) | \leqslant \varepsilon \lambda_R | r_1 - r_2 |, \quad \lambda_R = \mathrm{const}
$$

Для построения решения задачи Коши (2.11) на асимптотически большом интервале времени $t \in [t_0, T]$, $T = \Theta \varepsilon^{-1}$ применим рекуррентную процедуру метода последовательных приближений (метода Пикара) по степеням ε [4, 5].

3. Построение точного решения. Искомую функцию r будем строить при помощи рекуррентной схемы метода Пикара [7]

$$
(3.1) \qquad r_{j+1} (t, \varepsilon) = \varepsilon \int_{t_0}^{t} R (s, r_j (s, \varepsilon) \varepsilon) ds, \quad r_0 \equiv 0, \quad j = 0, 1, \ldots
$$

Отметим, что переменная r зависит также от параметров t_0, x°, однако эта зависимость для сокращения записи не указывается. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ последовательные приближения (3.1) равномерно сходятся к единственному решению задачи Коши (2.11) на асимптотически большом интервале $t \in [t_0, T]$.

Докажем, что любое j_*-е приближение ограничено величиной εM, где $M > 0$ — некоторая определяемая ниже постоянная. Действительно, представим r_{j_*} в виде суммы

$$
(3.2) \qquad r_{j_*} = r_0 + (r_1 - r_0) + (r_2 - r_1) + \ldots + (r_{j_*} - r_{j_*-1})
$$

Воспользуемся (2.12) и оценкой

$$|r_1| \leqslant \varepsilon N, \quad N = \max_t |Z^{-1}[F(t, \varepsilon Z\varphi, \varepsilon) - F(t, 0, \varepsilon)]| \Theta\varepsilon^{-2}$$

Мажорируя сумму (3.2), получим для $t \in [t_0, \Theta\varepsilon^{-1}]$ при значениях $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 < \lambda_R/\Theta$

(3.3) $$|r_{j_*}| \leqslant \sum_{j=1}^{j_*} |r_j - r_{j-1}| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |r_j - r_{j-1}| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon N \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} (\varepsilon\lambda_R\Theta)^j\right] = \frac{\varepsilon N}{1 - \varepsilon\lambda_R\Theta} \leqslant \varepsilon M$$

Из (3.1), (3.3) следует также, что последовательные приближения равномерно сходятся при $\varepsilon < 1 / \lambda_R\Theta$ к непрерывно дифференцируемой функции r_*

(3.4) $$\lim_{j\to\infty} r_j = r_*(t, \varepsilon), \quad \lim_{j\to\infty} r_j^{\boldsymbol\cdot} = r_*^{\boldsymbol\cdot}(t, \varepsilon)$$

Покажем, что предельная функция $r_*(t, \varepsilon)$ из (3.4) является решением задачи Коши (2.11). Это утверждение следует из того факта, что решение $\rho(t, \varepsilon)$ системы

$$\rho^{\boldsymbol\cdot} = \varepsilon R(t, r_*(t, \varepsilon), \varepsilon), \; \rho(t_0) = 0, \; t \in [t_0, T]$$

совпадает с $r_*(t, \varepsilon)$.

Наконец, построенное решение $r_*(t, \varepsilon)$ единственно, что доказывается методом от противного. Пусть ρ_1, ρ_2 — какие-либо два решения задачи Коши (2.11); тогда из тождеств

$$\rho_i(t, \varepsilon) \equiv \varepsilon \int_{t_0}^{t} R(s, \rho_i(s, \varepsilon), \varepsilon)\, ds, \quad i = 1, 2$$

и из (2.12) следует неравенство

$$\max_t |\rho_1 - \rho_2| \leqslant \varepsilon\lambda_R\Theta \max_t |\rho_1 - \rho_2|, \quad \varepsilon\lambda_R\Theta < 1$$

возможное лишь при $\rho_1 \equiv \rho_2$ для всех $t \in [t_0, T]$. Теорема доказана.

Таким образом, подставляя построенную функцию $r_*(t, \varepsilon)$ в (2.10), а затем известную $z(t, \varepsilon)$ в выражение (2.5) для δ и, наконец, известную функцию $\delta(t, \varepsilon)$ в (2.1), получим искомое точное решение задачи Коши (1.1) в виде (η — равномерно ограниченная функция)

(3.5) $$x(t, t_0, x^\circ, \varepsilon) = \xi(\tau - \tau_0, x^\circ) + \varepsilon\eta(t, t_0, x^\circ, \varepsilon)$$
$$\eta \equiv u + (I + \varepsilon U) Z (r_* + \varphi)$$

4. Замечания. 1°. Исходная система уравнений (1.1) при помощи замены

(4.1) $$x = \xi^* + \delta, \; \xi^*(t, \tau, \varepsilon) = \xi(\tau) + \varepsilon v(t, \xi, (\tau))$$

$$v = v(t, \xi) = \int_{t_0}^{t} [X(s, \xi) - X_0(\xi)]\, ds$$

где v и ξ^* — 2π-периодические функции явно входящего аргумента t, приводится к виду (2.2) с другой функцией $\Phi = \Phi^*(t, \tau, \delta, \varepsilon)$. Эта функция 2π-периодична по t и в рассматриваемой области удовлетворяет по ε, δ равномерной оценке (2.4), так как

(4.2) $$\Phi \equiv X(t, \xi^* + \delta) - X(t, \xi) - X'(t, \xi)\,\delta - \varepsilon^2 V' X_0(\xi)$$

Здесь предполагается двукратная дифференцируемость X по x. При помощи линейного преобразования неизвестной δ, близкого к тождественному, получим систему типа (2.6):

$$y^{\cdot} = \varepsilon X_0' (\xi) y + \varepsilon G (t, \tau, y, \varepsilon), \quad y (t_0) = 0 \tag{4.3}$$
$$\delta = [I + \varepsilon V (t, \xi)] y, \quad V (t, \xi) \equiv \partial v / \partial \xi, \quad \xi = \xi (\tau)$$
$$G \equiv (I + \varepsilon V)^{-1} [\Phi + \varepsilon X' (t, \xi) Vy - \varepsilon V' X_0 y - \varepsilon V X_0' y]$$

Здесь функция G — 2π-периодична по явно входящему аргументу t. Очевидно, для G справедлива по ε, y оценка типа (2.8) и она может быть представлена в виде (2.9).

К системе (4.3) применима схема последовательных приближений по степеням ε, аналогичная развитой в п. 3. В качестве первого приближения решения, обращающегося в нуль при $\varepsilon = 0$ для всех $t \in [t_0, T]$, возьмем функцию

$$y_0 = \varepsilon \varphi (t, \varepsilon) \equiv \varepsilon Z (\tau) \int_{t_0}^{t} Z^{-1} (\sigma) G (s, \sigma, 0, \varepsilon) ds, \quad \sigma = \varepsilon s \tag{4.4}$$

где φ — равномерно ограниченная функция на указанном интервале. Рекуррентная схема метода Пикара позволяет построить квадратурами искомое решение $y (t, \varepsilon)$ с любой наперед заданной степенью точности по ε:

$$y_{j+1} (t, \varepsilon) = \varepsilon Z (\tau) \int_{t_0}^{t} Z^{-1} (\sigma) G (s, \sigma, y_j (s, \varepsilon), \varepsilon) ds, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{4.5}$$

Последовательные приближения (4.4), (4.5) равномерно сходятся при $\varepsilon > 0$ достаточно малом к единственному решению задачи Коши (4.3). Таким способом вновь построено искомое точное решение вида (4.1) задачи Коши (1.1). Изложенный выше подход может быть более удобным при аналитическом построении функций v и V, а также Φ и G, например в виде рядов Фурье по t. Однако, как следует из (4.2), он требует несколько более высоких свойств гладкости функции X относительно $x \in D_x$.

2°. При помощи подхода [7] можно установить непрерывную дифференцируемость решения (3.5) по начальным данным t_0, x°. Сперва устанавливается равномерная непрерывность предельной функции $r (t, \varepsilon, \mu)$, а вместе с нею и решения x исходной системы (1.1) по некоторому параметру μ, $\mu \in D_\mu$, если функция X зависит от μ непрерывно. Это утверждение следует из равномерной сходимости последовательности (3.4), получаемой по методу Пикара (3.1). На основе факта равномерной непрерывности затем доказывается возможность предельного перехода при $\Delta \to 0$ в матричном дифференциальном уравнении

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x_\Delta - x}{\Delta} \right) = \varepsilon A (t, \Delta) \frac{x_\Delta - x}{\Delta} \tag{4.6}$$

Здесь x_Δ — решение системы (1.1) при начальном условии $x_\Delta (t_0) = x^\circ + \Delta$. Матрица A, непрерывно зависящая от параметра Δ, получается на основании теоремы о конечном приращении. В результате предельных переходов в (4.6) для матрицы P частных производных решений x по начальным данным x° ($P = \partial x / \partial x^\circ$) получается линейное матричное уравнение

$$P^{\cdot} = \varepsilon X' (t, x (t, \varepsilon)) P, \quad P (t_0) = I \tag{4.7}$$

Здесь I — единичная матрица. Для каждого i-го столбца p_i матрицы P получается система в вариациях [4] с соответствующими начальными условиями

$$p_i^{\cdot} = \varepsilon X' (t, x) p_i, \quad p_{ii} (t_0) = 1, \quad p_{ik} (t_0) = 0 \ (k \neq i) \tag{4.8}$$

Аналогичное (4.8) уравнение получается для вектора производной решения по t_0; начальное значение равно [7] — $\varepsilon X (t_0, x^\circ)$.

Будем искать решение задачи Коши (4.7) в виде

$$P = (I + \varepsilon U_*) W, \quad U_* (t, \varepsilon) = \int_{t_0}^{t} [X' (s, x (s, \varepsilon)) - X_0' (\xi (\sigma))] ds \tag{4.9}$$

Здесь W — неизвестная, а U_* — равномерно ограниченная для $t \in [t_0, T]$ матрицы. Дифференцируя подстановку (4.9), в силу системы (4.7) получим

$$(I + \varepsilon U_*)W^{\cdot} = \varepsilon X_0'W + \varepsilon^2 X'U_*W, \quad W(t_0) = I \tag{4.10}$$

Представим искомую матрицу W в виде ряда с неизвестными матричными коэффициентами C_j ($j = 1, 2, \ldots$):

$$W = Z(I + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \ldots), \quad C_j(t_0) = 0 \tag{4.11}$$

Подставляя это выражение в (4.10), получим рекуррентные соотношения для равномерно ограниченных коэффициентов $C_j(t, \varepsilon)$:

$$C_{j+1} = \int_{t_0}^{t} Z^{-1}[\varepsilon(X'U_* - X_0')ZC_j - U_*ZC_j^{\cdot}]\,ds \tag{4.12}$$

$$C_1 = \varepsilon \int_{t_0}^{t} Z^{-1}[X'(s, \xi, (\sigma))\,U_*(s, \varepsilon) - X_0'(\xi(\sigma))]\,Z\,ds, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Ряд (4.11) равномерно сходится при $\varepsilon > 0$ достаточно малом к единственному решению системы (4.10) для всех $t \in [t_0, T]$. Тем самым определена согласно (4.9) матрица P, характеризующая «чувствительность» решения $x(t, t_0, x^\circ, \varepsilon)$ (3.5) по отношению к изменениям начальных данных.

Аналогичным образом определяется «матрица чувствительности» K решения $x(t, t_0, x^\circ, \varepsilon, \mu)$ в общем случае системы вида

$$x^{\cdot} = \varepsilon X(t, x, \mu), \; x(t_0) = x^\circ, \; t_0 = t_0(\mu), \; x^\circ = x^\circ(\mu), \; \mu \in D_\mu$$

по отношению к вектору параметров μ произвольной размерности m, который может включать начальные данные. Для этого при помощи изложенного выше приема может быть решена задача Коши для матричного уравнения с начальными условиями, получаемыми дифференцированием функций $x^\circ(\mu)$, $t_0(\mu)$ по μ:

$$K^{\cdot} = \varepsilon X'(t, x, \mu)\,K + \varepsilon \partial X(t, x, \mu) / \partial \mu$$

$$K = \frac{Dx}{D\mu}, \quad K(t_0) = \frac{\partial x^\circ}{\partial \mu} - \varepsilon X(t_0, x^\circ, \mu)\frac{\partial t_0}{\partial \mu}$$

В частности, если параметры x°, t_0 фиксированы и не зависят от μ, получаем линейное неоднородное матричное уравнение с нулевыми начальными условиями.

4°. Рассмотрим теперь задачу Коши для стандартной системы с вращающейся фазой на асимптотически большом интервале времени $t \in [t_0, T]$, см. [1, 3, 6, 8, 9]:

$$a^{\cdot} = \varepsilon A(a, \psi), \quad \psi^{\cdot} = \omega(a) + \varepsilon \Psi(a, \psi), \; a(t_0) = a^\circ, \; \psi(t_0) = \psi^\circ \tag{4.13}$$

Здесь a — n-вектор медленных переменных, ψ — скалярная фаза, A, Ψ — 2π-периодические функции быстрой переменной ψ, частота $\omega(a) \geqslant \omega_0 > 0$. Правые части уравнений (4.13) считаются достаточно гладкими по $a \in D_a$, $\psi \in [\psi^\circ, \infty)$. Отметим, что система (4.13) описывает широкий класс возмущенных существенно нелинейных вращательно-колебательных процессов.

Обычным приемом [8], делением $a^{\cdot}$ на $\psi^{\cdot}$, получаем стандартную систему вида (1.1)

$$\frac{da}{d\psi} = \varepsilon \frac{A(a, \psi)}{\omega(a) + \varepsilon \Psi(a, \psi)}, \quad a(\psi^\circ) = a^\circ \tag{4.14}$$

Для системы (4.14) считаются выполненными предположения п. 1. Тогда на асимптотически большом интервале изменения быстрой переменной ψ, $\psi \in [\psi^\circ, \psi_T]$, $\psi_T \sim \varepsilon^{-1}$, при помощи подхода пп. 2,3 получаем гладкое по ψ° и $a^\circ \in D_{a^\circ} \subseteq D_a$ решение вида, аналогичного (3.5)

$$a = a(\psi, \psi^\circ, a^\circ, \varepsilon) = \alpha(\theta - \theta^\circ, a^\circ) + \varepsilon \gamma(\psi, \psi^\circ, a^\circ, \varepsilon)$$

$$\theta = \varepsilon \psi, \; \theta \in [\theta^\circ, \theta_T], \; \theta_T \sim 1$$

Здесь α — решение усредненной по ψ системы первого приближения

$$d\alpha / d\theta = A_0(\alpha) / \omega(\alpha), \quad \alpha(\theta^\circ) = a^\circ$$

а γ — равномерно ограниченная для всех $\psi \in [\psi^\circ, \psi_T]$ функция.

Подставляя выражение для a в уравнение для ψ (4.13), получим уравнение с разделяющимися переменными, однозначно связывающее ψ и t:

$$t - t_0 = \int\limits_{\psi^\circ}^{\psi} \frac{d\varphi}{\omega(\alpha) + \varepsilon B(\varphi)}, \quad \varepsilon B \equiv \omega(\alpha + \varepsilon\gamma) - \omega(\alpha) + \varepsilon\Psi \tag{4.15}$$

Зависимость ограниченной функции B от других аргументов для сокращения записи не указывается. Из соотношения (4.15) искомая функция $\psi(t)$, а вместе с нею и $a(t)$ могут быть найдены последовательными приближениями на основе решения первого приближения. Величина $T \sim \varepsilon^{-1}$ определяется из (4.15) при значении $\psi = \psi_T$,

Таким образом, изложенный выше метод последовательных приближений (метод Пикара) оказывается довольно эффективным приемом анализа нестационарных колебательных процессов на большом интервале времени. Полученные на его основе результаты имеют самостоятельное значение и особенно важны при решении краевых задач принципа максимума Понтрягина Л. С., к исследованию которых приводит ряд задач оптимального управления нелинейными колебательными системами при помощи асимптотических методов [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
2. *Besjes J. G.* On the asymptotic methods for non-linear differential equations.— J. Mec., 1969, v. 8, No. 3, p. 357.
3. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971. 440 с.
4. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
5. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 432 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1969. 248 с.
7. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1953. 468 с.
8. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 508 с.
9. *Акуленко Л. Д.* Приближенное решение нелинейных задач оптимального управления колебательными процессами методом канонического разделения движений.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 6, с. 1024.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1980