В отсутствие внутренней циркуляции ($p_1 = p_2 = \infty$) соотношения (3.3) позволяют получить

$$\frac{\partial^3 \Psi^e}{\partial \sigma^3} \simeq \frac{3V_1 c^2 (1+\mu)[2+(\alpha_1+\alpha_2)(1-\mu)]}{(1-\mu)[3\alpha_1\alpha_2(1-\mu)^2+2(\alpha_1+\alpha_2)(1-\mu)+1]}$$

В результате интегрирования найдем

$$f = -\frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{6\alpha_1\alpha_2} + \frac{\varphi(t_1)-\varphi(t_2)}{12\alpha_1\alpha_2(t_2-t_1)}, \quad t_{1,2} = \frac{\alpha_1+\alpha_2 \mp \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_2}}{3\alpha_1\alpha_2} \tag{3.10}$$

$$\varphi(t) = (2+t)[2-(\alpha_1+\alpha_2)t]\ln[t^{-1}(2+t)]$$

Соотношения (3.6) и (3.10) обобщают результат [2] на случай различных α_1, α_2.

α	$p=\infty$	8	6	4	3	2	1
0	1000	813	766	687	623	526	361
0,1	844	711	675	614	564	484	342
0,2	743	639	610	561	519	451	325
0,3	668	584	560	518	482	424	311
0,4	611	540	520	484	453	401	299
0,5	566	504	487	455	427	381	288

При α_1, $\alpha_2 \to 0$ (3.10) дает $f = 1$, что соответствует первому члену асимптотики [7].

В общем случае систему (3.4) приходится решать численно. В таблице приведены значения $f \times 10^3$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и $p_1 = p_2 = p$.

Автор благодарит Головина А. М. за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зинченко А. З.* К расчету гидродинамического взаимодействия капель при малых числах Рейнольдса.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5.
2. *Hocking L. M.* The effect of slip on the motion of a sphere close to a wall and of two adjacent spheres.— J. Engng Math., 1973, v. 7, No. 3, p. 207—221.
3. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
4. *Cooley M. D. A., O'Neill M. E.* On the slow motion of two spheres in contact along their line of centres through a viscous fluid.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1969, v. 66, No. 2, p. 407—415.
5. *Stimson M., Jeffery G. B.* The motion of two spheres in a viscous fluid.— Proc. Roy. Soc. A, 1926, v. 111, No. 757, p. 110—116.
6. *Reed L. D., Morrison F. A., Jr.* Particle interactions in viscous flow at small values of Knudsen number.— J. Aerosol. Sci., 1974, v. 5, No. 2, p. 175—189.
7. *Cooley M. D. A., O'Neill M. E.* On the slow motion generated in a viscous fluid by the approach of a sphere to a plane wall or stationary sphere.— Mathematika, 1969, v. 16, No. 1, p. 37—49.

Москва

Поступила в редакцию 14.VI.1979

УДК 532.72

ДИФФУЗИЯ К ЧАСТИЦЕ В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КИНЕТИКЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ РЕАКЦИИ

Полянин А. Д.

Рассматривается диффузия к частице в сдвиговом потоке при малых числах Пекле и Рейнольдса при протекании на ее поверхности химической реакции, скорость которой произвольным образом зависит от концентрации.

Исследованию тепломассообмена реагирующей частицы в поступательном потоке вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Пекле и Рейнольдса посвящен ряд работ [1—7], в которых рассматривался диффузионный режим протекания реакции на поверхности частицы [1—3], а также гетерогенная химическая реакция первого [4—6], второго [4] и произвольного порядка [7]. В [8—10] рассматривался случай диффузионного режима реакции на поверхности частицы, свободно взвешенной в сдвиговом потоке.

В сферической системе координат r, θ, λ, связанной с частицей, процесс переноса реагента в жидкости определяется безразмерным уравнением конвективной диффузии и граничными условиями

$$\Delta_r c = Pu_i \frac{\partial c}{\partial x_i}, \quad c = \frac{c_\infty - c_*}{c_\infty}, \quad P = \frac{aU}{D} \tag{1}$$

$$r \to \infty, \; c \to 0; \; r = 1, \; \partial c/\partial r + f(1 - c) = 0 \tag{2}$$
$$f(x) \equiv ak' (Dc_\infty)^{-1} F(c_\infty x), \quad F(0) = 0$$

Здесь c_* — концентрация, P — число Пекле, a — радиус частицы, D — коэффициент диффузии, U — характерная скорость течения, Δ — оператор Лапласа, k' — константа скорости реакции, $k'F$ — скорость химической реакции. Здесь и далее по повторяющимся индексам идет суммирование.

В случае произвольного сдвигового потока несжимаемой жидкости распределение скоростей вдали от частицы имеет вид

$$r \to \infty, \; u_i \to G_{ij} x_j; \; G_{ii} = 0 \tag{3}$$

Для определенности далее считаем, что безразмерные коэффициенты в соотношении (3), а также характерная скорость в уравнении (1) определены следующим образом через элементы матрицы коэффициентов сдвига G_{ij}^*:

$$G_{ij} = G_{ij}^* \| G_{ij}^* \|^{-1}, \quad U = a \| G_{ij}^* \|, \quad \| G_{ij}^* \| = \max_{i,j} | G_{ij}^* |$$

Исследуем краевую задачу (1), (2) методом сращиваемых асимптотических разложений по малому числу Пекле [1—10]. При этом вся область течения разбивается на две подобласти: внутреннюю $\{1 \leqslant r \leqslant O(P^{-1/2})\}$ и внешнюю $\{O(P^{-1/2}) \leqslant r \leqslant \infty\}$ [8—10]. Как обычно, во внешней области вводится «сжатая» координата $\rho = P^{1/2} r$ и решение в каждой из подобластей ищется по отдельности в виде внутреннего и внешнего разложений. При построении асимптотического решения во внутренней области используется граничное условие на поверхности частицы (2), а во внешней — граничное условие на бесконечности; возникающие при решении неизвестные постоянные определяются путем использования процедуры сращивания.

Аналогично [10] можно показать, что в случае сдвигового стоксова обтекания сферы распределение концентрации во внешней области $\{O(P^{-1/2}) \leqslant r \leqslant \infty\}$ выражается через фундаментальное решение уравнения $\Delta_\rho \psi = G_{ij} x_j \, \partial \psi / \partial x_i$ и может быть представлено в виде

$$c = P^{1/2} \Phi(P) \{\psi + O(P)^{3/2}\}, \quad \psi = \psi(\rho, \; x_i/r, \; G_{ij}) \tag{4}$$
$$\rho \to 0, \; \psi \to \rho^- - \alpha; \; \alpha = \alpha(G_{ij})$$

Здесь α — числовой коэффициент, а Φ — неизвестная функция, определяемая в ходе решения задачи. Общее выражение для величины параметра α приведено в [9]. В частности, в случае простого сдвига (один недиагональный элемент матрицы G_{ij} равен единице, а остальные — нулю) $\alpha = 0{,}258$ [8].

Используя результаты [7, 10], можно показать, что для внутреннего разложения в области $\{1 \leqslant r \leqslant O(P^{-1/2})\}$ имеет место следующее представление:

$$c = \frac{q}{r} + \alpha q P^{1/2} \left(\frac{q_*}{r} - 1 \right) + q P c_2 + \alpha q q_* P^{3/2} c_3 + o(P^{3/2}) \tag{5}$$
$$q_* = \omega_1 (\omega_1 + 1)^{-1}, \quad \omega_n \equiv [\partial^n f / \partial x^n]_{x=1-q}$$

Здесь q — корень уравнения

$$-q + f(1 - q) = 0 \tag{6}$$

Функции c_2 и c_3 удовлетворяют уравнению [10]

$$\Delta_r c_m = -r^{-3} u_i x_i \quad (m = 2, \; 3) \tag{7}$$

и граничным условиям

$$r = 1, \quad \frac{\partial c_2}{\partial r} - \omega_1 c_2 + \frac{1}{2} \alpha^2 q q_*^2 \omega_2 \omega_1^{-3} = 0 \tag{8}$$

$$r = 1, \quad \frac{\partial c_3}{\partial r} - \omega_1 c_3 - q\omega_2\omega_1^{-1}c_2 + \frac{1}{6}\alpha^2 q^2 q_*^2 \omega_3 \omega_1^{-3} = 0$$

которые получаются в результате подстановки выражения (5) в граничное условие на поверхности частицы (2) с последующим разложением в ряд и выделением членов при одинаковых степенях малого параметра $P^{1/2}$.

Интегрируя уравнение (7) по поверхности сферы S радиуса $r > 1$, с учетом несжимаемости жидкости, аналогично [10], получаем

$$(9) \qquad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}\langle c_m\rangle = -\frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_S u_i n_i \, dS = 0$$

$$\langle A\rangle \equiv \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_S A\, dS, \quad n_i = \frac{x_i}{r} \quad (m = 2, 3)$$

Общее решение (9) имеет вид

$$(10) \qquad \langle c_m\rangle = a_m + b_m r^{-1}$$

Интегрирование граничных условий (8) по S при $r = 1$ дает два алгебраических линейных уравнения для определения неизвестных коэффициентов a_m и b_m. Интегрирование выражения (5) с учетом (10) и последующим сращиванием с интегралом от внешнего решения (4) дает недостающие (линейные) алгебраические соотношения для определения коэффициентов a_m и b_m в формуле (10) и неизвестной функции Φ, фигурирующей в выражении (4).

Приведем окончательное выражение для среднего числа Шервуда

$$(11) \qquad \mathrm{Sh} = -\langle \partial c/\partial r\rangle|_{r=1} = \Phi(P) = q\{1 + \varepsilon + (1 + {}^1/_2 qq_*\omega_2\omega_1^{-3})\varepsilon^2 + $$
$$+ (1 + {}^3/_2 qq_*\omega_2\omega_1^{-3} - {}^1/_2 q^2 q_*^2 \omega_2^2 \omega_1^{-5} + {}^1/_6\, q^2 q_* \omega_3 \omega_1^{-4})\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)\},$$
$$\varepsilon = \alpha q_* P^{1/2}$$

Коэффициенты q, q_* и ω_n определены в формулах (5), (6).

В случае линейной кинетики поверхностной реакции $f(x) = kx$ формула (11) упрощается и принимает вид

$$(12) \qquad \mathrm{Sh} = q(1 - \alpha q P^{1/2})^{-1} + o(P^{3/2}), \quad q = k(k+1)^{-1}$$

При $k \to \infty$ ($q \to 1$) выражение (12) переходит в результат работы [10].

Прямой проверкой можно показать, что формулу (11) можно получить решением алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$(13) \qquad \mathrm{Sh} = f(1 - \mathrm{Sh}/\mathrm{Sh}_\infty)$$

где Sh_∞ — число Шервуда в случае сдвигового обтекания сферы для диффузионного режима реакции [10], что соответствует значению $q = 1$ ($k = \infty$) в выражении (12).

Следует отметить, что уравнение (13) дает правильный результат и в случае поступательного стоксова обтекания сферы. Это доказывается подстановкой в (13) выражения для Sh_∞, полученного в [1], с последующим разрешением уравнения относительно Sh. Такая процедура приводит к результату работы [7].

Можно показать, что в случае произвольного обтекания сферической частицы (капли) несжимаемой жидкостью уравнение (14) дает правильный результат, по крайней мере для двух первых членов асимптотического разложения среднего числа Шервуда Sh по малому числу Пекле (Sh_∞ — соответствует диффузионному режиму реакции).

Это утверждение доказывается следующим образом. При малых числах Пекле нулевой член внутреннего разложения не зависит от типа обтекания сферы и определяется выражением (5) при $P = 0$. Это приводит к появлению дополнительного (по сравнению с диффузионным режимом реакции) множителя q в старшем члене внешнего разложения. Кроме того, граничное условие на поверхности сферы для первого члена внутреннего разложения c_1 совпадает с первым граничным условием (8) при $\omega_2 = 0$, а уравнение для c_1 либо задается однородным уравнением Лапласа, либо совпадает с уравнением (7). Во всех случаях из этого уравнения следует, что для $\langle c_1\rangle$ справедливо представление (10). Граничное условие при $r = 1$ дает одно линейное уравнение для определения коэффициентов a_1 и b_1, а второе необходимое соотношение получается из условия сращивания с главным членом внешнего разложения. Эти уравнения позволяют определить коэффициенты a_1 и b_1. Сравнение полученного таким образом двучленного разложения для среднего числа Шервуда показывает, что Sh с требуемой точностью совпадает с корнем уравнения (13).

Можно показать, что в случае частицы произвольной формы, свободно взвешенной в сдвиговом потоке, при линейной кинетике поверхностной реакции для среднего числа Шервуда справедлива формула

$$\mathrm{Sh}/\mathrm{Sh}_0 = 1 + \alpha\, \mathrm{Sh}_0 P^{1/2} + \alpha^2\, \mathrm{Sh}_0^2 P + O\left(P^{3/2}\right) \tag{14}$$

Здесь среднее число Шервуда Sh_0 соответствует массообмену реагирующей частицы при $f(x) = kx$ с неподвижной средой (т. е. при $P = 0$), а коэффициент α определяется согласно [9].

Формула (14) выводится тем же путем, который использовался в [10] для исследования случая диффузионного режима реакции ($k \to \infty$), аналогично тому, как соответствующее обобщение работы [2] делалось в [6] для поступательного потока.

В случае твердой сферы $\mathrm{Sh}_0 = k(k+1)^{-1}$ и формула (14) с точностью до $O(P^{3/2})$ переходит в (12).

Автор благодарит Гупало Ю. П. и Рязанцева Ю. С. за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Acrivos A., Taylor T. D.* Heat and mass transfer from single sphere in Stokes flow.— Phys. Fluids, 1962, v. 5, No. 4, p. 378.
2. *Brenner H.* Forced convection heat and mass transfer at small Peclet numbers from particle of arbitrary shape.— Chem. Engng Sci., 1963, v. 18, No. 2, p. 109.
3. *Rimmer P. L.* Heat transfer from a sphere in a stream of small Reynolds number.— J. Fluid Mech., 1968, v. 32, pt 1, p. 1.
4. *Taylor T. D.* Mass transfer from single sphere in Stokes flow with surface reactions.— Intern. J. Heat Mass Transfer, 1963, v. 6, No. 11, p. 993.
5. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* О массо- и теплообмене сферической частицы в ламинарном потоке вязкой жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 2, с. 254.
6. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сысков Ю. Н.* Диффузия к обтекаемой реагирующей частице произвольной формы.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2, с. 99.
7. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А.* Конвективная диффузия к твердой частице в потоке газа при нелинейной кинетике гетерогенной химической реакции.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 1, с. 86.
8. *Frankel N., Acrivos A.* Heat and mass transfer from small spheres and cylynders freely suspended in shear flow.— Phys. Fluids, 1968, v. 11, No. 9, p. 1913.
9. *Batchelor G. K.* Mass transfer from a particle suspended in fluid with a steady linear ambient velocity distribution.— J. Fluid Mech., 1979, v. 95, No. 2, p. 369.
10. *Acrivos A.* A note on the rate of heat or mass transfer from a small particle freely suspended in a linear shear field.— J. Fluid Mech., 1980, v. 98, No. 2, p. 299.

Москва

Поступила в редакцию 18.IX.1980

УДК 539.3

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ БОКОВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Соколов Ф. А.

Рассматривается упругая, круговая, находящаяся в условиях плоской деформации цилиндрическая оболочка, нагруженная давлением.

Предполагается, что давление есть функция времени и разложимо в ряд Фурье по косинусам угла. На основании уравнений В. З. Власова [1] получены выражения для перемещений. Отмечена неточность [2] при определении функций времени в членах рядов, входящих в выражения для перемещений.

Уравнения движения круговой цилиндрической оболочки в условиях плоской деформации [1] запишем в виде