$$\alpha_{01} = -3\Omega_0^4 + (E_\theta + E_\psi + \varepsilon_\theta\varepsilon_\psi + DD_1v_0^2)\,\Omega_0^2 + E_\theta E_\psi \quad \alpha_{11} = 2\Omega_0^3(\varepsilon_\theta + \varepsilon_\psi)$$
$$\gamma = 16\,(3\pi)^{-1}k_d\Omega_0^3\sigma\,[\alpha_{01}\,(E_\psi - \Omega_0^2) + \alpha_{11}\varepsilon_\psi\Omega_0]$$
$$\gamma_1 = 16\,(3\pi)^{-1}\,k_d\Omega_0^3\sigma\,[\alpha_{01}\varepsilon_\psi\Omega_0 + \alpha_{11}\,(\Omega_0^2 - E_\psi)] \quad \beta = v_1\Omega_0^2v_0^{-1}\sigma\,(\alpha_{01}b_1 + \alpha_{11}b_2)$$
$$\beta_1 = v_1\Omega_0^2v_0^{-1}\sigma\,(\alpha_{01}b_2 + \alpha_{11}b_1), \quad \sigma = (\alpha_{01}^2 + \alpha_{11}^2)^{-1}$$
$$b_1 = \varepsilon_\psi\,(E_\theta - \Omega_0^2) + \varepsilon_\theta\,(E_\psi - \Omega_0^2)$$
$$b_2 = \Omega_0\,(\varepsilon_\theta\varepsilon_\psi - DD_1v_0^2) - \Omega_0^{-1}(\Omega_0^2 - E_\theta)\,(\Omega_0^2 - E_\psi)$$

Для числовых значений $B = 9.81$ кгм², $C = 165$ кгм², $h = 37$ нмс, $h_1 = 981$ нмс, $k_1 = 12200$ нм, $k = 421000$ нм, $I = 11.8$ кгм², $r = 0.4$ м, $l = 0.8$ м, $a_1 = 42670$ н имеем $v_0 = 17{,}96$ мс$^{-1}$, $\Omega_0 = 53.8$ с$^{-1}$.

Зависимость амплитуды Θ шимми от $v - v_0$ в рассматриваемом приближении линейна; в данном примере коэффициент пропорциональности для значений $k_d = 1.0$, 3.0, 5.0, 10.0 равен соответственно $2\cdot10^{-2}$, $4{,}97\cdot10^{-3}$, $3.23\cdot10^{-3}$, $1.29\cdot10^{-3}$ рад с/м. С увеличением характеристики k_d квадратичного демпфера амплитуда шимми убывает. Период шимми $T = 2\pi/\Omega$ не зависит от величины k_d; для рассматриваемого примера $T = \omega_1\,(v - v_0) + \omega_0$, $\omega_0 = 8.12\cdot10^{-2}$ с$^{-1}$, $\omega_1 = 5.17\cdot10^{-4}$ см$^{-1}$. Частота Ω нелинейной системы меньше частоты Ω_0 линейной системы.

Подбирая соответствующий коэффициент сопротивления квадратичного демпфера, можно регулировать амплитуду шимми, не допуская выхода ее из безопасного интервала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гоздек В. С.* О влиянии различных параметров на устойчивость движения ориентирующихся колес самолета.— Тр. ЦАГИ, 1964, вып. 917, с. 1—30.
2. *Gordon J. T.*, *Merchant H. C.* An asymptotic method for predicting amplitudes of nonlinear wheel shimmy.— J. Aircraft, 1978, v. 15, No. 3, p. 155—159.
3. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: «Мир», 1976. 456 с.

Киев

Поступила в редакцию
24.IX.1979

УДК 532.516

РАСЧЕТ БЛИЗКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАПЕЛЬ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ И ЭФФЕКТОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

Зинченко А. З.

В стоксовом приближении рассматривается осесимметричная задача о движении двух сферических капель в вязкой среде. Вязкости капель предполагаются конечными, но большими по сравнению с вязкостью внешней среды; кроме того, допускается малое проскальзывание на поверхностях сфер. Строится асимптотическое решение задачи, применимое при малой величине зазора между поверхностями сфер. В частных случаях отсутствия проскальзывания или внутренней циркуляции решение согласуется с результатами [1, 2].

Асимптотическое решение осесимметричной задачи, построенное в работе [1], при значениях вязкостей капель, больших по сравнению с вязкостью внешней среды, справедливо лишь при очень малых значениях безразмерного зазора (см. [1]). Решение, построенное в предлагаемой работе, оказывается применимым в более широкой области.

Случай, когда вязкости частиц велики по сравнению с вязкостью среды, часто реализуется при движении капель в газовой среде, а в этом случае при значениях зазора, сравнимых с длиной свободного пробега молекул газа, необходим учет молекулярных эффектов. Строгий подход, основанный на решении уравнения Больцмана, отсутствует, поэтому в предлагаемой работе принята модель течения сплошной среды со скольжением на поверхностях сфер, что, строго говоря, справедливо лишь при небольших значениях чисел Кнудсена, рассчитанных по величине зазора.

1. Постановка задачи. Жидкие сферы имеют радиусы a_1, a_2, динамические вязкости μ_1, μ_2 и движутся вдоль линии центров со скоростями $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ в среде с вязкостью μ_e. Числа Рейнольдса и относительная скорость движения сфер предполагаются малыми, и задача исследуется в рамках квазистационарных уравнений Стокса. В качестве граничных условий предполагаем непротекание жидкостей через поверхности сфер, непрерывность касательных напряжений, а также условия проскальзывания

$$\beta_i (\mathbf{v}^e - \mathbf{v}^i)\cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}_n^{\,e}\cdot \boldsymbol{\tau}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — вектор, касательный к поверхности сферы радиуса a_i, β_i — коэффициенты скольжения, $\mathbf{p}_n$ и $\mathbf{v}$ — соответственно векторы напряжения и скорости жидкости; n — направление внешней к поверхности сферы нормали. Верхними индексами e, i $(i = 1, 2)$ отмечаются величины, относящиеся соответственно к области между сферами и к внутренности сферы радиуса a_i.

Поверхностное натяжение на границах раздела жидкостей считаем достаточно большим, что позволяет пренебречь отклонением формы частиц от сферической и не рассматривать граничное условие непрерывности нормальных напряжений.

В силу линейности задачи гидродинамические силы можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_1 = -6\pi\mu_e a_1 [\Lambda_{11}(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) + \Lambda_{12}\mathbf{V}_2] \\
&\mathbf{F}_2 = -6\pi\mu_e a_2 [\Lambda_{21}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) + \Lambda_{22}\mathbf{V}_2] \quad \Lambda_{11} - k^{-1}\Lambda_{21} = \Lambda_{12}, \quad k = a_1 / a_2
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Последнее условие (1.1) следует из теоремы взаимности [3] и из граничных условий.

Вязкости капель предполагаются конечными, но большими по сравнению с вязкостью среды, а проскальзывание считается малым

$$\lambda_i = \mu_i / \mu_e \gg 1, \quad \mu_e / (\beta_i a_i) \ll 1, \quad i = 1,2 \tag{1.2}$$

Коэффициенты скольжения в случае движения капель в газовой среде определяются соотношением $\mu_e / \beta_i = A_i l$. Здесь l — длина свободного пробега молекул газа. Коэффициенты A_i порядка единицы связаны обычным образом с коэффициентами аккомодации. Таким образом, последнее условие (1.2) означает малость чисел Кнудсена, рассчитанных по радиусам сфер.

Поскольку коэффициенты Λ_{12}, Λ_{22} остаются конечными при касании сфер, то в предположениях (1.2) значения этих коэффициентов вплоть до касания сфер мало отличаются от соответствующих значений Λ_{12}^s, Λ_{22}^s для твердых сфер, рассчитанных в отсутствие эффектов скольжения в работе [4]. Поэтому достаточно положить $\mathbf{V}_2 = 0$ и исследовать асимптотику Λ_{11} при малой величине зазора с учетом (1.2).

2. Общая структура точного решения. Определим сначала общую структуру точного решения, не связанного с предположением о малости величины зазора и предположениями (1.2).

Перейдем от цилиндрических координат z, ρ (ось z направлена вдоль линии центров от сферы a_2 к сфере a_1, ось ρ — перпендикулярно линии центров) к бисферическим координатам

$$z = \frac{c \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \mu}, \quad \rho = \frac{c \sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \mu}, \quad \mu = \cos \xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \pi$$

Параметр c и величины $\eta_1 > 0$, $\eta_2 < 0$ определим так, чтобы сфера радиуса a_i была поверхностью $\eta = \eta_i = \text{const}$, положив

$$\operatorname{ch} \eta_1 = \frac{(1+\varepsilon)(1+k) + k\varepsilon^2/2}{1 + k + k\varepsilon}, \quad \operatorname{sh} \eta_2 = -k \operatorname{sh} \eta_1, \quad c = a_1 \operatorname{sh} \eta_1 \tag{2.1}$$

Здесь εa_1 — зазор между поверхностями сфер.

Используя общее решение [5] уравнения Стокса в бисферических координатах, функцию тока будем искать в виде

$$\Psi = -2^{-1/2}V_1c^2(\operatorname{ch}\eta - \mu)^{-3/2}\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\varphi_n(\eta)Q_n(\mu) \tag{2.2}$$

$$\varphi_n^e(\eta) = E_n\operatorname{ch}(n-1/2)\eta + F_n\operatorname{sh}(n-1/2)\eta + G_n\operatorname{ch}(n+3/2)\eta +$$
$$+H_n\operatorname{sh}(n+3/2)\eta,\quad \eta_2\leqslant\eta\leqslant\eta_1$$
$$\varphi_n^i(\eta) = A_n^i\exp[-(n-1/2)|\eta|] + B_n^i\exp[-(n+3/2)|\eta|],$$
$$|\eta|\geqslant|\eta_i|,\quad i=1,2$$

Здесь V_1 — проекция скорости $\mathbf{V}_1$ на ось z, $Q_n(\mu)$ — полиномы Гегенбауэра.

Положим $\varphi_n^*(\eta) = \varphi_n(\eta)$ в окрестности сферы $\eta=\eta_2$ и $\varphi_n^*(\eta)=\varphi_n(\eta)-R_n(\eta)$ в окрестности сферы $\eta=\eta_1$, где

$$R_n(\eta) = \frac{\exp[-(n+3/2)\eta]}{2n+3} - \frac{\exp[-(n-1/2)\eta]}{2n-1} \tag{2.3}$$

Тогда граничные условия принимают вид (знак плюс соответствует $i=1$)

$$\varphi_n^{*e} = \varphi_n^{*i} = 0,\quad d^2\varphi_n^{*e}/d\eta^2 = \lambda_i d^2\varphi_n^{*i}/d\eta^2 \tag{2.4}$$

$$\frac{\mu_e(\operatorname{ch}\eta-\mu)}{c\beta_i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2\varphi_n^{*e}}{d\eta^2}n(n+1)Q_n(\mu) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_i(2n+1)}\frac{d^2\varphi_n^{*e}}{d\eta^2} \pm \frac{d\varphi_n^{*e}}{d\eta}\right)n(n+1)Q_n(\mu)=0,\quad \eta=\eta_i,\quad i=1,2$$

С помощью второго соотношения (2.4) граничное условие скольжения приведено к равенству, не содержащему внутренних функций $\varphi_n^i(\eta)$, что оказывается существенным при отыскании асимптотики решения. Условия (2.4) можно привести к двум разностным уравнениям, например относительно E_n и F_n. В результате решения полученной таким образом системы уравнений функция тока определяется во всех областях течения.

Для твердых сфер с граничными условиями скольжения точное решение было получено в работе [6].

3. Асимптотическое решение. Найдем внутреннее разложение для функции тока Ψ^e, справедливое в области малого зазора между поверхностями сфер, так как эта область определяет сингулярную часть Λ_{11}. Случай касания соответствует предельному переходу

$$\varepsilon,\ \eta_1,\ \eta_2\to 0 \tag{3.1}$$

Положим

$$\alpha_i = \mu_e/(\varepsilon a_1\beta_i),\quad p_i=\lambda_i\sqrt{2\varepsilon(1+k)},\quad i=1,\ 2 \tag{3.2}$$

и будем считать величины k, α_i, p_i фиксированными в предельном переходе (3.1). Вводя переменную $\sigma=(\eta/\eta_1+k)/(1+k)$, заметим, что внутренняя область соответствует $\sigma\sim 1$, $1-\mu\sim 1$. Фиксируя значение σ, заменяя выражение для $\varphi_n^e(\eta)$ из (2.2) эквивалентным ему дифференциальным уравнением и применяя предельный переход (3.1) к соотношениям (2.3), (2.4), найдем

$$\Psi^e \simeq -V_1a_1^2\eta_1^2 2^{-1/2}(1-\mu)^{-3/2}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\Psi_n(\sigma)Q_n(\mu) \tag{3.3}$$

$$\Psi_n(\sigma) = A_n\sigma^3 + B_n\sigma^2 + C_n\sigma + D_n$$
$$\Psi_n(1) = -4(2n-1)^{-1}(2n+3)^{-1},\quad \Psi_n(0)=0$$

$$\alpha_i(1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\Psi_n''(\sigma_i)Q_n(\mu)+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\left[\frac{\psi_n''(\sigma_i)}{p_i(2n+1)}\pm\psi_n'(\sigma_i)\right]Q_n(\mu)=0,\quad \sigma=\sigma_i,\quad i=1,\ 2$$

$$(\sigma_1=1,\ \sigma_2=0)$$

Из этих равенств получим два разностных уравнения относительно A_n и B_n

$$\alpha_1\left[3A_n+B_n-\frac{n-1}{2n-1}(3A_{n-1}+B_{n-1})-\frac{n+2}{2n+3}(3A_{n+1}+B_{n+1})\right]+ \tag{3.4}$$
$$+\frac{6A_n+2B_n}{p_1(2n+1)}+2A_n+B_n=\frac{4}{(2n-1)(2n+3)}$$
$$\alpha_2\left[B_n-\frac{n-1}{2n-1}B_{n-1}-\frac{n+2}{2n+3}B_{n+1}\right]+\frac{2B_n}{p_2(2n+1)}+$$
$$+A_n+B_n=-\frac{4}{(2n-1)(2n+3)}$$

Поведение первого члена внутреннего разложения для Ψ^e в области сращивания со внешним разложением, т. е. при $\mu\to+1$, определяется поведением коэффициентов A_n, B_n, C_n при $n\to\infty$. Поскольку внешнее разложение в первом приближении такое же, как и для твердых сфер в отсутствие скольжения, необходимо потребовать, чтобы при $n\to\infty$

$$A_n\simeq 2n^{-2},\quad B_n\simeq-3n^{-2} \tag{3.5}$$

Условия (3.5) не противоречат системе (3.4) и выделяют единственное решение.

Согласно [1], вклад внутренней области в величину силы F_1^z в первом приближении равен

$$-\frac{\pi\mu_e}{c}\int\limits_{-1}^{1}(1-\mu)\frac{\partial^3\Psi^e}{\partial\eta^3}\,d\mu$$

С учетом (2.1) и (3.3) найдем окончательно

$$\Lambda_{11}\simeq(1+k)^{-2}\varepsilon^{-1}f(\alpha_1,\ \alpha_2,\ p_1,\ p_2)\qquad f=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)A_n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \tag{3.6}$$

В частном случае отсутствия скольжения ($\alpha_1=\alpha_2=0$) для A_n можно получить явное выражение из (3.4). В результате найдем

$$f=32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)[(2n+1)p_1p_2+p_1+p_2]}{(2n-1)^2(2n+3)^2[(2n+1)^2p_1p_2+4(2n+1)(p_1+p_2)+12]} \tag{3.7}$$

Разлагая общий член ряда (3.7) на простейшие дроби, можно выразить значение f через логарифмическую производную $\psi(z)$ от гамма-функции. При $p_1=p_2=p$ имеем (γ — постоянная Эйлера)

$$f=\frac{(39+7p)p^2}{6(p+3)^2(p-3)}+\frac{9\pi^2p}{16(9-p^2)}+ \tag{3.8}$$
$$+\frac{p^2(p^2-36)}{4(p+3)^2(p-3)^2}\left[\psi\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{p}\right)-\frac{8}{3}+\gamma+2\ln 2\right]$$

При $p_1\neq p_2$ соответствующее выражение весьма громоздко и здесь не приводится. Используя асимптотику $\psi(z)$ при $z\to\infty$, найдем при малых p_1, p_2 ($p_1\sim p_2$)

$$f\simeq\frac{1}{32}\pi^2(p_1+p_2)+\frac{1}{9}(p_1^2+p_2^2-p_1p_2)\ln p_1 \tag{3.9}$$

С учетом (1.2) и (3.2) формулы (3.6) и (3.9) согласуются с результатом [1], полученным для умеренных значений λ_1, λ_2. При p_1, $p_2\to\infty$ формула (3.7) дает $f=1$, что согласуется с асимптотическим решением [7] для твердых сфер.

Значения Λ_{11}^*, найденные по формулам (3.6), (3.8), сравниваются ниже с точными значениями Λ_{11} при $k=0{,}5$, $\lambda_1=\lambda_2=10$ и различных ε

ε	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
Λ^*_{11}	3,33	21,8	106	412
Λ_{11}	4,80	23,8	109	415

В отсутствие внутренней циркуляции ($p_1 = p_2 = \infty$) соотношения (3.3) позволяют получить

$$\frac{\partial^3\Psi^e}{\partial\sigma^3} \simeq \frac{3V_1c^2(1+\mu)[2+(\alpha_1+\alpha_2)(1-\mu)]}{(1-\mu)[3\alpha_1\alpha_2(1-\mu)^2+2(\alpha_1+\alpha_2)(1-\mu)+1]}$$

В результате интегрирования найдем

$$f = -\frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{6\alpha_1\alpha_2} + \frac{\varphi(t_1)-\varphi(t_2)}{12\alpha_1\alpha_2(t_2-t_1)}, \quad t_{1,2} = \frac{\alpha_1+\alpha_2 \mp \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_2}}{3\alpha_1\alpha_2} \tag{3.10}$$

$$\varphi(t) = (2+t)[2-(\alpha_1+\alpha_2)t]\ln[t^{-1}(2+t)]$$

Соотношения (3.6) и (3.10) обобщают результат [2] на случай различных α_1, α_2.

α	$p=\infty$	8	6	4	3	2	1
0	1000	813	766	687	623	526	361
0,1	844	711	675	614	564	484	342
0,2	743	639	610	561	519	451	325
0,3	668	584	560	518	482	424	311
0,4	611	540	520	484	453	401	299
0,5	566	504	487	455	427	381	288

При α_1, $\alpha_2 \to 0$ (3.10) дает $f = 1$, что соответствует первому члену асимптотики [7].

В общем случае систему (3.4) приходится решать численно. В таблице приведены значения $f \times 10^3$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и $p_1 = p_2 = p$.

Автор благодарит Головина А. М. за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зинченко А. З.* К расчету гидродинамического взаимодействия капель при малых числах Рейнольдса.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5.
2. *Hocking L. M.* The effect of slip on the motion of a sphere close to a wall and of two adjacent spheres.— J. Engng Math., 1973, v. 7, No. 3, p. 207—221.
3. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
4. *Cooley M. D. A., O'Neill M. E.* On the slow motion of two spheres in contact along their line of centres through a viscous fluid.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1969, v. 66, No. 2, p. 407—415.
5. *Stimson M., Jeffery G. B.* The motion of two spheres in a viscous fluid.— Proc. Roy. Soc. A, 1926, v. 111, No. 757, p. 110—116.
6. *Reed L. D., Morrison F. A., Jr.* Particle interactions in viscous flow at small values of Knudsen number.— J. Aerosol. Sci., 1974, v. 5, No. 2, p. 175—189.
7. *Cooley M. D. A., O'Neill M. E.* On the slow motion generated in a viscous fluid by the approach of a sphere to a plane wall or stationary sphere.— Mathematika, 1969, v. 16, No. 1, p. 37—49.

Москва

Поступила в редакцию
14.VI.1979

УДК 532.72

ДИФФУЗИЯ К ЧАСТИЦЕ В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КИНЕТИКЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ РЕАКЦИИ

Полянин А. Д.

Рассматривается диффузия к частице в сдвиговом потоке при малых числах Пекле и Рейнольдса при протекании на ее поверхности химической реакции, скорость которой произвольным образом зависит от концентрации.

Исследованию тепломассообмена реагирующей частицы. в поступательном потоке вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Пекле и Рейнольдса посвящен ряд работ [1—7], в которых рассматривался диффузионный режим протекания реакции на поверхности частицы [1—3], а также гетерогенная химическая реакция первого [4—6], второго [4] и произвольного порядка [7]. В [8—10] рассматривался случай диффузион-