

УДК 629.113 + 629.735.33

АВТОКОЛЕБАНИЯ КОЛЕСА НА ОРИЕНТИРУЮЩЕЙСЯ СТОЙКЕ ШАССИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДЕМПФЕРОМ

Л о б а с [Л. Г.]

В предположении гипотезы увода методом возмущений определены амплитуда и частота автоколебаний колеса на ориентирующей стойке, подверженной изгибным деформациям. На стойке имеется квадратичный демпфер, развивающий турбулентное сопротивление и параллельно соединенный с упругим элементом. Такая система после достижения некоторого значения скорости движения является потенциально автоколебательной. Найден предельный цикл, приведен пример расчета амплитуды и частоты автоколебаний.

Колебания системы описываются двумя равномерно движущимися осцилляторами, между которыми из-за вращения колеса существует взаимная гироскопическая связь и направленная связь по координате, обусловленная реакцией дороги на ногу шасси:

$$(1) \quad \begin{aligned} B\theta'' + h\theta' + k_1\theta - Ivr^{-1}\psi' &= -c_d\theta'^2 \operatorname{sign} \theta' \\ C\psi'' + h_1\psi' + k\psi + Ivr^{-1}\theta' &= -a_1l\theta \end{aligned}$$

Здесь θ, ψ — углы рысканья и крена, B, C — моменты инерции установки шасси относительно оси стойки и оси крена соответственно, h, h_1 — коэффициенты линейно-вязкого трения, k_1, k — жесткости, I, r — осевой момент инерции и радиус колеса соответственно, v — скорость движения, a_1 — коэффициент сопротивления уводу, c_d — коэффициент сопротивления демпфера, l — расстояние от плоскости полотна дороги до оси крена.

Гироскопическая связь и направленная связь в рассматриваемой системе образуют цикл, который может привести к неустойчивости прямолинейного движения и самовозбуждению колебаний ноги шасси (шимми). Внешним источником энергии, реализующим направленную связь, является двигательная установка.

Собственные значения матрицы линейной части системы (1) имеют отрицательные действительные части при

$$l < l_* = (h/B + h_1/C)^{1/2}(hk + h_1k_1)^{1/2}/a_1$$

В случае $l > l_*$ существует такое значение v_0 скорости движения, что при $v < v_0$ линейная система по-прежнему асимптотически устойчива. Действительные части двух собственных значений положительны, если $v \in (v_0, v_0')$, при этом с увеличением l значение v_0 убывает, а v_0' возрастает. Таким образом, при переходе через v_0 асимптотическая устойчивость линейной системы сменяется неустойчивостью.

Практическая нереализуемость [1] условия $l < l_*$ вынуждает использовать дополнительный квадратичный демпфер [2], а для определения его коэффициента сопротивления и допустимых величин люфтов — находить амплитуды и частоты возникающих при этом автоколебаний. Ниже последняя задача решается в первом приближении асимптотическим методом разложения производных [3].

Приняв $x_1 = \theta, x_2 = \theta', x_3 = \psi, x_4 = \psi'$, запишем систему (1) в виде

$$(2) \quad \dot{x} = Ax - dx_2^2 \operatorname{sign} x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -E_\theta & -\varepsilon_\theta & 0 & Dv \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -H_1 & -D_1v & -E_\psi & -\varepsilon_\psi \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ k_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_\theta = h/B, \quad E_\theta = k_1/B, \quad D = IB^{-1}r^{-1}, \quad k_d = C_d/B$$

$$\varepsilon_\psi = h_1/C, \quad E_\psi = k/C, \quad D_1 = IC^{-1}r^{-1}, \quad H_1 = a_1l/C$$

Положим $v = v_0 + \varepsilon v_1 + O(\varepsilon^2)$. Для нахождения амплитуды и частоты автоколебаний будем искать решение уравнения (2) при $v > v_0$ в виде

$$x = \varepsilon q_0 + \varepsilon^2 q_1 + \dots, \quad q_0 = \operatorname{col}(q_{10}, \dots, q_{40}), \quad q_1 = \operatorname{col}(q_{11}, \dots, q_{41}), \dots$$

Здесь $\varepsilon = (v - v_0) / v_1 + O(\varepsilon^2)$, причем $\varepsilon_1 > 0$ при $v > v_0$ и $\varepsilon = 0$ при $v = v_0$. Обозначим $t_0 = t$ и введем переменные медленного времени $t_i = \varepsilon^i t$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда $d/dt = \partial/\partial t_0 + \varepsilon \partial/\partial t_1 + \varepsilon^2 \partial/\partial t_2 + \dots$ и для определения q_i имеем уравнения

$$(3) \quad Lq_0 = 0, \quad Lq_1 = -\partial q_0/\partial t_1 + v_1 A_1 q_0 - dq_{20}^2 \operatorname{sign} q_{20}, \dots$$

$$L \equiv \partial/\partial t_0 - A_0, \quad A_0 = A|_{v=v_0}$$

Здесь A_1 — матрица, единственный ненулевой элемент которой $(A_1)_{42} = -D_1$. Собственные значения матрицы A_0 суть $p_{1,2} = \pm i\Omega_0$, $\operatorname{Re} p_{3,4} < 0$, а правый собственный вектор, соответствующий собственному значению $i\Omega_0$, коллинеарен вектору

$$u = \operatorname{col} \{1, i\Omega_0, [\varepsilon_\theta \Omega_0 + i(\Omega_0^2 - E_\theta)] D^{-1} v_0^{-1} \Omega_0^{-1}, (E_\theta - \Omega_0^2 + i\varepsilon_\theta \Omega_0) D^{-1} v_0^{-1}\}$$

$$\Omega_0^2 = (\varepsilon_\theta E_\psi + \varepsilon_\psi E_\theta + DH_1 v_0) (\varepsilon_\theta + \varepsilon_\psi)^{-1}$$

Здесь Ω_0 — частота линейной системы. На основании первого уравнения (3) имеем

$$q_0 = 2a \operatorname{Re} [u \exp(i\varphi)]$$

$$\varphi = \Omega_0 t_0 + \varphi_0, \quad a = a(t_1, t_2, \dots), \quad \varphi_0 = \varphi_0(t_1, t_2, \dots)$$

Представим последнее слагаемое второго уравнения (3) комплексным рядом Фурье

$$(4) \quad dq_{20}^2 \operatorname{sign} q_{20} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^2 c_m \exp(im\varphi)$$

$$a^2 c_m = \frac{d}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_{20}^2 \operatorname{sign} q_{20} \exp(-im\varphi) d\varphi$$

Из (3) следует, что q_1 определяется уравнением

$$\partial q_1/\partial t_0 - A_0 q_1 = \Phi(u, i, c_1) \exp[i(\Omega_0 t_0 + \varphi_0)] +$$

$$+ \Phi(\bar{u}, -i, c_{-1}) \exp[-i(\Omega_0 t_0 + \varphi_0)] - a^2 \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq \pm 1}}^{+\infty} c_m \exp(im\varphi)$$

$$\Phi(y, i, y_1) = y(-\partial a/\partial t_1 - i a \partial \varphi/\partial t_1) + v_1 a A_1 y - a^2 y_1$$

Пусть $U = (U_1, \dots, U_4)$ — левый собственный вектор матрицы A_0 , соответствующий собственному значению $i\Omega_0$, т. е.

$$(5) \quad U(A_0 - i\Omega_0 E) = 0$$

Введем скаляр $z = Uq_1$, тогда $UA_0 q_1 = i\Omega_0 z$. В z (а следовательно, и в q_1) не будет вековых членов, если

$$(6) \quad -\partial a/\partial t_1 - i a \partial \varphi/\partial t_1 + a(\beta + i\beta_1) - a^2(\gamma + i\gamma_1) = 0$$

$$\beta + i\beta_1 = v_1 \alpha^{-1} U A_1 u, \quad \gamma + i\gamma_1 = \alpha^{-1} U c_1, \quad \alpha = Uu$$

Поэтому

$$(7) \quad a = \beta [K \exp(-\beta t_1) + \gamma]^{-1}, \quad \varphi = \Omega_0 t_0 + (\beta \gamma_1/\gamma - \beta_1) t_1 + \delta$$

$$\delta = \gamma_1 \gamma^{-1} \ln [K \exp(-\beta t_1) + \gamma] + \Phi_*(t_2, t_3, \dots), \quad K = K(t_2, t_3, \dots)$$

Таким образом,

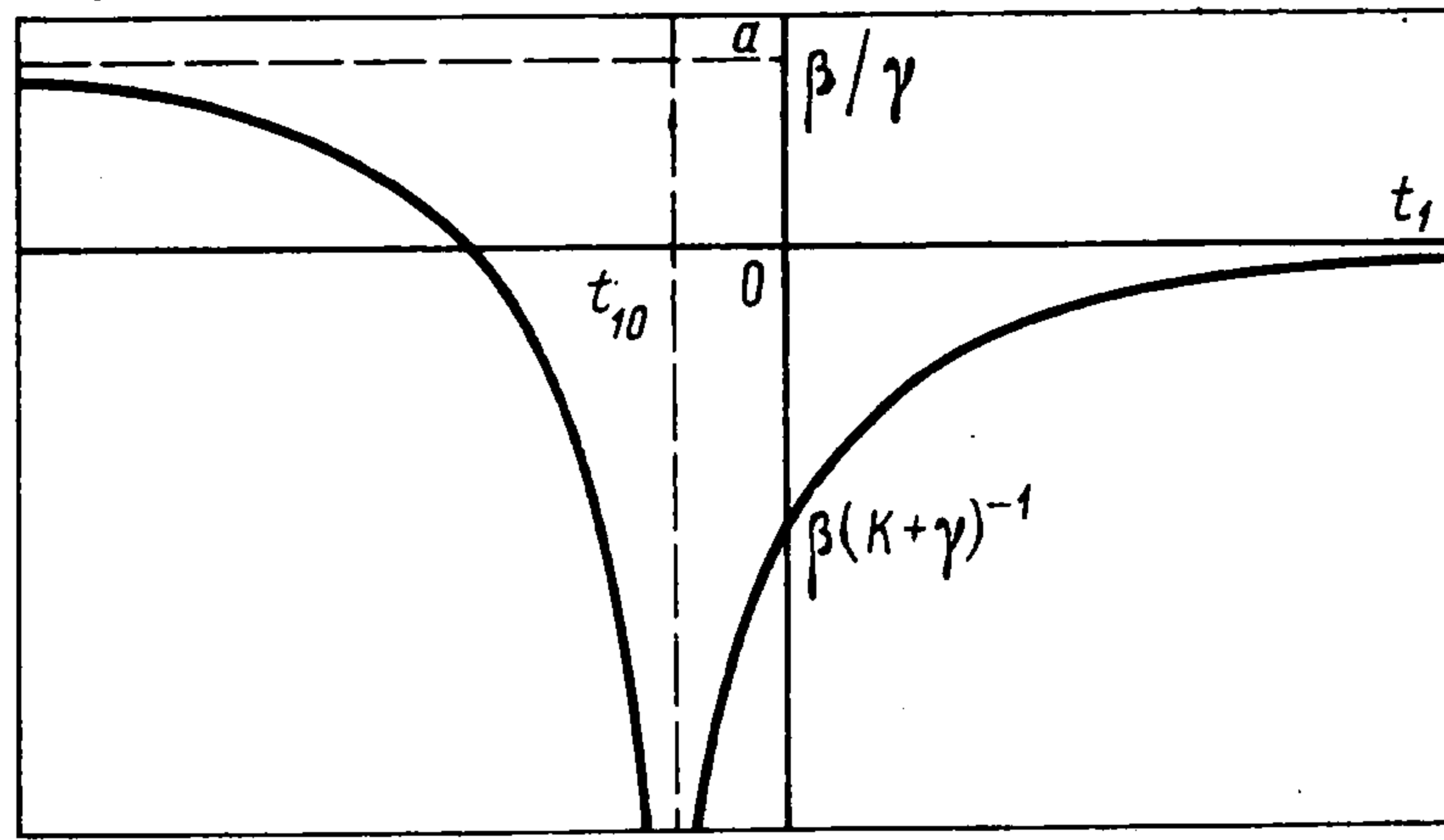
$$\theta = 2\varepsilon a \cos \varphi + O(\varepsilon^2), \quad \theta' = -2\varepsilon a \Omega_0 \sin \varphi + O(\varepsilon^2)$$

$$\psi = 2\varepsilon D^{-1} v_0^{-1} a [\varepsilon_\theta \cos \varphi + (E_\theta \Omega_0^{-1} - \Omega_0) \sin \varphi] + O(\varepsilon^2)$$

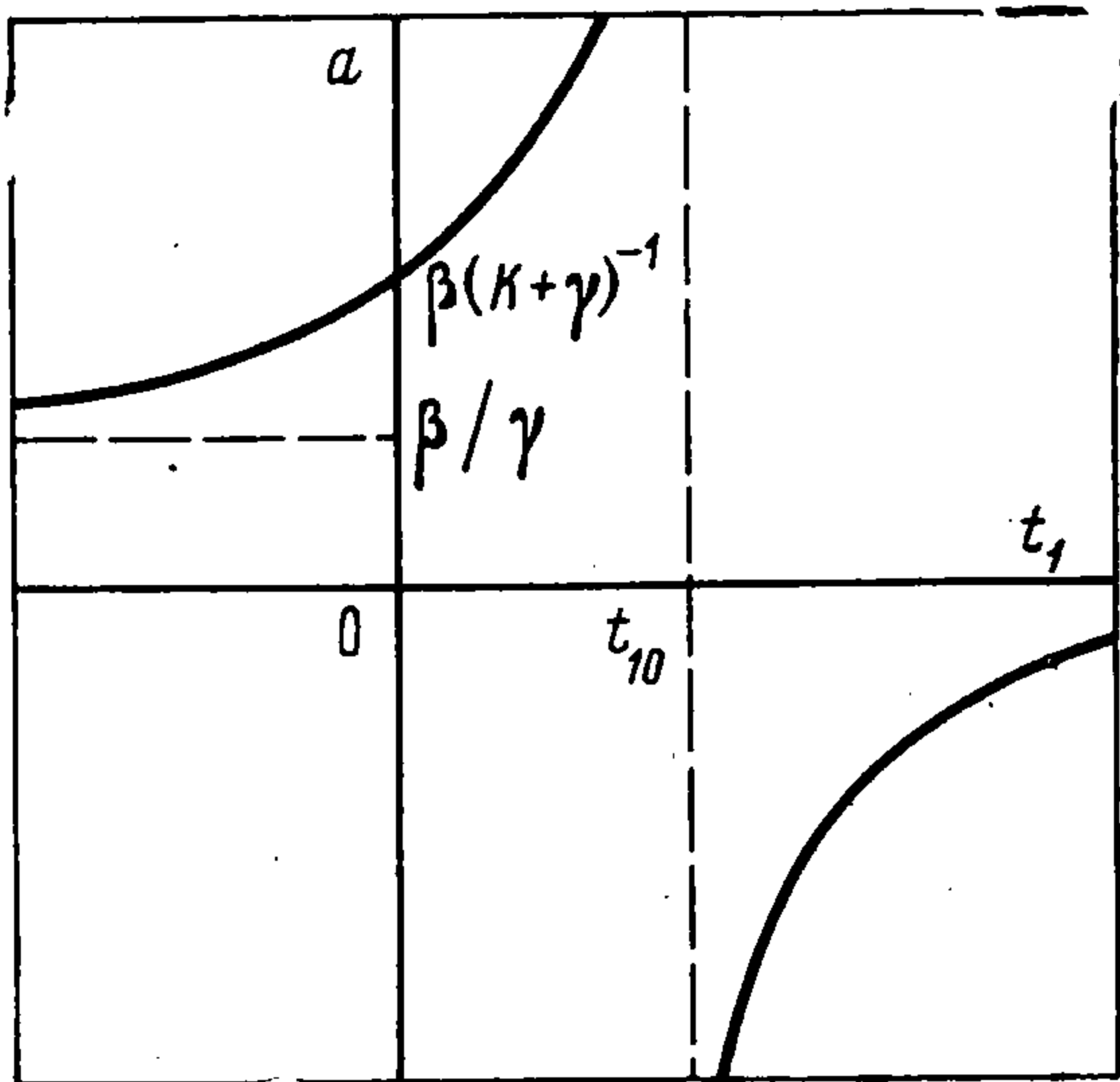
$$\psi' = 2\varepsilon D^{-1} v_0^{-1} a [(E_\theta - \Omega_0^2) \cos \varphi - \varepsilon_\theta \Omega_0 \sin \varphi] + O(\varepsilon^2)$$

Периодическое решение в системе устанавливается спустя некоторый промежуток времени. Для получения такого решения следует время считать достаточно большим и среди полученных предельных циклов отобрать устойчивые. В соответствии с процедурой асимптотического метода многих масштабов промежутку времени, по истечении которого устанавливается автоколебательный режим, соответствует $t_1 \rightarrow +\infty$, т. е. условия существования предельного цикла определяются поведением функции $a(t_1)$ на бесконечности.

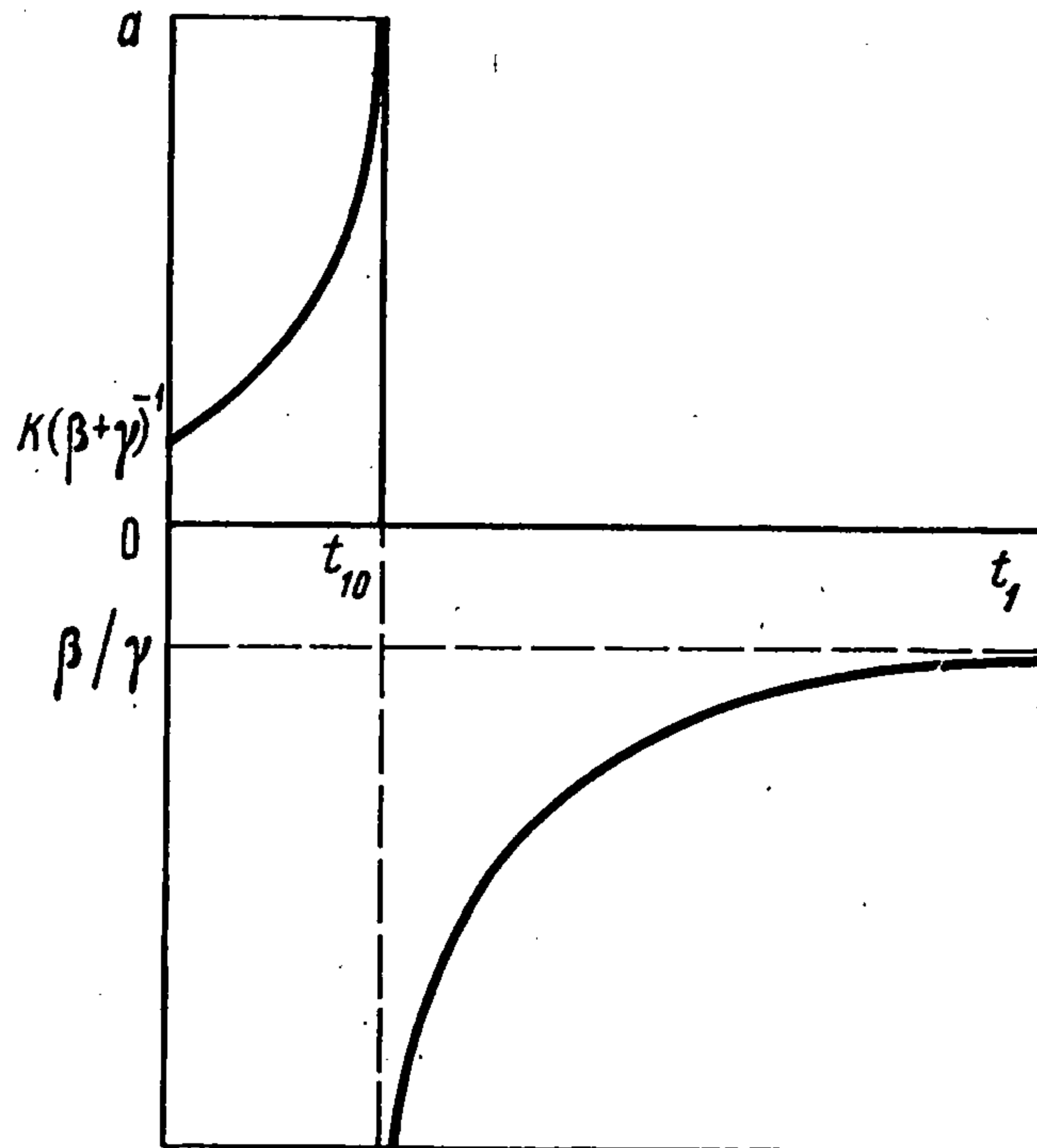
Для линейной системы $d = 0$, следовательно, $c_m = 0$, $\gamma = 0$, $\gamma_1 = 0$. Поэтому $a = \beta K \exp(\beta t_1)$. При $v < v_0$ линейная система асимптотически устойчива, следовательно, $\beta < 0$ при $v < v_0$. Так как при $v > v_0$ линейная система неустойчива, то $\beta > 0$ при $v > v_0$.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Для нелинейной системы из (7) в случае $\gamma > 0$ получаем $\beta < 0$, $\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} a = 0$; $\beta > 0$, $\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} a = \beta/\gamma$.

Рассмотрим нелинейную систему в случае $\gamma < 0$. Поведение функции $a(t_1)$ при $\beta < 0$ иллюстрируют фиг. 1, 2. Если начальное значение амплитуды меньше амплитуды предельного цикла, то движение устойчиво, так как $\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} a = 0$ при $a|_{t_1=0} = \beta(K+\gamma)^{-1} < \beta/\gamma$ (фиг. 1). В противном случае движение неустойчиво, поскольку $\lim_{t_1 \rightarrow t_{10}} a = +\infty$ при $a|_{t_1=0} > \beta/\gamma$ (фиг. 2) (здесь $t_{10} = -\beta^{-1} \ln(-\gamma/K)$). Из результатов, приведенных на фиг. 3, следует, что при $\beta > 0$ движение неустойчиво.

Таким образом, если $\gamma < 0$, то при $\beta < 0$ ($v < v_0$) имеется неустойчивый предельный цикл, а при $\beta > 0$ движение неустойчиво. Данный предельный цикл ограничивает область притяжения нулевого решения. В случае $\gamma > 0$ движение устойчиво при $\beta < 0$, а при $\beta > 0$ существует устойчивый предельный цикл, для которого имеем

$$\theta = \Theta \cos(\Omega t_0 + \delta_0) + O(\varepsilon^2), \quad \Theta = 2(v - v_0)v_1^{-1}\beta\gamma^{-1}$$

$$\Omega = \Omega_0 - (v - v_0)v_1^{-1}(\beta\gamma_1/\gamma - \beta_1), \quad \delta_0 = \text{const}$$

Из (4)–(6) находим

$$c_1 = 16i(3\pi)^{-1}\Omega_0^2 d, \quad U = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$$

$$U_1 = \varepsilon_\theta \varepsilon_\psi + DD_1 v_0^2 + E_\psi - \Omega_0^2 + i(\varepsilon_\theta \Omega_0 - \varepsilon_\theta E_\psi / \Omega_0 + \varepsilon_\psi \Omega_0)] D^{-1} v_0^{-1}$$

$$U_2 = [\varepsilon_\psi + i(\Omega_0 - E_\psi / \Omega_0)] D^{-1} v_0^{-1}, \quad U_3 = iE_\psi / \Omega_0, \quad U_4 = 1$$

$$\alpha = (\alpha_{01} + i\alpha_{11}) / (Dv_0\Omega_0^2)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{01} &= -3\Omega_0^4 + (E_\theta + E_\psi + \varepsilon_\theta \varepsilon_\psi + DD_1 v_0^2) \Omega_0^2 + E_\theta E_\psi \quad \alpha_{11} = 2\Omega_0^3 (\varepsilon_\theta + \varepsilon_\psi) \\ \gamma &= 16 (3\pi)^{-1} k_d \Omega_0^3 \sigma [\alpha_{01} (E_\psi - \Omega_0^2) + \alpha_{11} \varepsilon_\psi \Omega_0] \\ \gamma_1 &= 16 (3\pi)^{-1} k_d \Omega_0^3 \sigma [\alpha_{01} \varepsilon_\psi \Omega_0 + \alpha_{11} (\Omega_0^2 - E_\psi)] \quad \beta = v_1 \Omega_0^2 v_0^{-1} \sigma (\alpha_{01} b_1 + \alpha_{11} b_2) \\ \beta_1 &= v_1 \Omega_0^2 v_0^{-1} \sigma (\alpha_{01} b_2 + \alpha_{11} b_1), \quad \sigma = (\alpha_{01}^2 + \alpha_{11}^2)^{-1} \\ b_1 &= \varepsilon_\psi (E_\theta - \Omega_0^2) + \varepsilon_\theta (E_\psi - \Omega_0^2) \\ b_2 &= \Omega_0 (\varepsilon_\theta \varepsilon_\psi - DD_1 v_0^2) - \Omega_0^{-1} (\Omega_0^2 - E_\theta) (\Omega_0^2 - E_\psi) \end{aligned}$$

Для числовых значений $B = 9.81 \text{ кгм}^2$, $C = 165 \text{ кгм}^2$, $h = 37 \text{ нмс}$, $h_1 = 981 \text{ нмс}$, $k_1 = 12200 \text{ нм}$, $k = 421000 \text{ нм}$, $I = 11.8 \text{ кгм}^2$, $r = 0.4 \text{ м}$, $l = 0.8 \text{ м}$, $a_1 = 42670 \text{ н}$ имеем $v_0 = 17.96 \text{ мс}^{-1}$, $\Omega_0 = 53.8 \text{ с}^{-1}$.

Зависимость амплитуды θ шимми от $v - v_0$ в рассматриваемом приближении линейна; в данном примере коэффициент пропорциональности для значений $k_d = 1.0, 3.0, 5.0, 10.0$ равен соответственно $2 \cdot 10^{-2}, 4.97 \cdot 10^{-3}, 3.23 \cdot 10^{-3}, 1.29 \cdot 10^{-3}$ рад с/м. С увеличением характеристики k_d квадратичного демпфера амплитуда шимми убывает. Период шимми $T = 2\pi/\Omega$ не зависит от величины k_d ; для рассматриваемого примера $T = \omega_1 (v - v_0) + \omega_0$, $\omega_0 = 8.12 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\omega_1 = 5.17 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}$. Частота Ω нелинейной системы меньше частоты Ω_0 линейной системы.

Подбирая соответствующий коэффициент сопротивления квадратичного демпфера, можно регулировать амплитуду шимми, не допуская выхода ее из безопасного интервала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоздек В. С. О влиянии различных параметров на устойчивость движения ориентированных колес самолета. — Тр. ЦАГИ, 1964, вып. 917, с. 1—30.
2. Gordon J. T., Merchant H. C. An asymptotic method for predicting amplitudes of nonlinear wheel shimmy. — J. Aircraft, 1978, v. 15, No. 3, p. 155—159.
3. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: «Мир», 1976. 456 с.

Киев

Поступила в редакцию
24.IX.1979

УДК 532.516

РАСЧЕТ БЛИЗКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАПЕЛЬ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ И ЭФФЕКТОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

Зинченко А. З.

В стоксовом приближении рассматривается осесимметричная задача о движении двух сферических капель в вязкой среде. Вязкости капель предполагаются конечными, но большими по сравнению с вязкостью внешней среды; кроме того, допускается малое проскальзывание на поверхностях сфер. Строится асимптотическое решение задачи, применимое при малой величине зазора между поверхностями сфер. В частных случаях отсутствия проскальзывания или внутренней циркуляции решение согласуется с результатами [1, 2].

Асимптотическое решение осесимметричной задачи, построенное в работе [1], при значениях вязкостей капель, больших по сравнению с вязкостью внешней среды, справедливо лишь при очень малых значениях безразмерного зазора (см. [1]). Решение, построенное в предлагаемой работе, оказывается применимым в более широкой области.

Случай, когда вязкости частиц велики по сравнению с вязкостью среды, часто реализуется при движении капель в газовой среде, а в этом случае при значениях за-